



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

E. N. Aristova, G. I. Ovcharov, Hermite characteristic scheme for linear inhomogeneous transport equation,
Mat. Model., 2020, Volume 32, Number 3, 3–18

<https://www.mathnet.ru/eng/mm4160>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.86

April 20, 2025, 22:50:55



ЭРМИТОВА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ СХЕМА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

© 2020 г. *Е.Н. Аристова¹, Г.И. Овчаров²*

¹Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН

²Московский физико-технический институт
aristovaen@mail.ru

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №18-01-00857а.

DOI: 10.20948/mm-2020-03-01

Построена интерполяционно-характеристическая схема для численного решения неоднородного уравнения переноса. Схема основана на интерполяции Эрмита для восстановления значения в точке пересечения выпущенной назад характеристики с гранями ячейки. Интерполяция Эрмита для восстановления значений функции использует не только узловые значения искомой функции, но и ее производной. В отличие от предыдущих работ, также основанных на эрмитовой интерполяции, для передачи на следующий слой информации о производных не используется дифференциальное продолжение уравнения переноса, а используется связь между интегральными средними, узловыми значениями и производными по формуле Эйлера-Маклорена. Показана сходимость разностной схемы с третьим порядком для гладких решений. На численных примерах решений с понижающейся гладкостью рассмотрены диссипативные и дисперсионные свойства схемы.

Ключевые слова: уравнение переноса, интерполяционно-характеристический метод, интерполяция Эрмита, формула Эйлера-Маклорена.

HERMITE CHARACTERISTIC SCHEME FOR LINEAR INHOMOGENEOUS TRANSPORT EQUATION

E.N. Aristova¹, G.I. Ovcharov²

¹Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS

²Moscow Institute of Physics and Technology

The interpolation-characteristic scheme for the numerical solution of the inhomogeneous transport equation is constructed. The scheme is based on Hermite interpolation to reconstruction the value of unknown function at the point of intersection of the backward characteristic with the cell edges. Hermite interpolation to regeneration the values of the

function uses not only the nodal values of the function, but also values of its derivative. Unlike previous works, also based on Hermitian interpolation, the differential continuation of the transport equation is not used to transfer information about the derivatives to the next layer. The relationship between the integral means, nodal values and derivatives according to the Euler-Maclaurin formula is used. The third-order convergence of the difference scheme for smooth solutions is shown. The dissipative and dispersion properties of the scheme are considered on numerical examples of solutions with decreasing smoothness.

Key words: advection equation, interpolation-characteristic method, Hermite interpolation, Euler-Maclaurin formula.

1. Введение. Рассмотрим задачу нахождения численного решения нестационарного уравнения переноса незаряженного излучения или нейтральных частиц в плоской одномерной геометрии вида

$$Lu(x,t) \equiv \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + a \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \kappa(x,t)u(x,t) = f(x,t). \quad (1)$$

Для построения схемы мы не будем вдаваться в структуру правой части, предполагая, что правая часть является известной функцией. Дополним уравнение (1) начальными условиями

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq X. \quad (2)$$

В предположении положительности скорости переноса a в качестве крайних условий будем использовать либо классические граничные условия на левой границе вида

$$u(0,t) = \varphi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

либо периодические крайние условия

$$u(0,t) = u(X,t), \quad u'_x(0,t) = u'_x(X,t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4)$$

Периодические крайние условия позволяют более длительно отслеживать эволюцию решения.

В данной работе построена и исследована схема третьего порядка аппроксимации по пространственной координате и времени. Построение численного решения высокого порядка аппроксимации (выше второго) происходит в рамках одной ячейки, поэтому схему можно отнести к классу бикompактных. Компактный шаблон удобен во многих отношениях, начиная с реализации крайних условий и заканчивая учетом контактных разрывов в

среде. Метод построения численного решения относится к интерполяционно-характеристическим (или сеточно-характеристическим). В методах этого класса уравнение переноса интегрируется вдоль отрезка характеристики, выпущенной назад из точки, в которой ищется решение, до пересечения с границами ячейки. Способ интерполяции значения искомой функции в эту точку и дальнейшего интегрирования и определяет порядок точности метода. В данной работе для этих целей была использована интерполяция Эрмита, которая строится с использованием не только узловых значений функции, но и пространственных производных в узлах. Тем самым платой за повышение порядка аппроксимации до третьего является необходимость передавать с одного временного слоя на следующий не только узловые значения функции, но и значения ее производных (т.е. удвоение набора расчетных величин). Метод, основанный на использовании эрмитовой интерполяции, не нов. Обычно [1-8] для вычисления этих требуемых производных используется дифференциальное продолжение уравнения переноса (1), т.е. помимо (1) решается также уравнение $\partial Lu / \partial x = f'_x$. Для линейного однородного уравнения (1') дифференциальное продолжение приобретает еще более простой вид $Lu'_x = 0$. В данной работе дифференциальное продолжение уравнения переноса не используется. Для передачи информации о производных на следующий временной слой было предложено использовать интегральные средние и связь между интегральным средним, узловыми значениями и производными из формулы Эйлера-Маклорена. С этой точки зрения основная идея данной схемы близка к бикompактным схемам Б.В. Рогова (см., например, [9-12] и цитированную в этих работах литературу).

Существует огромное количество численных методов решения уравнения переноса. Выбор предпочтительной схемы определяется задачами и свойствами решения, которые важны в конкретных приложениях. В задачах переноса излучений или незаряженных частиц существенна экспоненциальная зависимость решения от оптической толщины ячейки. Интерполяционно-характеристические методы позволяют явно учесть эту зависимость внутри ячейки. Бикompактные схемы показывают прекрасные результаты при умеренных оптических толщинах расчетных ячеек, при которых хорошо работает алгебраическая аппроксимация экспоненты, однако для значительных оптических толщин пространственная аппроксимация бикompактных схем эквивалентна построению паде-аппроксимации для экспоненты, у которой степени числителя и знаменателя равны. Для больших оптических толщин аппроксимация экспоненты отсутствует.

2. Схема для однородного уравнения переноса. Построение схемы начнем с однородного уравнения переноса

$$Lu \equiv \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + a \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0. \quad (1')$$

Интерполяционно-характеристическая схема будет построена в рамках одной расчетной ячейки, что упрощает ситуацию вблизи границ и контактных разрывов. Будем использовать аппроксимацию уравнения в рамках квадратной ячейки с вершинами (x_m, t^n) , (x_{m+1}, t^n) , (x_m, t^{n+1}) , (x_{m+1}, t^{n+1}) . Для положительной скорости переноса a неизвестным сеточным значением искомой функции будет y_{m+1}^{n+1} . Выпустим из точки (x_{m+1}, t^{n+1}) характеристику $x - at = \text{const}$ назад до пересечения либо с нижней, либо с боковой гранью ячейки (рис.1). В первом случае число Куранта $\sigma = at / h \leq 1$, во втором $\sigma \geq 1$. Обозначим координату пересечения обратной характеристики с границами ячейки либо x^* ($\sigma \leq 1$), либо t^* ($\sigma \geq 1$).

Для точного решения (1') значение из этой точки переносится без изменений в точку (x_{m+1}, t^{n+1}) . Таким образом, точность метода определяется точностью восстановления узлового значения y^* .

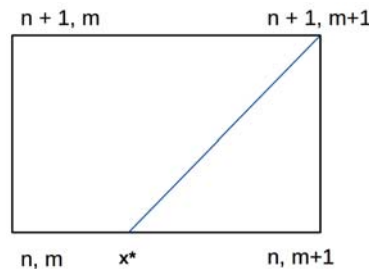


Рис.1. Расчетная ячейка.

Будем использовать кубическую интерполяцию Эрмита. Для случая $\sigma \leq 1$ пересечения с нижней гранью ячейки она в барицентрических пространственных координатах p и q на отрезке $[x_m, x_{m+1}]$ имеет вид

$$P_3(p, q) = H^R(p, q)y_{m+1}^n + H^L(p, q)y_m^n + G^R(p, q)d_{m+1}^n h + G^L(p, q)d_m^n h. \quad (5)$$

Здесь H, G – базисные функции Эрмита

$$\begin{aligned} p &= (x^* - x_m) / h, & q &= (x_{m+1} - x^*) / h, & p + q &= 1, & h &= x_{m+1} - x_m, \\ H^R &= p(p + 2qp), & G^R &= -p \cdot qp, \\ H^L &= q(q + 2qp), & G^L &= q \cdot qp, \end{aligned} \quad (6)$$

y_m^n – сеточные значения искомой функции, а d_m^n – сеточные значения про-

пространственных производных искомой функции. Для случая $\sigma \geq 1$ точка начала характеристики, приходящей в точку (x_{m+1}, t^{n+1}) , попадает на левую границу, интерполяция на этой границе расчетной ячейки рассматривается аналогично с учетом производных по времени для искомой функции. Если в массиве данных хранятся только пространственные производные, производные по времени могут быть рассчитаны из уравнения переноса (1').

Интерполяция вида (5) была использована во многих работах, см., например [1-7] и литературу в них. Отличие предлагаемого подхода от упомянутых работ заключается в способе определения величин d_m^{n+1} , необходимых для возможности расчета величин на следующем временном слое. Как уже было сказано, стандартной процедурой является использование дифференциального продолжения уравнения (1'), т.е. для пространственной производной также выписывается дифференциальное уравнение вида (1'), которое должно решаться совместно с исходным уравнением переноса. У этого подхода есть три недостатка: во-первых, эту систему уравнений нужно как-то замыкать для достижения заданной точности, во-вторых, уравнение (1'), как и уравнение (1), допускает разрывные решения, и в этом случае производная уже должна рассматриваться как обобщенная функция, и в-третьих, при рассмотрении уравнения (1) с переменным коэффициентом поглощения $\kappa(x, t)$ продолженное уравнение будет содержать не только производную, но и саму функцию, что затрудняет построение схемы.

Мы не будем использовать дифференциальных продолжений уравнения (1'). Предположим, что в начальный момент времени мы знаем не только узловые значения функции $u_0(x_m)$, но и значения ее производной:

$$d_m^0 = u'_0(x_m). \tag{7}$$

Для замыкания алгоритма нам необходима процедура получения сеточных значений d_{m+1}^{n+1} . Для граничного узла значение производной в случае краевых условий (3) может быть рассчитано из (1') как $d_0^{n+1} = -\dot{\varphi}(t^{n+1}) / a$. Для однородного уравнения переноса производная d_{m+1}^{n+1} может быть вычислена как производная интерполянта в точке x^* : $d_{m+1}^{n+1} = P'_3(p, q)$. Однако такой вариант вычисления производной не обобщается на неоднородное уравнение (1). Мы поступим иначе. Вычислим интегральное среднее на нижнем отрезке $[x^*, x_{m+1}]$ либо точно от интерполянта P_3 , либо по формуле Симпсона. В силу характеристических свойств однородного уравнения (1') это интегральное среднее будет совпадать с интегральным средним по отрезку $[t^n, t^{n+1}]$ в точке x_{m+1} справа. Значение пространственной производ-

ной d_{m+1}^n может быть из уравнения (1') пересчитано в производную по времени: $g_{m+1}^n = -ad_{m+1}^n$. Тогда на правой границе нам известны два узловых значения y_{m+1}^n, y_{m+1}^{n+1} , интегральное среднее \bar{y}_{m+1} и значение временной производной искомой функции g_{m+1}^n . Эти данные позволяют получить значение g_{m+1}^{n+1} из формулы Эйлера–Маклорена:

$$\bar{y}_{m+1} \equiv \frac{1}{\tau} \int_{t^n}^{t^{n+1}} u(x_{m+1}, t) dt = \frac{1}{2}(y_{m+1}^n + y_{m+1}^{n+1}) - \frac{\tau}{12}(g_{m+1}^{n+1} - g_{m+1}^n). \quad (8)$$

В свою очередь, величина g_{m+1}^{n+1} может быть пересчитана в пространственную производную $d_{m+1}^{n+1} = -g_{m+1}^{n+1} / a$ из уравнения (1').

3. Результаты численного тестирования схемы для однородного уравнения переноса.

Задача 1. Если задано начальное распределение $u_0(x)$, то точным решением уравнения (1') будет функция $u_0(x - at)$, если краевое условие (3) согласовано с начальным: $\varphi(t) = u_0(-at)$. Была рассмотрена задача с начальными и согласованными граничными условиями вида

$$u_0(x) = \sin(x), \quad \varphi(t) = \sin(-at).$$

Были выбраны параметры задачи: $a = 1, \sigma = 0.5$. Рассматривалась погрешность численного решения

$$\varepsilon = \max_{x_m, t^n \in [0,1] \times [0,1]} \left| y_m^n - \sin(x_m - t^n) \right| \quad (9)$$

при удвоении сетки. Результаты расчетов представлены в табл. I. Видно, что решение демонстрирует третий порядок сходимости.

Таблица I. Погрешность численного решения $\| [u]_{\tau, h} - y \|_C$ Задачи 1 при сгущении сеток.

N_x	99	ε	Порядок сходимости
16	32	$3.0508 \cdot 10^{-7}$	2.98
32	64	$3.8160 \cdot 10^{-8}$	2.98
64	128	$4.7706 \cdot 10^{-9}$	3.02
128	256	$5.9635 \cdot 10^{-10}$	2.98
256	512	$7.4544 \cdot 10^{-11}$	3.01
512	1024	$9.3180 \cdot 10^{-12}$	3.0
1024	2048	$1.1653 \cdot 10^{-12}$	2.98
2048	4096	$1.4655 \cdot 10^{-13}$	

В дальнейших тестах будем уменьшать гладкость точного решения. Будем исследовать диссипативно-дисперсионные свойства схемы.

Задача 2. Рассмотрим задачу при периодических краевых условиях (4) и начальных условиях в виде одиночного импульса:

$$u_0(x) = \begin{cases} \cos^2((x-0.5)/2l), & l=1/32, \quad |x-0.5| \leq l, \\ 0, & |x-0.5| > l. \end{cases} \quad (10)$$

Остальные параметры расчета: $a=1, \sigma=0.25$. Данное начальное распределение содержит разрыв второй производной. Решение задачи 2 при различных числах Куранта представлены на рис.2.

Для сравнения на рис.3 представлен результат расчета задачи 2 двумя другими методами третьего порядка аппроксимации – РРМ (Piecewise Parabolic Method) [8] и методом аппроксимации функции на нижнем слое глобальным сплайном. Глобальный сплайн имеет дефект 1 (это разность между степенью аппроксимирующего многочлена и степенью его гладкости), эрмитов сплайн имеет дефект 2. Уменьшение требований к гладкости функции, осуществляющей восстановление значений, естественно для построения метода решения уравнения переноса, допускающего разрывные решения. Построение глобального сплайна дефекта 1 происходит на основе всех значений функции на нижнем слое, и это приводит к существенным колебаниям решения вверх по потоку (рис.3). Построение эрмитова сплайна локально, поэтому немонотонности решения имеют также локальный характер. Диссипация всех схем на основе эрмитовой интерполяции мала, что и показывает сравнение результатов на рис.2 и рис.3. Отличие представленной схемы заключается в существенном сокращении области немонотонности, особенно при малых числах Куранта. Отметим, что предлагаемая схема может быть обобщена на неструктурированные тетраэдральные сетки.

Т.к. ошибка метода определяется ошибкой интерполяции, а она, в свою очередь, выражается через четвертую производную решения, то при отсутствии непрерывной четвертой производной порядок сходимости метода должен быть ниже, чем третий. Данные о максимальной погрешности решения на первом шаге по времени через один, два, три и четыре периода представлены в табл. II и на рис.4.

Оценка скорости сходимости по табл. II дает величину около полутора. Это подтверждается данными рис.4, где для сравнения в двойном логарифмическом масштабе проведена прямая $F(x) \sim x^{-1.5}$.

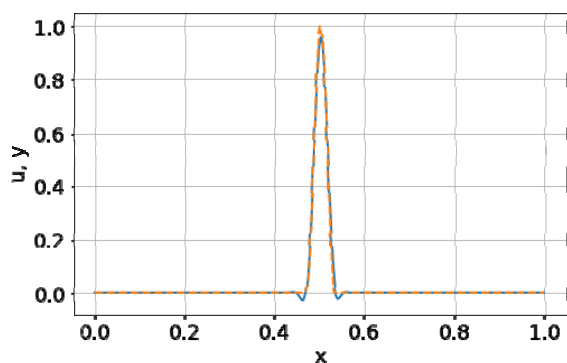
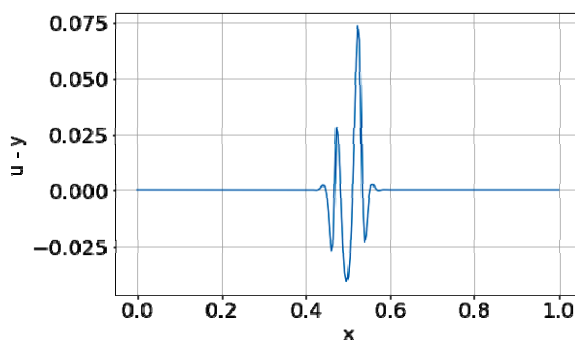
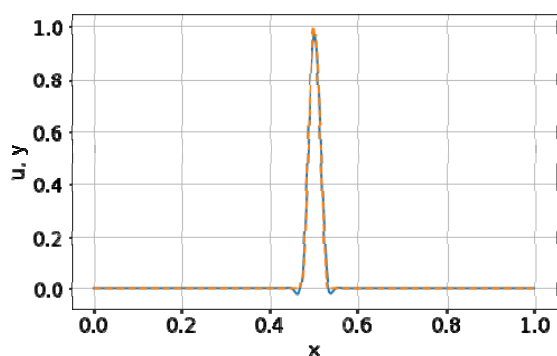
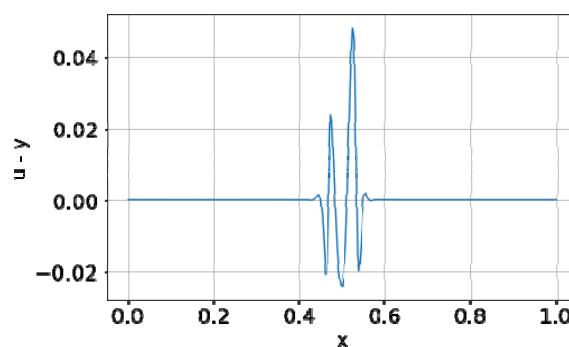
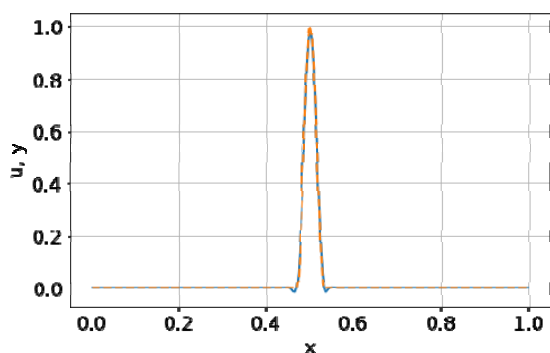
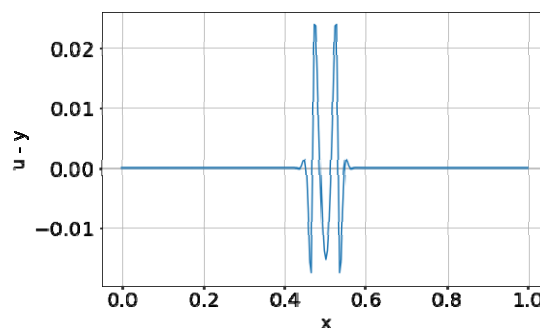
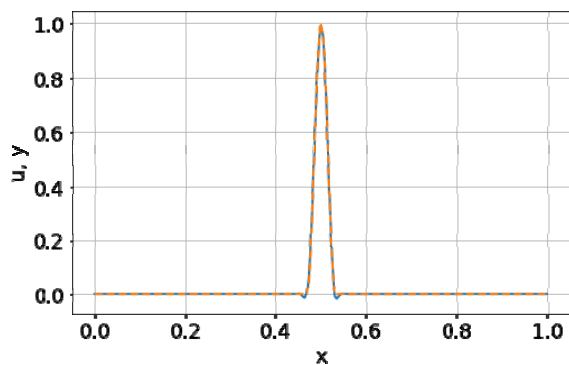
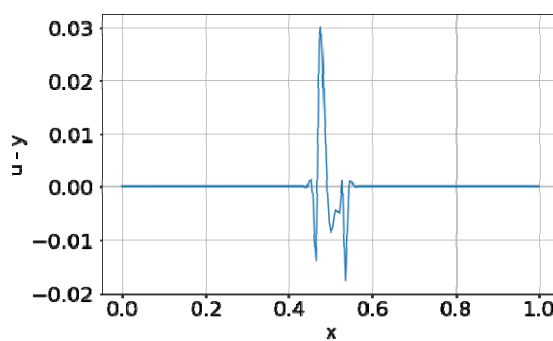
А) $\sigma = 0.01$.Б) $\sigma = 0.01$.А) $\sigma = 0.25$.Б) $\sigma = 0.25$.А) $\sigma = 0.5$.Б) $\sigma = 0.5$.А) $\sigma = 0.75$.Б) $\sigma = 0.75$.

Рис.2. Результаты расчета Задачи 2 при 256 шагах по пространственной переменной и различных числах Куранта. А) Слева представлено сравнение численного решения (сплошная линия) и точного решения (пунктир) после одного периода. Б) Погрешность численного решения в тот же момент времени.

Таблица II. Погрешность численного решения $\| [u]_{\tau,h} - y \|_C$ Задачи 2 при сгущении сеток в $\sqrt{2}$ раз.

N_x	N_t	1 шаг	1 период	2 периода	3 периода	4 периода
64	256	0.03851	0.3912	0.4720	0.5125	0.5539
91	362	0.01255	0.2349	0.2949	0.3408	0.3668
128	512	0.006003	0.1528	0.2252	0.2654	0.3491
181	724	0.007295	0.08726	0.1233	0.1553	0.1804
256	1024	0.004348	0.04703	0.07048	0.0941	0.0991
362	1448	0.003701	0.03167	0.04198	0.05052	0.0678
512	2048	0.002529	0.01782	0.02245	0.02637	0.0330
724	2896	0.001964	0.01203	0.01678	0.01709	0.01940
1024	4048	0.001260	0.008470	0.009044	0.01012	0.01093

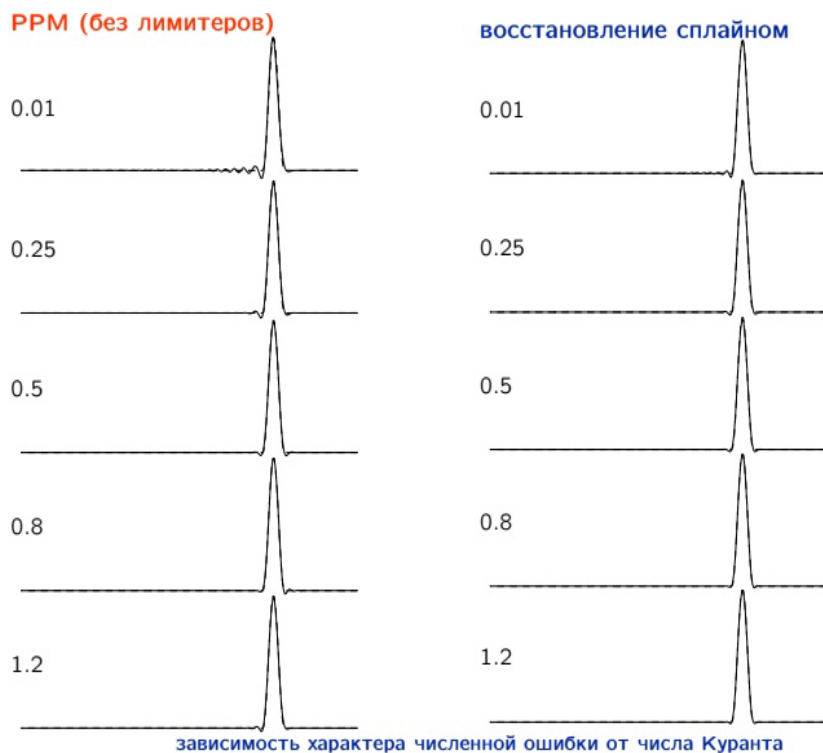


Рис.3. Расчет задачи 2 двумя методами третьего порядка аппроксимации: PPM [8] и восстановления профиля нижнего слоя сплайном при 256 интервалах по пространственной переменной. Численное решение нарисовано сплошной линией, точное решение – пунктиром. Около каждого графика указано соответствующее число Куранта.

Поскольку скорости сходимости для всех периодов одинаковы (рис.4), отличается константа сдвига, то в дальнейшем результаты приводятся для первого периода.

Задача 3. Рассматривается распространение начального импульса в виде "крышечки"

$$u_0(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0.5, \\ 1-x, & x > 0.5. \end{cases} \quad (11)$$

Результаты расчета однородного уравнения для начального импульса (11) с разрывной первой производной представлены в табл. III и на рис. 5.

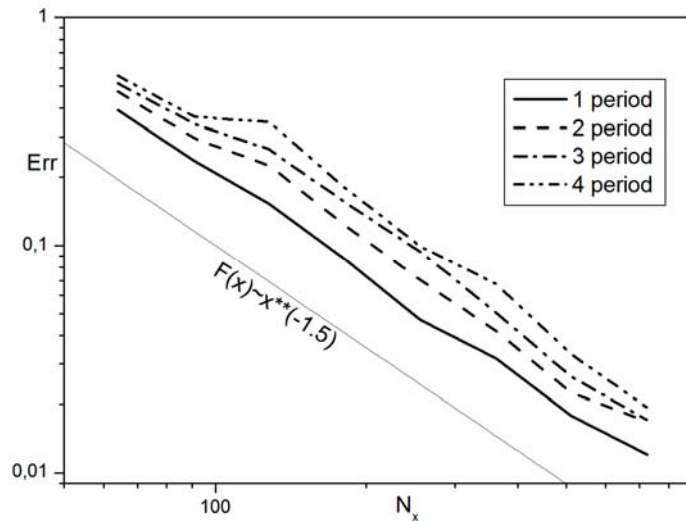


Рис.4. Скорость сходимости метода для задачи с разрывом второй производной. Представлена максимальная пространственная ошибка для периодического решения через один, два, три и четыре периода при сгущении сетки при фиксированном числе Куранта.

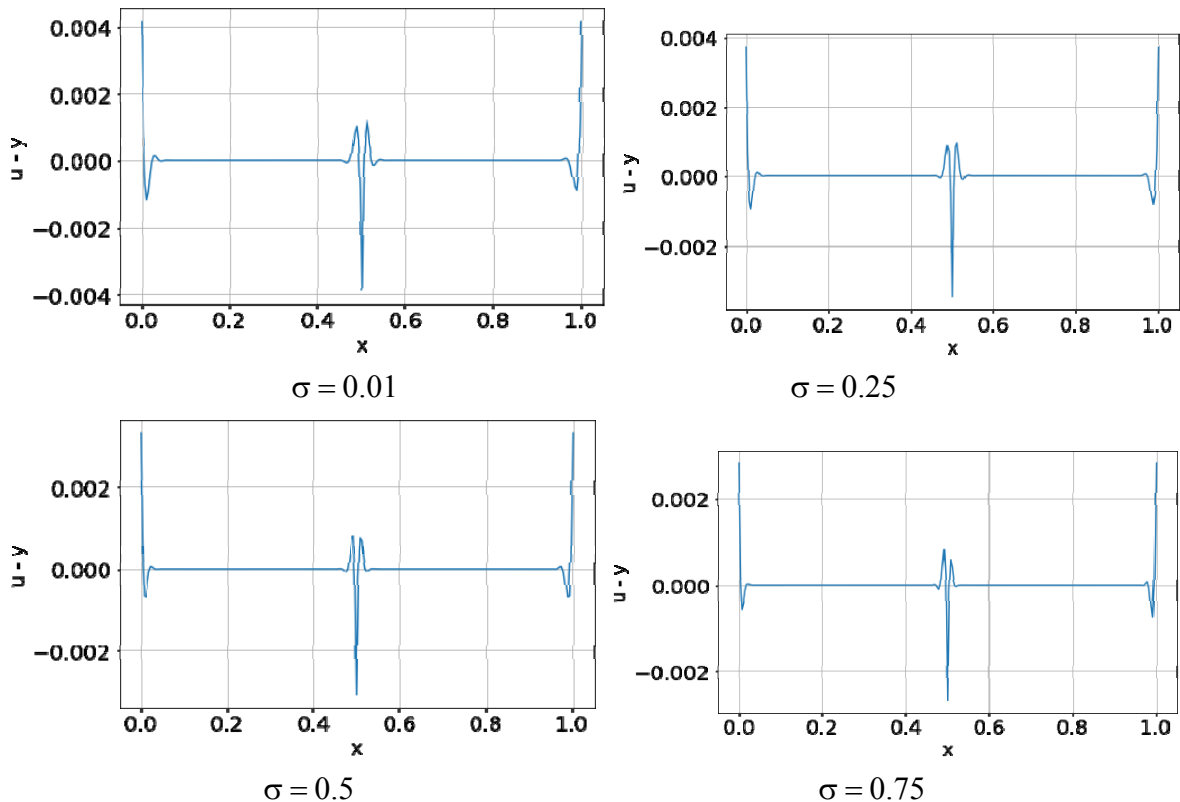


Рис.5. Погрешность численного решения Задачи 3 при 256 шагах по пространственной переменной и различных числах Куранта после одного периода.

Отличие численного решения от точного решения в виде треугольного импульса визуально не определяется, поэтому на рис.5 приведена только разность точного и численного решения для разных чисел Куранта. Порядок сходимости метода для задачи 3 с разрывной производной составляет 0.75.

Задача 4. Распространение разрывного импульса

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0.5, \\ 1, & x \geq 0.5. \end{cases} \tag{12}$$

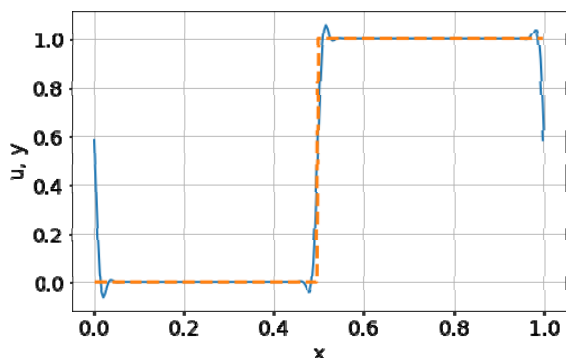
Результаты расчета Задачи 4 при периодических краевых условиях представлены в табл. III и на рис.6.

Таблица III. Погрешность численного решения $\| [u]_{\tau,h} - u \|_C$ Задачи 3 (четыре колонки слева) и задачи 4 (колонка справа) при сгущении сеток.

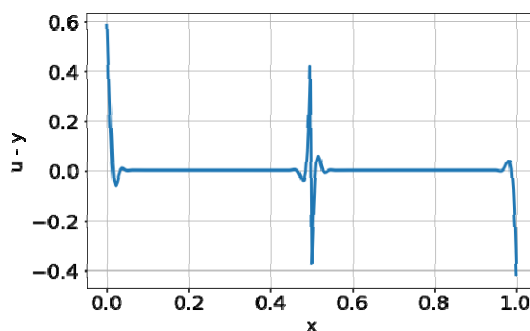
N_x	N_t	1 период	Порядок сходимости	1 период
		Задача 3		Задача 4
64	256	0.01059	0.77	0.57087
91	362	0.008112	0.74	0.56465
128	512	0.006275	0.75	0.55966
181	724	0.0048323	0.75	0.55473
256	1024	0.0037216	0.75	0.55021
362	1448	0.0028670	0.75	0.54868
512	2048	0.0022088		0.54224

Ошибка метода равна величине около 0.5 в точках разрыва (включая граничную), и это неудивительно при представлении разрывного решения непрерывной функцией. Вне точек разрыва погрешность невелика, дисперсия не приводит к появлению длительных осцилляций вверх по потоку.

Рис.6 показывает, что ошибка численного решения задачи с разрывными начальными данными слабо зависит от числа Куранта и локализуется около разрывов решения.



А) $\sigma = 0.01$



Б) $\sigma = 0.01$

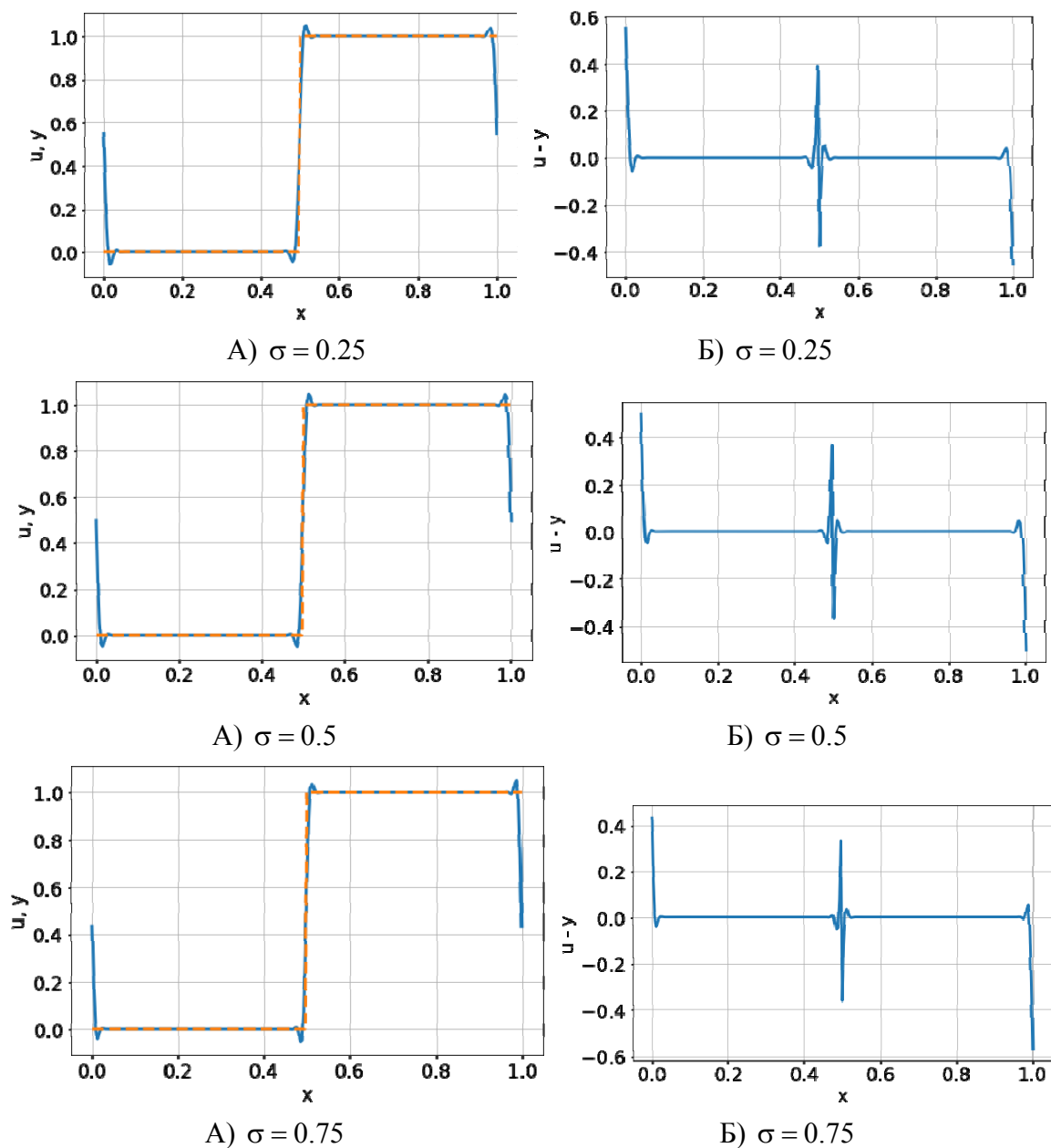


Рис.6. Решение Задачи 4 при 256 шагах по пространственной переменной после одного периода. А) Сравнение численного решения (сплошная линия) и точного решения (пунктир). Б) Погрешность численного решения в тот же момент времени.

4. Схема для неоднородного уравнения переноса (1). Интерполяционно-характеристический подход может быть распространен и на случай неоднородного уравнения (1). Заменой переменных вида

$$\begin{cases} \xi = x - at \\ \eta = x + at \end{cases} \quad (13)$$

уравнение (1) может быть приведено к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$2a \frac{\partial u}{\partial \eta} + \kappa u = f\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\eta - \xi}{2a}\right) \quad (14)$$

вдоль характеристики $\xi \equiv x - at = \text{const}$. Решение этого неоднородного уравнения может быть найдено методом вариации постоянной, что позволяет получить решение в виде

$$u(\eta) = u^* \exp\left(-\frac{\kappa(\eta - \eta^*)}{2a}\right) + \int_{\eta^*}^{\eta} \exp\left(-\frac{\kappa(\eta - \eta')}{2a}\right) f\left(\frac{\xi + \eta'}{2}, \frac{\eta' - \xi}{2a}\right) d\eta', \quad (15)$$

вычисляемое вдоль характеристики $\xi = \text{const}$. Численное значение u^* может быть получено по формулам интерполяции Эрмита (5),(6), как и в однородном случае, только теперь для получения решения y_{m+1}^{n+1} необходимо вычислить интеграл в (15) вдоль отрезка характеристики. Это может быть сделано, например, с помощью формулы Симпсона. Использование формулы Симпсона при умеренных оптических толщинах ячейки не ухудшает точность метода.

Описание метода будет завершено, если мы укажем способ вычисления пространственной производной в точке (x_{m+1}, t^{n+1}) . В этом пункте численного метода, в отличие от однородного уравнения переноса, использование интегральных средних становится существенным. Интегральное среднее вдоль правого ребра ячейки от (x_{m+1}, t^n) до (x_{m+1}, t^{n+1}) получается интегрированием интегрального среднего от (x^*, t^n) до (x_{m+1}, t^n) с преобразованием каждого значения подынтегральной функции типа (15) вдоль линейно меняющегося по длине отрезка характеристики. Для вычисления интегрального среднего по правому ребру ячейки будем использовать формулу Симпсона, а для вычисления $y_{m+1}^{n+1/2}$, которое входит в формулу Симпсона, используем аналог формулы (15) по отрезку характеристики вдвое меньшей длины (рис.7).

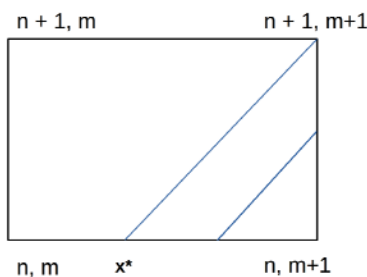


Рис.7. Конфигурация используемых характеристик для вычисления интегрального среднего на правом ребре расчетной ячейки.

Интегральное среднее на отрезке от (x_{m+1}, t^n) до (x_{m+1}, t^{n+1}) позволяет по формуле (8) получить производную по времени g_{m+1}^{n+1} , которая может быть пересчитана в пространственную с использованием уравнения (1). Тем самым, алгоритм получения решения с использованием эрмитовой интерполяции для неоднородного уравнения переноса завершен.

Задача 5. Рассмотрим решение уравнения (1) при значении параметров $a = 1$, $\kappa = 1$. Предполагая точное решение равным $u(x, t) = \sin(x + t)$, для источника получим выражение

$$f(x, t) = (1 + a)\cos(x + t) + \kappa\sin(x + t). \quad (16)$$

Поставим начальные и граничные условия, соответствующие точному решению:

$$u(x, 0) = \sin x, \quad u(0, t) = \sin t.$$

Ошибка метода вычисляется по формуле (9).

Сходимость численного решения задачи к точному при сгущении сеток отражена в табл. IV.

Таблица IV. Ошибка численного решения задачи 5 при числе Куранта 0.25 и удвоении сеток по пространству и времени.

N_x	N_t		Порядок сходимости
32	128	$1.1801 \cdot 10^{-7}$	2.9
64	256	$1.6342 \cdot 10^{-8}$	3.1
128	512	$1.9188 \cdot 10^{-9}$	2.9
256	1024	$2.5043 \cdot 10^{-10}$	3.0
512	2048	$3.0732 \cdot 10^{-11}$	3.0
1024	4096	$3.8709 \cdot 10^{-12}$	

5. Заключение. В данной работе на основе использования эрмитовой интерполяции предложена схема третьего порядка аппроксимации по пространственной и временной переменным для неоднородного уравнения переноса. В отличие от других работ, использующих эрмитову интерполяцию, значения производных, необходимые для продолжения расчетов на новом временном слое, ищутся не из решения продолженного уравнения переноса, а на основе вычисления интегральных средних и применения формулы Эйлера–Маклорена. Были исследованы свойства данной разностной схемы и скорость ее сходимости при различной гладкости решения. Для достаточно гладкого решения как однородного, так и неоднородного уравнения переноса был подтвержден третий порядок сходимости разностной схемы. При

уменьшении гладкости решения скорость сходимости падает. Были численно исследованы диссипативные и дисперсионные свойства данной разностной схемы. Сравнение точного и численного решения показывает, что диссипация разностной схемы достаточно мала. Дисперсия разностной схемы практически симметрична (не является ни сильно опережающей, ни запаздывающей) и свойства решения лучше, чем у других методов этого класса с тем же порядком аппроксимации.

Данная схема допускает обобщение на многомерный случай при использовании тетраэдральных сеток. Поэтому представляется целесообразным дальнейшее развитие метода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *В.И. Голубев, И.Б. Петров, Н.И. Хохлов.* Компактные сеточно-характеристические схемы повышенного порядка точности для трехмерного линейного уравнения переноса // Математическое моделирование, 2016, т.28, №2, с.123-132;
V.I. Golubev, I.B. Petrov, N.I. Khokhlov. Compact grid-characteristic schemes of higher orders for 3D linear transport equation // MM&CS, 2016, v.8, №5, p.577-584.
2. *А.В. Фаворская, И.Б. Петров.* Численное моделирование волновых процессов в скальных массивах сеточно-характеристическим методом // Матем. моделирование, 2018, т.30, №3, с.37-51;
A.V. Favorskaya, I.B. Petrov. Numerical modeling of wave processes in Rocks by Grid-Characteristic method // Mathematical models and computer simulations, 2018, v.10, №5, p.639-647.
3. *И.Б. Петров, А.В. Фаворская, Н.И. Хохлов.* Сеточно-характеристический метод на системах вложенных иерархических сеток и его применение для исследования сейсмических волн // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2017, т.57, №11, с.1804-1811;
I.B. Petrov, A.V. Favorskaya, N.I. Khokhlov. Grid-characteristic method on embedded hierarchical grids and its application in the study of seismic wave // Computational Mathematics and Mathematical Physics, November 2017, v.57, №11, p.1771-1777.
4. *И.Б. Петров, М.В. Муратов.* Применение сеточно-характеристического метода в решении прямых задач сейсморазведки трещиноватых пластов (обзорная статья) // Матем. моделирование, 2019, т.31, №4, с.33-56;
I.B. Petrov, M.V. Muratov. Application of the grid-characteristic method in solving direct problems of seismic exploration of fractured formations (review article) // Mathematical models and computer simulations, 2019, v.11, №6, in print.
5. *T. Yabe, F. Xiao, T. Utsumi.* The Constrained Interpolation Profile Method for Multiphase Analysis // Journal of Computational Physics, May 2001, v.169, Issue 2, p.556-593.
6. *T. Yabe, T. Aoki, G. Sakaguchi et al.* The Compact CIP (Cubic-Interpolated Pseudo-Particle) Method as a General Hyperbolic Solver // Computers&Fluids, 1991, v.19, №3/4, p.421-431.

7. *T.-L. Tsai, S.-W. Chiang, and J.-G. Yang.* Characteristics Method with Cubic-Spline Interpolation for Open Channel Flow Computation // Intern. J. for Numerical Methods in Fluids, 2004, v.46, p.663-683.
8. *P. Colella P.R. Woodward.* Piecewise parabolic method (PPM) for gas-dynamical simulations // J. Comput. Phys., 1984, v.54, №1, p.174-201.
9. *Б.В. Рогов, М.Н. Михайловская.* Бикомпактные схемы четвертого порядка аппроксимации для гиперболических уравнений // ДАН, 2010, т.430, №4, с.470-474;
B.V. Rogov and M.N. Mikhailovskaya. Fourth_Order Accurate Bicomact Schemes for Hyperbolic Equations // Doklady Mathematics, 2010, v.81, №1, p.146-150.
10. *E.N. Aristova, B.V. Rogov.* Bicomact scheme for the multidimensional stationary linear transport equation // Applied Numerical Mathematics, July 2015, v.93, p.3-14.
11. *B.V. Rogov.* Dispersive and dissipative properties of the fully discrete bicomact schemes of the fourth order of spatial approximation for hyperbolic equations // Applied Numerical Mathematics, 2019, v.139, p.136-155, ISSN: 0168-9274, DOI: 10.1016/j.apnum.2019.01.008.
12. *A.V. Chikitkin, B.V. Rogov.* Family of central bicomact schemes with spectral resolution property for hyperbolic equations // Applied Numerical Mathematics, 2019, v.142, p.151-170, ISSN: 0168-9274, DOI: 10.1016/j.apnum.2019.03.007

Поступила в редакцию 01.07.2019

После доработки 01.07.2019

Принята к публикации 09.09.2019