С. Н. Глазатов, О периодических трансзвуковых течениях вязкого газа,
Сиб. матем. журн., 1997, том 38, номер 1, 69–77

https://www.mathnet.ru/smj423

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 1997. Том 38, № 1

УДК 517.95

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТРАНСЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ ВЯЗКОГО ГАЗА

С. Н. Глазатов

В работах [1, 2] для описания трансзвуковых течений газа с учетом эффектов вязкости и теплопроводности было предложено уравнение

$$Au \equiv -\mu u_{xxx} + u_x u_{xx} - \Delta_y u = f(x,y), \tag{1}$$

где параметр $\mu > 0$ характеризует вязкость и теплопроводность газа.

В монографии [3, с. 93, 94] для уравнения (1) при $f \equiv 0$ была предложена краевая задача в области $Q = D \times (0, L)$, где $D \subset R_y^2$ — ограниченная область с гладкой границей $\gamma \in C^2$, а именно, требовалось найти в области Q решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial Q} = \varphi(x,y)$$

(∂Q — граница области Q, n — единичный вектор нормали к ∂Q). Было доказано существование единственного гладкого решения этой задачи при том условии, что соответствующая норма продолжения функции $\varphi(x,y)$ внутрь области Q достаточно мала.

В [4] исследовалась задача об обтекании трансзвуковым потоком вязкого газа осесимметрического тела. В этой работе уравнение (1) имело вид

$$A_1 u \equiv -\mu u_{xxx} + u_x u_{xx} - u_{rr} - r^{-1} u_r = 0$$

и рассматривалось в области $x \in R$, $r > 0$, а краевые условия задавались при $|x| \to \infty$, $r \to \infty$ и $r \to 0$.

В настоящей работе изучена задача о существовании и единственности периодического по переменной x трансзвукового течения вязкого газа, которое описывается уравнением (1) в области Q, определенной выше (такой же, как и в [3]).

Постановка задачи: в области Q найти решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$D_x^j u\big|_{x=0} = D_x^j u\big|_{x=L}, \quad j = 0, 1, 2, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\gamma \times (0,L)} = 0. \tag{3}$$

Приведем необходимые обозначения: $(\cdot,\cdot)_0$ — скалярное произведение в $L^2(0,L)$, $[\cdot,\cdot]_0$ — скалярное произведение в $L^2(Q)$; $|\cdot|_s$ — норма в пространстве Соболева $W_2^s(0,L)$; $\|\cdot\|_s$ — норма в пространстве $W_2^s(Q)$. Обозначим $|\!|\!|f|\!|\!|^2 = \|f\|_0^2 + \|f_x\|_0^2$.

Определим пространство $H(Q)$ как замыкание множества бесконечно дифференцируемых в $\overline{Q}$ функций, удовлетворяющих краевым условиям (2), (3), по норме

$$\|u\|^2_{H(Q)} = \|u\|^2_0 + \|u_x\|^2_0 + \|\nabla_y u\|^2_0 + \|u_{xx}\|^2_0 + \|\Delta_y u\|^2_0 + \|\nabla_y u_x\|^2_0 + \|u_{xxx}\|^2_0 + \|\Delta_y u_x\|^2_0 + \|\nabla_y u_{xx}\|^2_0 + \|u_{xxxx}\|^2_0.$$

Из определения $H(Q)$ следует, что все функции из этого пространства удовлетворяют краевым условиям (2), (3).

Обозначим

$$\widetilde{B}_\rho = \{z \in H(Q) : \|z\|_{H(Q)} \leqslant \rho, \iint\limits_Q z\,dydx = 0\}.$$

Через C_i будем обозначать положительные константы, зависящие лишь от области Q.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема. *Пусть* f, $f_x \in L^2(Q)$,

$$\iint\limits_Q f\,dxdy = 0, \quad f|_{x=0} = f|_{x=L}.$$

Тогда существует решение $u(x,y) \in H(Q)$ *задачи* (1)–(3) *такое, что*

$$\iint\limits_Q u\,dydx = 0,$$

если только $|\!|\!|f|\!|\!| < \alpha$, *где* α *— некоторое положительное число, зависящее от* μ *и* Q.

В классе функций $\widetilde{B}_{\sqrt{R_0}}$, *где* $R_0 > 0$ *— достаточно малое число, также зависящее от* μ *и* Q, *решение задачи* (1)–(3) *единственно.*

Замечание 1. Сразу же заметим, что условие $\iint\limits_Q f\,dydx = 0$ является необходимым условием разрешимости задачи (1)–(3) в пространстве $H(Q)$, ибо очевидно равенство $0 = [Au, 1]_0 = [f, 1]_0$.

Доказательство теоремы проводится в два этапа. Сначала докажем однозначную разрешимость линеаризованной задачи.

Рассмотрим в области Q линейное уравнение

$$Lu \equiv -\mu u_{xxx} - \Delta_y u = g(x,y) \tag{4}$$

с краевыми условиями (2), (3).

Лемма 1. *Для любой функции* $g(x,y) \in L^2(Q)$ *такой, что* $g_x \in L^2(Q)$,

$$\iint\limits_Q g\,dydx = 0, \quad g|_{x=0} = g|_{x=L},$$

существует единственное решение $u(x,y) \in H(Q)$ *задачи* (4), (2), (3) *такое, что*

$$\iint\limits_Q u\,dydx = 0,$$

и для него справедлива оценка

$$\|u\|^2_{H(Q)} \leqslant C_1(1 + \mu^{-1} + \mu^{-2})|\!|\!|g|\!|\!|^2.$$

Доказательство. Пусть $\{\omega_k(y)\}_{k=0}^{\infty}$ — ортонормированный в $L^2(D)$ базис, состоящий из собственных функций задачи Неймана

$$-\Delta_y \omega_k = \lambda_k^2 \omega_k, \quad \left.\frac{\partial \omega_k}{\partial n}\right|_{\gamma} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Здесь собственные числа занумерованы в порядке возрастания: $0 = \lambda_0^2 < \lambda_1^2 \leqslant \lambda_2^2 \leqslant \ldots$. Правая часть $g(x, y)$ допускает представление в виде сходящегося по норме $|||\cdot|||$ ряда:

$$g(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x) \omega_k(y),$$

при этом в силу условий леммы $g_k(x) \in W_2^1(0, L)$, $g_k|_{x=0} = g_k|_{x=L}$ при $k = 0, 1, 2, \ldots$ и, кроме того, $\int\limits_0^L g_0\, dx = 0$.

Разделяя переменные, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$l_k u_k \equiv -\mu u_{kxxx} + \lambda_k^2 u_k = g_k(x), \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

Добавим к ней краевые условия

$$D_x^j u_k(0) = D_x^j u_k(L), \quad j = 0, 1, 2, \; k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{6}$$

Сначала рассмотрим уравнение, соответствующее $k = 0$: $-\mu u_{0xxx} = g_0(x)$. Интегрируя его по x, получим

$$-\mu u_{0xx}(x) = \int\limits_0^x g_0(\xi)\, d\xi - \mu u_{0xx}(0).$$

Поскольку $\int\limits_0^L g_0\, dx = 0$, условие (6) при $k = 0$ и $j = 2$ выполняется. Интегрируя по x полученное выше равенство, имеем

$$-\mu u_{0x}(x) = \int\limits_0^x \int\limits_0^\xi g_0(\eta)\, d\eta d\xi - \mu x u_{0xx}(0) - \mu u_{0x}(0).$$

Используя произвол в выборе значения $u_{0xx}(0)$, положим

$$u_{0xx}(0) = (\mu L)^{-1} \int\limits_0^L \int\limits_0^\xi g_0(\eta)\, d\eta d\xi.$$

Тем самым мы добиваемся выполнения условия (6) при $k = 0$, $j = 1$. Повторяя процедуру интегрирования, получаем

$$-\mu u_0(x) = \int\limits_0^x \int\limits_0^\xi \int\limits_0^\eta g_0(\zeta)\, d\zeta d\eta d\xi - \frac{\mu x^2}{2} u_{0xx}(0) - \mu x u_{0x} - \mu u_0(0). \tag{7}$$

Используя произвол в выборе $u_{0x}(0)$ и уже найденное значение $u_{0xx}(0)$, положим

$$u_{0x}(0) = (\mu L)^{-1} \int\limits_0^L \int\limits_0^\xi \int\limits_0^\eta g_0(\zeta)\, d\zeta d\eta d\xi - \frac{L}{2} u_{0xx}(0).$$

Так мы добиваемся выполнения краевого условия (6) при $k=0$, $j=0$. Из представления (7) функция $u_0(x)$ находится с точностью до константы $-\mu u_0(0)$. Для однозначного определения $u_0(x)$ потребуем выполнения равенства $\int\limits_0^L u_0\,dx=0$. Поскольку $g_0\in W_2^1(0,L)$, функция $u_0\in W_2^4(0,L)$ очевидным образом удовлетворяет уравнению (5) при $k=0$.

Оценим нормы функции u_0 и ее производных через норму правой части g_0. Очевидна оценка

$$|u_{0xxx}|_0^2\leqslant\mu^{-2}|g_0|_0^2. \tag{8}$$

Из теорем вложения следует, что $D_x^ju_0(x)$ суть непрерывные на $[0,L]$ функции, а в силу выбора u_0 и условий периодичности при $j=0,1,2,3$ имеем $\int\limits_0^L D_x^ju_0\,dx=0$. По теореме о среднем существуют числа $x_j\in[0,L]$ такие, что $D_x^ju_0(x_j)=0$ и справедливы представления

$$D_x^ju_0(x)=\int\limits_{x_j}^{x}D_\xi^{j+1}u_0(\xi)\,d\xi,\qquad j=0,1,2.$$

Из этих представлений при помощи неравенства Гёльдера выводятся оценки $\left|D_x^ju_0\right|_0^2\leqslant C_2\left|D_x^{j+1}u_0\right|_0^2$ $(j=0,1,2)$. Теперь из (8) следует, что

$$\left|D_x^ju_0\right|_0^2\leqslant C_3\mu^{-2}|g_0|_0^2,\qquad j=0,1,2. \tag{9}$$

Так как $g_k\in W_2^1(0,L)$ для всех $k\geqslant0$, уравнения (5) допускают дифференцирование по x и при $k=0$ очевидна оценка

$$|u_{0xxxx}|_0^2\leqslant\mu^{-2}|g_{0x}|_0^2. \tag{10}$$

Складывая неравенства (9) и (10), окончательно получаем оценку

$$|u_0|_4^2\leqslant C_4\mu^{-2}\left(|g_0|_0^2+|g_{0x}|_0^2\right). \tag{11}$$

Теперь рассмотрим уравнение системы (5) при любом произвольном $k\geqslant1$ и формально сопряженное к нему уравнение

$$l_k^*v\equiv\mu v_{xxx}+\lambda_k^2v=g^*(x). \tag{5*}$$

Нетрудно проверить, что краевые условия

$$D_x^jv\big|_{x=0}=D_x^jv\big|_{x=L},\qquad j=0,1,2, \tag{6*}$$

являются сопряженными к условиям (6) и, наоборот, краевые условия (6) являются сопряженными к (6*).

Назовем функцию $u_k(x)\in L^2(0,L)$ *слабым обобщенным решением краевой задачи* (5), (6), если для любой функции $v(x)\in W_2^3(0,L)$, удовлетворяющей краевым условиям (6*), выполняется тождество

$$\left(u_k,l_k^*v\right)_0=(g_k,v)_0. \tag{12}$$

Пусть $v\in W_2^3(0,L)$ — произвольная функция, удовлетворяющая краевым условиям (6*). Рассматривая интеграл $\left(l_k^*v,v\right)_0$, принимая во внимание (6) и используя неравенство Коши, приходим к оценке $\lambda_1^2|v|_0\leqslant\left|l_k^*v\right|_0$, справедливой для любого $k\geqslant1$. В силу теоремы 3.3

из [5, с. 107] она гарантирует существование слабого обобщенного решения $u_k \in L^2(0,L)$ краевой задачи (5), (6) для любой правой части $g_k \in L^2(0,L)$ ($k \geqslant 1$). Возвращаясь к интегральному тождеству (12), выводим, что полученное решение u_k обладает обобщенной производной $u_{kxxx} \in L^2(0,L)$ (а следовательно, и производными u_{kx}, $u_{kxx} \in L^2(0,L)$). Это означает, что $u_k \in W_2^3(0,L)$ удовлетворяет уравнению (5) почти всюду на $[0,L]$ и краевым условиям (6). Существование гладкого решения задачи (5), (6) доказано для любого $k \geqslant 1$.

Установим оценки норм этих решений через нормы правых частей g_k при $k \geqslant 1$. Преобразуя равенство $(l_k u_k, u_k)_0 = (g_k, u_k)_0$ с учетом (6) и неравенства Юнга, получим оценку

$$|u_k|_0^2 \leqslant C_5 \lambda_1^{-2} |g_k|_0^2, \quad k \geqslant 1. \tag{13}$$

Из равенства $-(l_k u_k, u_{kxxx})_0 = -(g_k, u_{kxxx})_0$, используя неравенство Юнга, выводим оценку

$$|u_{kxxx}|_0^2 \leqslant C_6 \mu^{-2} |g_k|_0^2, \quad k \geqslant 1. \tag{14}$$

В силу эквивалентности норм $\sum\limits_{j=0}^{3} \left|D_x^j u\right|_0$ и $|u|_0 + |u_{xxx}|_0$ в пространстве $W_2^3(0,L)$ (см. по этому поводу, например, теорему 3.26 из [6, с. 240]), имеем

$$\left|D_x^j u_k\right|_0^2 \leqslant C_7(1 + \mu^{-2}) |g_k|_0^2, \quad j = 1,2, \ k \geqslant 1. \tag{15}$$

Рассмотрим теперь цепочку

$$(l_k u_k, u_k)_0 = (g_k, u_k)_0 \leqslant \frac{1}{2}\left(|g_k|_0^2 + |u_k|_0^2\right) \leqslant C_8 |g_k|_0^2$$

(используется оценка (13)). Окончательно получаем

$$\lambda_k^2 |u_k|_0^2 \leqslant C_8 |g_k|_0^2, \quad k \geqslant 1. \tag{16}$$

Из равенства $\left(l_k u_k, \lambda_k^2 u_k\right)_0 = \left(g_k, \lambda_k^2 u_k\right)_0$ с учетом неравенства Коши устанавливаем следующую оценку:

$$\lambda_k^4 |u_k|_0^2 \leqslant C_9 |g_k|_0^2, \quad k \geqslant 1. \tag{17}$$

Преобразуя с учетом (6) равенство $-(l_k u_k, u_{kxx})_0 = -(g_k, u_{kxx})_0$, выводим, что

$$\lambda_k^2 |u_{kx}|_0^2 \leqslant \frac{1}{2} |g_k|_0^2 + |u_{kxx}|_0^2) \leqslant C_{10}(1 + \mu^{-2}) |g_k|_0^2$$

(используется оценка (15)). Окончательно имеем

$$\lambda_k^2 |u_{kx}|_0^2 \leqslant C_{10}(1 + \mu^{-2}) |g_k|_0^2, \quad k \geqslant 1. \tag{18}$$

Для получения очередной оценки рассмотрим равенство

$$\left(l_k u_k, \lambda_k^2 u_{kx}\right)_0 = \left(g_k, \lambda_k^2 u_{kx}\right)_0 = -\left(g_{kx}, \lambda_k^2 u_k\right)_0$$

(использовались свойства g_k). Преобразуя с учетом (6) левую часть, применяя к правой части неравенство Коши и используя оценку (17), имеем

$$\lambda_k^2 |u_{kxx}|_0^2 \leqslant C_{11} \mu^{-1} \left(|g_k|_0^2 + |g_{kx}|_0^2\right), \quad k \geqslant 1. \tag{19}$$

Поскольку $g_k \in W_2^1(0,L)$ при всех k, уравнения (5) допускают дифференцирование по x, причем $u_{kxxxx} \in L^2(0,L)$, а в силу условия периодичности g_k справедливы равенства $u_{kxxx}(0) = u_{kxxx}(L)$ ($k \geqslant 0$). Преобразуя левую часть равенства $(l_k u_{kx}, \lambda_k^2 u_{kx})_0 = (g_{kx}, \lambda_k^2 u_{kx})_0$ и используя неравенство Коши, приходим к оценке

$$\lambda_k^4 |u_{kx}|_0^2 \leqslant C_{12} |g_{kx}|_0^2, \quad k \geqslant 1. \tag{20}$$

Наконец, из равенства $-(l_k u_{kx}, u_{kxxxx})_0 = -(g_{kx}, u_{kxxxx})_0$, используя неравенство Юнга, выводим оценку

$$|u_{kxxxx}|_0^2 \leqslant C_{13} \mu^{-2} |g_{kx}|_0^2, \quad k \geqslant 1. \tag{21}$$

На основании оценок (11) и (13)–(21) стандартным образом обосновывается сходимость ряда $u(x,y) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k(x)\omega_k(y)$ в пространстве $H(Q)$ и тот факт, что эта функция является решением уравнения (4). Условие $\iint\limits_Q u\,dydx = 0$ выполняется в силу выбора $u_0(x)$, так как $\int\limits_0^L u_0\,dx = 0$. Кроме того, из (11), (13)–(21) следует окончательная оценка решения $u(x,y)$:

$$\|u\|_{H(Q)}^2 \leqslant C_1(1 + \mu^{-1} + \mu^{-2}) |\!|\!| g |\!|\!|^2.$$

Полученное решение единственно. Действительно, из равенства $[Lu, u_x]_0 = 0$ с учетом (6) выводим, что $u_{xx} = 0$, а значит, $u(x,y) = Ax + \varphi(y)$. В силу периодичности $A = 0$, принимая во внимание то, что $\varphi(y)$ есть решение задачи Неймана для уравнения $\Delta_y \varphi = 0$ с условием $\iint\limits_Q \varphi(y)\,dydx = 0$, имеем $\varphi \equiv 0$. Лемма 1 доказана.

Замечание 2. Нетрудно проверить, что введенная в пространстве $H(Q)$ норма эквивалентна норме $\|u\|_{H(Q)}^2 = \|u\|_2^2 + \|u_x\|_2^2 + \|u_{xxxx}\|_0^2$. Действительно, из оценок для эллиптических операторов с граничными данными, удовлетворяющими условиям Лопатинского (см. [6, с. 468]) следуют неравенства

$$\left\|D_x^j u\right\|_{L^2(0,L;W_2^2(D))} \leqslant C_{14}(D)\left(\left\|\Delta_y D_x^j u\right\|_{L^2(0,L;L^2(D))} + \left\|D_x^j u\right\|_{L^2(0,L;L^2(D))}\right),$$
$$j = 0, 1,$$

которые и устанавливают эквивалентность норм. На втором этапе доказательства мы будем пользоваться этим обстоятельством.

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv -\mu u_{xxx} - \Delta_y u = -v_x v_{xx} + f(x,y) \equiv g(v), \tag{22}$$

где $v(x,y) \in H(Q)$ — произвольная заданная функция такая, что $\iint\limits_Q v\,dydx = 0$. Лемма 1 гарантирует существование единственного решения $u \in H(Q)$ задачи (22), (2), (3) такого, что $\iint\limits_Q u\,dydx = 0$, если $g(v)$ удовлетворяет условиям этой леммы. Функция $f(x,y)$ такова по условию теоремы. Очевидно, что

$$\iint\limits_Q v_x v_{xx}\,dydx = 0, \qquad v_x v_{xx}|_{x=0} = v_x v_{xx}|_{x=L}$$

в силу выбора v. Осталось проверить, что $v_x v_{xx}$, $(v_x v_{xx})_x \in L^2(Q)$. Оценим соответствующие нормы:

$$\|v_x v_{xx}\|_0^2 = \iint\limits_Q v_x^2 v_{xx}^2\,dydx \leqslant \|v_x\|_{C(Q)}^2 \|v_{xx}\|_0^2$$
$$\leqslant C_{15}(Q) \|v_x\|_2^2 \|v_{xx}\|_0^2 \leqslant C_{15}(Q) \|v\|_{H(Q)}^4$$

(здесь мы воспользовались вложением $W_2^2(Q) \to C(\overline{Q})$). Наконец,

$$(v_x v_{xx})_x = v_x v_{xxx} + v_{xx}^2,$$

$$\|v_x v_{xxx}\|_0^2 = \iint_Q v_x^2 v_{xxx}^2\,dydx \leqslant \|v_x\|_{C(Q)}^2 \|v_{xxx}\|_0^2$$

$$\leqslant C_{15}(Q)\|v_x\|_2^2\|v_{xxx}\|_0^2 \leqslant C_{15}(Q)\|v\|_{H(Q)}^4,$$

$$\left\|v_{xx}^2\right\|_0^2 = \iint_Q v_{xx}^4\,dydx = \|v_{xx}\|_{L^4(Q)}^4 \leqslant C_{16}(Q)\|v_{xx}\|_1^4 \leqslant C_{16}\|v\|_{H(Q)}^4$$

(здесь использовано вложение $W_2^1(Q) \to L^4(Q)$).

Таким образом, существование единственного решения задачи (22), (2), (3) со свойствами, отмеченными в формулировке леммы 1, доказано. Это означает, что существует отображение $S : H(Q) \to H(Q)$, которое ставит в соответствие произвольной заданной функции $v(x,y) \in H(Q)$ такой, что $\iint_Q v\,dydx = 0$, единственное решение задачи (22), (2), (3) из пространства $H(Q)$ такое, что $\iint_Q u\,dydx = 0$.

Лемма 2. *Существуют положительные числа $\alpha(\mu,Q)$ и $R_0(\mu,Q)$ такие, что если $|\!|\!|f|\!|\!| < \alpha$, то отображение S переводит множество $\widetilde{B}_{\sqrt{R_0}}$ в себя и, действуя на этом множестве, является сжимающим.*

Доказательство. Воспользуемся оценкой леммы 1, справедливой для единственного решения задачи (22), (2), (3), а именно

$$\begin{aligned}\|u\|_{H(Q)}^2 &\leqslant C_1(1+\mu^{-1}+\mu^{-2})|\!|\!|g(v)|\!|\!|^2\\ &\leqslant C_{17}(1+\mu^{-1}+\mu^{-2})\left(|\!|\!|f|\!|\!|^2 + \|v_x v_{xx}\|_0^2 + \|v_x v_{xxx}\|_0^2 + \left\|v_{xx}^2\right\|_0^2\right)\\ &\leqslant C_{17}(1+\mu^{-1}+\mu^{-2})\left(|\!|\!|f|\!|\!|^2 + 2C_{15}\|v\|_{H(Q)}^4 + C_{16}\|v\|_{H(Q)}^4\right)\\ &\leqslant C_{17}(1+\mu^{-1}+\mu^{-2})|\!|\!|f|\!|\!|^2 + C_{18}(1+\mu^{-1}+\mu^{-2})R_0^2.\end{aligned}$$

При выводе этой оценки мы пользовались теми же соображениями, что и при проверке условий леммы 1 для функции $g(v)$, и тем, что положили $\|v\|_{H(Q)}^2 \leqslant R_0$, где $R_0 > 0$ пока произвольно.

Для доказательства первого утверждения леммы нужно найти $R_0 > 0$, удовлетворяющее неравенству

$$C_{17}(1+\mu^{-1}+\mu^{-2})|\!|\!|f|\!|\!|^2 + C_{18}(1+\mu^{-1}+\mu^{-2})R_0^2 \leqslant R_0. \tag{23}$$

Неравенство (23) эквивалентно неравенству

$$P(R_0) \equiv R_0^2 - \frac{\mu^2}{C_{18}(1+\mu+\mu^2)}R_0 + C_{19}|\!|\!|f|\!|\!|^2 \leqslant 0.$$

Для существования положительного решения этого неравенства необходимо и достаточно, чтобы дискриминант квадратного трехчлена $P(R_0)$ был положительным, ибо тогда по теореме Виета оба его корня положительны, а решения неравенства лежат в интервале $[R_{0-}, R_{0+}]$, где

$$R_{0\pm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu^2}{C_{18}(1+\mu+\mu^2)} \pm \sqrt{\frac{\mu^4}{C_{18}^2(1+\mu+\mu^2)^2} - 4C_{19}|\!|\!|f|\!|\!|^2}\right).$$

Выполнение неравенства

$$|\!|\!| f |\!|\!| < \frac{\mu^2}{2C_{18}\sqrt{C_{19}}(1+\mu+\mu^2)} \equiv \alpha_1(\mu)$$

обеспечивает выполнение вышеуказанного требования. В качестве искомого радиуса возьмем $\sqrt{R_{0^-}}$.

Теперь покажем, что оператор S является сжимающим на множестве $\widetilde{B}_{\sqrt{R_{0^-}}}$ (возможно, для этого придется уменьшить R_{0^-}). Пусть $v_1,\ v_2 \in \widetilde{B}_{\sqrt{R_{0^-}}}$ — произвольные функции, а $u_i = Sv_i$ $(i = 1, 2)$. Обозначим $u = u_1 - u_2$, $v = v_1 - v_2$. Рассмотрим разность $Lu_1 - Lu_2 = -v_{1x}v_{1xx} + v_{2x}v_{2xx}$. Добавляя к правой части величину $-v_{1x}v_{2xx}$ и вычитая ее же, получаем

$$Lu = -v_{1x}v_{xx} - v_{2xx}v_x. \tag{24}$$

Заметим, что $u(x, y) \in H(Q)$ является единственным решением задачи (24), (2), (3) в силу леммы 1, так как $\iint\limits_Q u\,dydx = 0$, и в силу этой же леммы справедлива оценка

$$\|u\|^2_{H(Q)} \leqslant 2C_1(1+\mu^{-1}+\mu^{-2})(|\!|\!| v_{1x}v_{xx} |\!|\!|^2 + |\!|\!| v_{2xx}v_x |\!|\!|^2).$$

Обозначим $2C_1(1+\mu^{-1}+\mu^{-2})$ через $\widetilde{C}_1(\mu)$ и оценим правую часть последнего неравенства. При этом мы не будем проводить подробные рассуждения, поскольку аналогичные им уже встречались ранее.

Итак,

$$\begin{aligned}
|\!|\!| v_{1x}v_{xx} |\!|\!|^2 &\leqslant \|v_{1x}v_{xx}\|_0^2 + 2\|v_{1x}v_{xxx}\|_0^2 + 2\|v_{1xx}v_{xx}\|_0^2 \\
&\leqslant C_{15}R_{0^-}\|v_{xx}\|_0^2 + 2C_{15}R_{0^-}\|v_{xxx}\|_0^2 + 2\iint\limits_Q v_{1xx}^2 v_{xx}^2\,dydx \\
&\leqslant C_{20}R_{0^-}\|v\|^2_{H(Q)} + 2\|v_{1xx}\|^2_{L^4(Q)}\|v_{xx}\|^2_{L^4(Q)} \\
&\leqslant C_{20}R_{0^-}\|v\|^2_{H(Q)} + 2C_{16}R_{0^-}\|v_{xx}\|_1^2 \leqslant C_{21}R_{0^-}\|v\|^2_{H(Q)}.
\end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
|\!|\!| v_{2xx}v_x |\!|\!|^2 &\leqslant \|v_{2xx}v_x\|_0^2 + 2\|v_{2xxx}v_x\|_0^2 + 2\|v_{2xx}v_{xx}\|_0^2 \\
&\leqslant R_{0^-}\|v_x\|^2_{C(Q)} + 2R_{0^-}\|v_x\|^2_{C(Q)} + 2C_{16}R_{0^-}\|v_{xx}\|^2_{L^4(Q)} \\
&\leqslant 3C_{15}R_{0^-}\|v\|^2_{H(Q)} + C_{22}R_{0^-}\|v\|^2_{H(Q)} \leqslant C_{23}R_{0^-}\|v\|^2_{H(Q)}.
\end{aligned}$$

Складывая полученные неравенства, получаем

$$\|u\|^2_{H(Q)} \leqslant \widetilde{C}_1(\mu)C_{24}R_{0^-}\|v\|^2_{H(Q)}.$$

Возвращаясь к формуле для корней трехчлена $P(R_0)$, заметим, что существует $\alpha_2(\mu, Q) > 0$ такое, что при $|\!|\!| f |\!|\!| < \alpha_2$ выполнено неравенство $\widetilde{C}_1(\mu)C_{24}R_{0^-} \equiv q < 1$. Значит, при $|\!|\!| f |\!|\!| < \alpha(\mu, Q) = \min(\alpha_1, \alpha_2)$ отображение S действует из $\widetilde{B}_{\sqrt{R_{0^-}}}$ в $\widetilde{B}_{\sqrt{R_{0^-}}}$ и является сжимающим на этом множестве. Лемма 2 доказана.

Осталось заметить, что множество $\widetilde{B}_{\sqrt{R_{0^-}}}$ является полным метрическим пространством как замкнутое подмножество замкнутого шара $\|z\|_{H(Q)} \leqslant \sqrt{R_{0^-}}$ в банаховом пространстве $H(Q)$. Значит, у оператора S есть неподвижная точка, которая очевидным образом является решением задачи (1)–(3) из пространства $H(Q)$, причем $\iint\limits_Q u\,dydx = 0$.

Можно решать задачу (1)–(3) методом последовательных приближений с начальной функцией $u^0 \equiv 0$.

Решение задачи (1)–(3) в классе функций $\widetilde{B}_{\sqrt{R_{0^-}}}$ единственно. Это доказывается точно так же, как и сжимаемость. Заметим, что требование $\iint\limits_Q u\,dydx = 0$ существенно для единственности решения в шаре сколь угодно малого радиуса, ибо если от него отказаться, то, например, при $f \equiv 0$ любая константа, попадающая в этот шар, будет решением задачи (1)–(3) из пространства $H(Q)$.

И, наконец, последнее замечание. Для упрощения выкладок можно было с самого начала положить $\mu = 1$, но нам представлялось существенным проследить конкретную зависимость тех ограничений, которые мы накладываем на правую часть $f(x,y)$, от параметра $\mu > 0$, характеризующего вязкость. Так, при $\mu \to 0$ имеем $\alpha(\mu) \to 0$ и $R_{0^-}(\mu) \to 0$, и совершенно очевидно, как это обстоятельство отражается на том классе правых частей $f(x,y)$, где рассматриваемая задача разрешима в рамках нашего метода. При $\mu \to \infty$ имеем $\alpha(\mu) \to C_{1\infty}(Q)$ и $R_{0^-}(\mu) \to C_{2\infty}(Q)$, где $C_{i\infty} > 0$ — конечные величины, возможно, выражающие некоторые «предельные» свойства рассматриваемой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рыжов О. С.* Асимптотическая картина обтекания тел вращения трансзвуковым потоком вязкого и теплопроводящего газа // Прикл. математика и механика. 1965. Т. 29, вып. 6. С. 1004–1014.
2. *Рыжов О. С.* О собственно трансзвуковом режиме в течениях реагирующей смеси // Проблемы математики и механики. М.: Наука, 1971. С. 199–210.
3. *Ларькин Н. А.* Гладкие решения уравнений трансзвуковой газодинамики. Новосибирск: Наука, 1991.
4. *Лиесперов В. Н., Ломакин А. А.* Об асимптотических свойствах решения одной краевой задачи // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1976. Т. 16, № 2. С. 470–481.
5. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наук. думка, 1965.
6. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977.

г. Новосибирск *Статья поступила 14 сентября 1995 г.*