Труды Математического института АН СССР
1979, том 150

В. И. БУРЕНКОВ, М. Л. ГОЛЬДМАН

О ПРОДОЛЖЕНИИ ФУНКЦИЙ ИЗ L_p

ВВЕДЕНИЕ

Обозначим через R^n — евклидово пространство размерности $n \geqslant 2$; $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — точки этого пространства, R^m — его m-мерное подпространство ($1 \leqslant m < n$), т. е. множество точек вида (u, o), $u = (x_1, \ldots, x_m)$. Известна теорема о следах для анизотропных классов С. М. Никольского и О. В. Бесова (см. книгу С. М. Никольского [1])

$$B^r_{p,\theta}(R^n) \rightleftarrows B^\rho_{p,\theta}(R^m) \qquad (1 \leqslant p, \theta \leqslant \infty),$$

$$r = (r_1, \ldots, r_n),\ r_i > 0\ (i = 1, \ldots, n);\ \rho = (\rho_1, \ldots, \rho_m),\ \rho_j = r_j\left(1 - \frac{1}{p}\sum_{i=m+1}^{n}\frac{1}{r_i}\right) > 0$$

($j = 1, \ldots, m$). Последнее условие существенно, так как если $1 \leqslant \frac{1}{p}\sum_{i=m+1}^{n}\frac{1}{r_i}$, то оператор следа не будет ограничен даже в слабом смысле (см. [1, с. 460—462]). Исключительным является случай $\theta = 1$, в котором при $p = \sum_{i=m+1}^{n}\frac{1}{r_i}$ функции из $B^r_{p,1}(R^n)$ все же имеют следы на R^m, принадлежащие $L_p(R^m)$ (см., например, [2, п. 16.14]). Мы будем рассматривать еще «нулевой класс» $B^{0,r}_{\infty,1}(R^n)$ (определение см. ниже), который содержится в $C(R^n)$ — пространстве ограниченных равномерно непрерывных функций. Функции из $B^{0,r}_{\infty,1}(R^n)$ заведомо имеют следы из $C(R^m)$.

В данной работе показано, что при $p = \sum_{i=m+1}^{n}\frac{1}{r_i}$ пространство следов на R^m для функций из класса $B^r_{p,1}(R^n)$ ($1 \leqslant p < \infty$) совпадает с $L_p(R^m)$, а для функций из класса $B^{0,r}_{\infty,1}(R^n)$ с $C(R^m)$. Для того чтобы доказать это, достаточно, в силу сказанного выше, построить ограниченный оператор продолжения из $L_p(R^m)$ в $B^r_{p,1}(R^n)$ (соответственно, из $C(R^m)$ в $B^{0,r}_{\infty,1}(R^n)$). При этом оператор продолжения оказывается нелинейным. Если строить продолжение из $L_p(R^m)$ в более широкий класс $B^r_{p,\theta}(R^n)$ при $\theta > 1$ (соответственно, из $C(R^m)$ в $B^{0,r}_{\infty,\theta}(R^n)$, $\theta > 1$), то можно сделать оператор продолжения линейным.

Перейдем к точным формулировкам. Существует ряд эквивалентных между собой определений пространства $B^r_{p,\theta}(R^n)$. Мы будем использовать следующие два (см., например, [1]).

1) Пусть $r = (r_1, \ldots, r_n) > 0$; $x \in R^n$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in R^n$ — двойственные в смысле преобразования Фурье в R^n; $1 \leqslant p, \theta \leqslant \infty$;

$$P_s = \{\xi \in R^n : |\xi_i| \leqslant 2^{s/r_i}, \quad i = 1, \ldots, n\} \ (s = 0,1, \ldots), \tag{1}$$

$\Gamma_0 = P_0$; $\Gamma_s = P_{s+1} \setminus P_{s-1}$ $(s = 1, 2, \ldots)$ — соответствующие «коридоры». Тогда $F(x) \in B^r_{p,\theta}(R^n)$, если ее можно разложить в ряд

$$(Q): \qquad F(x) = \sum_{s=0}^{\infty} Q_s(x), \tag{2}$$

где $Q_s(x)$ — целые функции, имеющие спектр, сосредоточенный в Γ_s $(s = 0, 1, \ldots)$ и конечна величина

$$|F|_{(Q)} = \Big\{ \sum_{s=0}^{\infty} (2^s \| Q_s \|_{L_p(R^n)})^\theta \Big\}^{\frac{1}{\theta}}. \tag{3}$$

Норма в $B^r_{p,\theta}(R^n)$ определяется соотношением

$$\| F \|_{B^r_{p,\theta}(R^n)} = \inf_Q |F|_{(Q)}.$$

При условии (3) ряд (2) сходится к $F(x)$ абсолютно в норме $L_p(R^n)$.

Определение соответствующего нулевого класса $B^{0,r}_{p,\theta}(R^n)$ отличается тем, что в условии (3) множитель 2^s надо заменить на 1 $(s = 0,1, \ldots)$. При этом ряд (2) сходится к $f(x)$, вообще говоря, слабо. Впрочем, при $\theta = 1$ эта сходимость уже абсолютная по норме $L_p(R^n)$ (при $p = \infty$ — абсолютная и равномерная). Отсюда, в частности, следует, что пространство $B^{0,r}_{\infty,1}(R^n)$ вложено в $C(R^n)$.

2) $F(x) \in B^r_{p,\theta}(R^n)$, если конечна норма

$$\| F \|_{B^r_{p,\theta}(R^n)} = \| F \|_{L_p(R^n)} + \sum_{i=1}^{n} \| F \|_{b^{r_i}_{p,\theta,i}(R^n)}, \tag{4}$$

где

$$\| F \|_{b^{r_i}_{p,\theta,i}(R^n)} = \Big(\int_0^\infty \| \Delta^{\sigma_i}_{h,i} D^{m_i}_i F \|^\theta_{L_p(R^n)} h^{-1-\theta(r_i - m_i)} dh \Big)^{\frac{1}{\theta}},$$

причем $\sigma_i + m_i > r_i > m_i$; $\sigma_i, m_i \geqslant 0$ — целые числа, $\Delta^{\sigma_i}_{h,i}$ — разность порядка σ_i с шагом h по переменной x_i, $D^{m_i}_i F$ — обобщенная в смысле С. Л. Соболева производная порядка m_i по x_i $(i = 1, \ldots, n)$; при различных указанных m_i и σ_i нормы (4) эквивалентны.

Цель работы состоит в доказательстве следующего утверждения.

Теорема 1. *Пусть $1 \leqslant m < n$ — целые числа, $r_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.*

I. *Если выполнено условие*

$$\frac{1}{p} \sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{r_i} = 1 \qquad (1 \leqslant p < \infty) \tag{5}$$

(*остальные числа $r_i > 0$, $i = 1, \ldots, m$ — произвольны*), *то*

1) *существует нелинейный ограниченный оператор продолжения*

$$T : L_p(R^m) \to B^r_{p,1}(R^n) \qquad (1 \leqslant p < \infty); \tag{6}$$

2) *существует линейный ограниченный оператор продолжения*

$$T : L_p(R^m) \to B^r_{p,\theta}(R^n) \qquad (1 \leqslant p < \infty, \ \theta > 1).$$

II. *При любых* $r_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ *существует нелинейный ограниченный оператор продолжения*

$$T : C(R^m) \to B^{0,r}_{\infty,1}(R^n).$$

Если справа вместо $B^{0,r}_{\infty,1}(R^n)$ *поставить* $B^{0,r}_{\infty,\theta}(R^n)$, $\theta > 1$, *то оператор* T *можно сделать линейным.*

Отметим еще вложение $B^r_{p,\theta}(R^n) \to W^r_p(R^n)$ (в пространство Соболева, см. [2, § 18.9]), справедливое при натуральных $r_1, \ldots, r_n$, $1 \leqslant p < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \min(2, p)$. В силу этого вложения при выполнении условия (5) ограничен оператор продолжения (при $p > 1$ он также линеен)

$$T : L_p(R^m) \to W^r_p(R^n).$$

Впервые результат о продолжении из $L_p(R^m)$ был получен Гальярдо [3], который построил нелинейный оператор $T : L_1(R^{n-1}) \to W'_1(R^n)$ (этот результат приведен также в книге [2, § 18.14]). С. В. Успенский [4] построил линейный оператор $T : L_2(R^{n-1}) \to W^{1/2}_2(R^n)$, а Я. С. Бугров [5] — линейный оператор $T : L_p(R^m) \to B^{(n-m)/p}_{p,\infty}(R^n)$ (в этих результатах рассмотрены изотропные классы). Сформулированная теорема содержит в себе эти результаты.

Ниже будут приведены два различных способа доказательства теоремы. В § 1 для построения оператора продолжения использован метод разложения функции $f \in L_p(R^m)$ в ряд по целым функциям с последующим продолжением каждого члена ряда. Этот метод берет свое начало в работах С. М. Никольского (см., например, книгу [1]) и был применен М. Л. Гольдманом [6] для изучения обобщенных гельдеровых классов.

В § 2 для построения оператора продолжения с R^m на R^n использован метод усреднений с переменным шагом, развитый В. И. Буренковым в работе [7] для продолжения с n-мерной области на R^n, при этом, как и в методе Гальярдо [3], используется последовательность усреднений функции $f \in L_p(R^n)$ с выбранными в зависимости от f радиусами усреднения.

Условия теоремы 1 оставляют открытым вопрос о возможности построения линейного ограниченного оператора продолжения вида (6). Рассмотрению этого вопроса посвящен § 3. В нем показано, что нелинейность оператора продолжения (6) вызвана существом дела и что не существует линейного ограниченного оператора продолжения вида (6) (см. теорему 2). Итак, всякую функцию из $L_p(R^m)$ можно продолжить до функции из класса $B^r_{p\theta}(R^n)$ $\left(1 \leqslant p < \infty,\ p = \sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{r_i}, \theta > 1\right)$ линейным образом, а до функции из более узкого класса $B^r_{p1}(R^n)$ только нелинейным образом.

В § 3 получен также переход к периодическим классам в приведенных выше результатах.

Во время подготовки статьи к печати из сообщений проф. Трибеля авторам стало известно, что для функций из $B^{1/p}_{p1}(R^n)$ (изотропный случай, $1 < p < \infty$) совпадение пространства следов на R^{n-1} с $L_p(R^{n-1})$ доказано независимо Петре, однако этот результат к настоящему времени не опубликован.

§ 1. ПРОДОЛЖЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

Оператор продолжения T, существование которого утверждается в теореме, строится здесь с помощью разложения произвольной функции $f(u) \in L_p(R^m)$ в ряд по целым функциям экспоненциального типа и последующего продолжения каждого члена ряда с R^m на R^n. Во многих местах рассуждения проходят одинаково при $1 \leqslant p < \infty$ и при $p = \infty$. В этих местах мы будем считать, что $L_p(R^m)$ при $p = \infty$ означает пространство $C(R^m)$ ограниченных равномерно непрерывных функций на R^m с нормой

$$\|f\|_{L_\infty(R^m)} = \|f\|_{C(R^m)} = \sup_{u \in R^m} |f(u)|.$$

Построение будет проведено в два этапа.

1°. Пусть $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$; задана последовательность $\{\lambda_s\}$ $(s=0, 1, \ldots)$, удовлетворяющая условиям

$$0 < \lambda_s \leqslant \lambda_{s+1} \quad (s = 0, 1, \ldots); \quad \lim_{s \to \infty} \lambda_s = \infty. \tag{1}$$

Покажем, что *всякую функцию* $f(u) \in L_p(R^m)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty$, *напомним, что здесь* $L_\infty = C$) *можно разложить в ряд*

$$f(u) = \sum_{s=0}^{\infty} q_s(u), \tag{2}$$

сходящийся к $f(u)$ *в* $L_p(R^m)$, *члены которого* $q_s(u)$ *являются целыми функциями экспоненциального типа* λ_s *по всем* x_j $(j = 1, \ldots, m)$, *причем*

$$\left\{\sum_{s=0}^{\infty} \|q_s\|^\theta_{L_p(R^m)}\right\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant c\|f\|_{L_p(R^m)} \quad (1 \leqslant p, \theta \leqslant \infty), \tag{3}$$

где $c > 0$ *не зависит от функции* f.

Из построения будет видно, что при $\theta = 1$ члены ряда (2) зависят от функции $f(u)$ нелинейно, а при $\theta > 1$ — линейно.

1. Сначала проведем построение при $\theta = 1$.

Обозначим через $\Omega(f, \delta)_p$ модуль непрерывности функции $f(u)$ в $L_p(R^m)$, т. е. функцию

$$\Omega(f, \delta)_p = \sup_{|h| \leqslant \delta} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_{L_p(R^m)} \quad (\delta > 0,\ 1 \leqslant p \leqslant \infty).$$

По известным свойствам модуля непрерывности (см. [1])

$$\lim_{\delta \to +0} \Omega(f, \delta)_p = 0 \quad (1 \leqslant p \leqslant \infty,\ L_\infty = C). \tag{4}$$

Выберем последовательность $s(i)$ целых чисел $s=0, 1, \ldots, s(0)=0, s(i+1) \geqslant s(i) + 1$ столь редкой, чтобы для $\nu_i = \lambda_{s(i)}$ выполнялись неравенства

$$\Omega(f, \nu_i^{-1})_p \leqslant 2^{-i}\|f\|_{L_p(R^m)}. \tag{5}$$

Возможность такого выбора следует из (1) и (4), но при этом последовательность $\{\nu_i\}$ зависит от f. Для последовательности $\{\nu_i\}$ выберем целые функции $G_i(u)$ экспоненциального типа ν_i по всем x_j $(j = 1, \ldots, m)$ так, чтобы

$$\begin{gathered} \|G_0\|_{L_p(R^m)} \leqslant c\|f\|_{L_p(R^m)}, \\ \|f - G_i\|_{L_p(R^m)} \leqslant c\Omega(f, \nu_i^{-1})_p \quad (i = 1, 2, \ldots). \end{gathered} \tag{6}$$

Это можно сделать в силу прямой теоремы теории приближений [1, 5. 2. 1]. Здесь c не зависит от $f(u)$. Тогда из (5) получим

$$\| f - G_i \|_{L_p(R^m)} \leqslant c 2^{-i} \| f \|_{L_p(R^m)} \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

Обозначим теперь $g_i(u) = G_i(u) - G_{i-1}(u)$ $(i=1, 2, \ldots)$, $g_0(u) = G_0(u)$. Из представления

$$g_i(u) = (G_i(u) - f(u)) + (f(u) - G_{i-1}(u)), \quad i = 1, 2, \ldots,$$

из оценки (7) и неравенства (6) легко следует, что

$$\| g_i \|_{L_p(R^m)} \leqslant c_1 2^{-i} \| f \|_{L_p(R^m)} \qquad (i = 0, 1, \ldots;\ 1 \leqslant p \leqslant \infty) \tag{8}$$

с постоянной c, не зависящей от i и f.

Справедливо разложение

$$f(u) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i(u). \tag{9}$$

Сходимость ряда (9) в $L_p(R^m)$ следует из (8), при этом сумма в силу оценки (7) совпадает с $f(u)$. Отметим, что $g_i(u)$ — целые функции экспоненциального типа ν_i по всем x_j, они зависят от $f(u)$ нелинейно (изменение f меняет последовательность $\{\nu_i\}$).

Далее, для каждого целого числа $s \geqslant 0$ найдется $i \geqslant 0$ такое, что $s(i) \leqslant \leqslant s \leqslant s(i+1) - 1$. При этих соотношениях положим

$$q_s(u) = \mu_i g_i(u), \tag{10}$$

где

$$\mu_i = \frac{1}{s(i+1) - s(i)}. \tag{11}$$

Тогда, очевидно,

$$\sum_{s=s(i)}^{s(i+1)-1} q_s(u) = g_i(u), \tag{12}$$

$$\sum_{s=s(i)}^{s(i+1)-1} \| q_s \|_{L_p(R^m)} = \| g_i \|_{L_p(R^m)}. \tag{13}$$

Следовательно, с учетом разложения (9), получим

$$f(u) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{s=s(i)}^{s(i+1)-1} q_s(u) = \sum_{s=0}^{\infty} q_s(u), \tag{14}$$

причем в силу оценки (8)

$$\sum_{s=0}^{\infty} \| q_s \|_{L_p(R^m)} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{s=s(i)}^{s(i+1)-1} \| q_s \|_{L_p(R^m)} = \sum_{i=0}^{\infty} \| g_i \|_{L_p(R^m)} \leqslant c_2 \| f \|_{L_p(R^m)},$$

где c_2 не зависит от f. Последняя оценка показывает, что ряды в правой части (14) сходятся абсолютно по норме $L_p(R^m)$, так что равенство (14) справедливо в $L_p(R^m)$.

Наконец, из определения (10) $(s(i) \leqslant s \leqslant s(i+1) - 1)$ и свойств $g_i(u)$ следует, что $q_s(u)$ — целые функции экспоненциального типа $\nu_i = \lambda_{s(i)}$ по всем x_j, т. е. заведомо типа λ_s по всем x_j. Соотношения (2), (3) тем самым доказаны при $\theta = 1$.

2. Проведем теперь построение при $\theta > 1$. В качестве подпоследовательности $s(i)$ выберем $s(i) = 2^i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, $s(0) = 0$ и положим $\nu_i = \lambda_{s(i)} \to \infty$ $(i \to \infty)$. Здесь уже последовательность $\{\nu_i\}$ не зависит от f. Выберем, как и выше, функции $G_i(u)$ с условиями (6). Отметим, что эти функции зависят от f линейно, причем в силу (6), справедливы соотношения

$$\| G_i \|_{L_p(R^m)} \leqslant c \| f \|_{L_p(R^m)} \qquad (i = 0, 1, \ldots), \tag{15}$$

$$\| G_i - f \|_{L_p(R^m)} \to 0 \qquad (i \to \infty), \tag{16}$$

где $c > 0$ не зависит от f.

Введя $g_i(u)$, как и выше, получим, в силу (15) — (16) соотношения

$$\| g_i \|_{L_p(R^m)} \leqslant 2c \| f \|_{L_p(R^m)} \qquad (i = 0, 1, \ldots), \tag{17}$$

$$\| g_i \|_{L_p(R^m)} \to 0 \qquad (i \to \infty) \tag{18}$$

(аналогичное рассуждение проведено при выводе (8)). Функции g_i зависят от f линейно и справедливо разложение (9).

Как и выше, получим соотношения (10) — (14) (сейчас $s(i) = 2^i$). Нужно только обосновать сходимость ряда в правой части (14), поскольку теперь абсолютная его сходимость в $L_p(R^m)$ ниоткуда не следует. Пусть $\nu \geqslant 1$, число i_ν определено из условий $2^{i_\nu} \leqslant \nu \leqslant 2^{i_\nu+1} - 1$. Частичную сумму ряда в правой части (14) можно записать в виде

$$S_\nu = \sum_{s=0}^{\nu} q_s(u) = \sum_{i=0}^{i_\nu - 1} \sum_{s=2^i}^{2^{i+1}-1} q_s(u) + \sum_{s=2^{i_\nu}}^{\nu} q_s(u) = G_{i_\nu - 1}(u) + \sum_{s=2^{i_\nu}}^{\nu} q_s(u).$$

Следовательно, в силу (16), (13) и (18),

$$\| S_\nu - f \|_{L_p(R^m)} \leqslant \| G_{i_\nu - 1} - f \|_{L_p(R^m)} + \sum_{s=2^{i_\nu}}^{2^{i_\nu+1}-1} \| q_s \|_{L_p(R^m)} \to 0 \qquad (\nu \to \infty),$$

что показывает сходимость ряда (14) в $L_p(R^m)$. Его члены $q_s(u)$ зависят от f линейно.

Справедливо соотношение (см. (10) — (11)) при $s(i) = 2^i$

$$\sum_{s=2^i}^{2^{i+1}-1} \| q_s \|^\theta_{L_p(R^m)} = \mu_i^\theta \| g_i \|^\theta_{L_p(R^m)} (2^{i+1} - 2^i) = 2^{-i(\theta-1)} \| g_i \|^\theta_{L_p(R^m)},$$

из которого с учетом неравенства (17) и условия $\theta > 1$ следует (3), с постоянной, зависящей от θ.

Итак, справедливы соотношения (2) — (3), причем $q_s(u)$, являясь, как и выше, целыми функциями экспоненциального типа λ_s по всем x_j, теперь зависят от f линейно. Первый этап построения завершен.

2°. Пусть $1 \leqslant m < n$; $x = (u, v) \in R^n$, где $u = (x_1, \ldots, x_m) \in R^m$, $v = (x_{m+1}, \ldots, x_n) \in R^{n-m}$; пусть $r = (r_1, \ldots, r_n)$ — вектор с положительными компонентами, удовлетворяющий при $1 \leqslant p < \infty$ условию теоремы $\frac{1}{p} \sum_{j=m+1}^{n} \frac{1}{r_j} = 1$ (при $p = \infty$ такое условие не накладывается).

Рассмотрим разложение (2) *функции* $f(u) \in L_p(R^m)$, *отвечающее последовательности* $\lambda_s = 2^{s/r_0}$, $s = 0, 1, \ldots$; $r_0 = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} r_k > 0$, *и построим по нему*

функцию $F(u, v)$, след которой на R^m совпадает с $f(u)$, причем $F(u; v)$ линейно зависит от f при $\theta > 1$ и справедливы оценки

$$\| F \|_{B^r_{p\theta}(R^n)} \leqslant c \| f \|_{L_p(R^m)} \qquad (1 \leqslant p < \infty; \quad 1 \leqslant \theta \leqslant \infty), \tag{19}$$

$$\| F \|_{B^{0,r}_{\infty\theta}(R^n)} \leqslant c \| f \|_{C(R^m)} \qquad (p = \infty; \quad 1 \leqslant \theta \leqslant \infty), \tag{20}$$

в которых c не зависит от f.

Будем строить функцию $F(u, v)$ в виде

$$F(u, v) = \sum_{s=0}^{\infty} q_s(u) \psi_s(v) \equiv \sum_{s=0}^{\infty} Q_s(u, v). \tag{21}$$

Здесь

$$\psi_s(v) = \prod_{j=m+1}^{n} g(2^{s/r_j} x_j), \tag{22}$$

где $g(t)$ — целая функция экспоненциального типа 1 из $L_1(R^1) \cap L_p(R^1)$ и удовлетворяющая, кроме того, условиям

$$|g(t)| \leqslant g(0) = 1 \qquad (t \in R^1),$$

причем ее преобразование Фурье в R^1

$$\tilde{g}(\lambda) \equiv 0 \text{ при } |\lambda| \leqslant 2^{-1/r_0}, \quad r_0 = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} r_k > 0. \tag{23}$$

1. Покажем сначала, что $f(u)$ является следом функции $F(u, v)$ на R^m (при $v = 0$) в смысле определения [1, с. 281]. Рассмотрим случай $\theta = 1$, когда $F(u, v)$ зависит от $f(u)$ нелинейно.

Так как $|\psi_s(v)| \leqslant 1$, то с учетом (3) при $\theta = 1$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \| q_s(\cdot) \psi_s(v) \|_{L_p(R^m)} \leqslant \sum_{s=0}^{\infty} \| q_s \|_{L_p(R^m)} < \infty,$$

т. е. ряд (21) сходится при каждом $v \in R^{n-m}$ в $L_p(R^m)$ по u, и его сумма, обозначенная $F(u, v)$, принадлежит $L_p(R^m)$ по u. Кроме того, $\psi_s(0) = 1$ и, положив в (19) $v = 0$, получим

$$F(u, 0) = \sum_{s=0}^{\infty} q_s(u) = f(u)$$

почти всюду в R^m.

Из условия $\psi_s(v) \to \psi_s(0)$ $(v \to 0)$ неравенства $|\psi_s(v)| \leqslant 1$ и соотношения (3) при $\theta = 1$ легко следует, что

$$\| F(\cdot, v) - f(\cdot) \|_{L_p(R^m)} \to 0 \qquad (v \to 0).$$

Эти соотношения и требуются в определении следа.

Подобные рассуждения при $\theta > 1$ осложняются тем, что условие (3) уже не обеспечивает абсолютной сходимости ряда (2) в $L_p(R^m)$. Но при $\theta > 1$ оператор продолжения

$$T[f(u)] = F(u, v)$$

(см. (19)) линеен, и доказательство его ограниченности можно провести на всюду плотном в $L_p(R^m)$ (при $p = \infty$ в $C(R^m)$) множестве гладких функций $f(u)$, для которых абсолютная сходимость разложения (2) не вызывает сомнений.

2. Покажем теперь, что $F(u, v) \in B^r_{p\theta}(R^n)$. Справедлива оценка

$$\|\psi_s\|_{L_p(R^{n-m})} \leqslant c2^{-\varkappa s} \quad \left(\varkappa = \frac{1}{p}\sum_{j=m+1}^{n}\frac{1}{r_j},\ 1 \leqslant p \leqslant \infty,\ s = 0, 1, \ldots\right),$$

вытекающая из явного вида $\psi_s(v)$.

В силу условий теоремы при $1 \leqslant p < \infty$ $\varkappa = 1$, а при $p = \infty$ $\varkappa = 0$. Итак, при $1 \leqslant p < \infty$

$$\|Q_s\|_{L_p(R^n)} = \|q_s\|_{L_p(R^m)}\|\psi_s\|_{L_p(R^{n-m})} \leqslant c2^{-s}\|q_s\|_{L_p(R^m)}.$$

Отсюда в силу оценки (3) следует, что

$$|F|_{(Q)} = \left(\sum_{s=0}^{\infty}(2^s\|Q_s\|_{L_p(R^n)})^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} \leqslant c\|f\|_{L_p(R^m)} \qquad (1 \leqslant p < \infty), \tag{24}$$

где $c > 0$ не зависит от f.

Аналогично, при $p = \infty$

$$|F|_{(Q)} = \left\{\sum_{s=0}^{\infty}\|Q_s\|^\theta_{C(R^n)}\right\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant c\|f\|_{C(R^m)} \qquad (1 \leqslant \theta \leqslant \infty). \tag{25}$$

Из (24) и из (25) при $\theta = 1$ следует сходимость ряда (21) в $L_p(R^n)$. По доказанному выше, он сходится также к $F(u, v)$ при каждом $v \in R^{n-m}$ в $L_p(R^m)$. Следовательно, его сумма в смысле сходимости в $L_p(R^n)$ совпадает с $F(u, v)$ почти всюду в R^n (см. [1, 1.3.9]). При $\theta > 1$ мы могли ограничиться гладкими функциями, для которых этот факт не нуждается в обосновании (см. проведенное ранее рассуждение).

Чтобы убедиться, что $F \in B^r_{p,\theta}(R^n)$ (соответственно, $F \in B^{0,r}_{\infty,\theta}(R^n)$ при $p = \infty$), и получить из (24) и (25) оценки (19) и (20), нам осталось проверить соотношение $\operatorname{supp}\widetilde{Q}_s \in \Gamma_s$ (см. определение B-класса во введении; здесь $\widetilde{Q}_s(\xi)$ — преобразование Фурье $Q_s(x)$ в R^n). Отметим, что $Q_s(u, v) = q_s(u)\psi_s(v)$ является целой функцией степени $2^{s/r_0} \leqslant 2^{s/r_j}$ по x_j ($j = 1, \ldots, m$) и степени $2^{s/r_j}$ по x_j ($j = m+1, \ldots, n$) (см. формулировку п. 1° и (22)), т. е. $\operatorname{supp}\widetilde{Q}_s \subset P_s$ ($s = 0, 1, \ldots$) (см. формулу (1) введения). Кроме того, при $s = 1, 2, \ldots$ в силу (22) и (23) $\widetilde{Q}_s(\xi) \equiv 0$ при $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $|\xi_j| \leqslant 2^{s/r_j - 1/r_0}$ (хотя бы при одном j: $m+1 \leqslant j \leqslant n$), т. е. заведомо $\widetilde{Q}_s(\xi) \equiv 0$ при $\xi \in P_{s-1}$. Итак, $\operatorname{supp}\widetilde{Q}_s \subset \Gamma_s$ и тем самым построение второго этапа завершено.

Из результатов первого и второго этапа непосредственно вытекают утверждения теоремы 1.

§ 2. ПРОДОЛЖЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ УСРЕДНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМ ШАГОМ

1°. В этом параграфе будет построен нелинейный ограниченный оператор продолжения $T: L_p(R^m) \to B^r_{p1}(R^n)$, $1 \leqslant p < \infty$, причем сначала будет рассмотрен случай $m = n - 1$. Условие (5) из введения примет при этом вид: $r_n = 1/p$; $r_i > 0$, $i = 1, \ldots, n-1$ произвольны. Используя метод построения оператора продолжения, использованный в [7] для продолжения функций с n-мерной области на R^n, положим

$$(Tf)(u, v) = \sum_{k=1}^{\infty}\psi_k(v)f_k(u), \tag{1}$$

где $x = (u, v)$, $u = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, $v = x_n$; $\psi_k(v)$, $k = 1, 2, \ldots$ — разбиение единицы, а $f_k(u)$ — некоторое усреднение функции f.

2°. Так как модуль непрерывности $\Omega(f, \delta)_p \to 0$ при $\delta \to +0$ (см. обозначения в § 1), то можно выбрать такие числа $\delta_k > 0$, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Omega(f, n\delta_k)_p \leqslant \| f \|_{L_p(R^{n-1})}). \tag{2}$$

Выберем в (1)

$$f_k(u) = \int_{R^{n-1}} f(u - \delta_k z)\, \omega(z)\, dz = \delta_k^{-n+1} \int_{R^{n-1}} \omega\left(\frac{u-y}{\delta_k}\right) f(y)\, dy, \tag{3}$$

где $(u - \delta_k z) = (u_1 - \delta_k z_1, \ldots, u_{n-1} - \delta_k z_{n-1})$, $\left(\frac{u-y}{\delta_k}\right) = \left(\frac{u_1 - y_1}{\delta_k}, \ldots, \frac{u_{n-1} - y_{n-1}}{\delta_k}\right)$, а $\omega(z)$ — некоторое ядро усреднения, удовлетворяющее условиям $\omega(z) \geqslant 0$, $\overline{\omega(z)} \in C_0^\infty(|z| \leqslant 1)$, $\int_{R^{n-1}} \omega(z)\, dz = 1$.

Разбиение единицы в (1) строится так. Положим

$a_k = \sum_{s=k}^{\infty} \varepsilon_s$, $k = 1, 2, \ldots$, где

$$\varepsilon_k > 0; \quad \varepsilon_k \downarrow 0, \quad k \to \infty; \qquad \forall \nu \geqslant 0 \quad \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k^{\frac{1}{p}} \delta_k^{-\nu} < \infty, \tag{4}$$

и рассмотрим множества

$G_{-1} = \phi$, $G_0 = \{v : a_1 < |v|\}$; $G_k = \{v\colon a_{k+1} < |v| \leqslant a_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$,

а также множества

$$G_k^{\pm} = \left\{a_{k+1} \mp \frac{1}{4}\varepsilon_{k+1} < |v| \leqslant a_k \pm \frac{1}{4}\varepsilon_{k+1}\right\}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

(аналогично определяются множества $G_0^{\pm}$).

Согласно лемме о разбиении единицы, приведенной в [8] с $\mathscr{E}_k' = G_k$, $\mathscr{E}_k = G_{k-1} \cup G_k \cup G_{k+1}$, $\mathscr{E}_k'' = (\mathscr{E}_k')^{\varepsilon_{k+1}/4} = G_k^+$, существуют такие функции $\psi_k(v) \in C^\infty(R^1)$, $0 \leqslant \psi_k(v) \leqslant 1$, что $\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(v) = 1$ при $v \neq 0$, причем

$$G_k \subset \operatorname{supp} \psi_k \subset G_k^+ \tag{5}$$

и для натуральных α

$$|\psi_k^{(\alpha)}(v)| \leqslant c_1 \varepsilon_{k+1}^{-\alpha}, \quad k \geqslant 0, \tag{6}$$

где c_1 зависит только от α.

Из (5) и (6) следует, что

$$\| \psi_k \|_{L_p(R^1)} \leqslant (\operatorname{mes} G_k^+)^{\frac{1}{p}} \leqslant c_2 (a_k - a_{k+1})^{\frac{1}{p}} = c_2 \varepsilon_k^{\frac{1}{p}}. \tag{7}$$

Так как при натуральных α $\operatorname{supp} \psi_k^{(\alpha)} \subset G_k^+ \setminus G_k^-$, то

$$\| \psi_k^{(\alpha)} \|_{L_p(R^1)} \leqslant c_3 \varepsilon_{k+1}^{-\alpha} (\operatorname{mes}(G_k^+ \setminus G_k^-))^{\frac{1}{p}} \leqslant c_4 \varepsilon_{k+1}^{-\alpha} (a_{k+1} - a_{k+2})^{\frac{1}{p}} \leqslant c_5 \varepsilon_{k+1}^{\frac{1}{p} - \alpha}. \tag{8}$$

Кроме того, при $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ для любых $\alpha > 0$

$$\| \psi_k \|_{b_{p\theta}^{\alpha}(R^1)} = \left(\int_0^{\infty} \frac{\| \Delta_h^{\sigma} \psi_k^{(m)} \|_{L_p(R^1)}^{\theta}}{h^{1+\theta(\alpha-m)}}\, dh\right)^{\frac{1}{\theta}} \leqslant c_6 \varepsilon_{k+1}^{\frac{1}{p} - \alpha} \tag{9}$$

($\sigma + m > \alpha > m \geqslant 0$, σ, m — целые). Для получения (9) нужно интеграл от 0 до ∞ разбить на два: от 0 до ε_{k+1} и от ε_{k+1} до ∞, и воспользоваться оценками

$$\| \Delta_h^\sigma \psi_k^{(m)} \|_{L_p(R^1)} \leqslant h^\sigma \| \psi_k^{(m+\sigma)} \|_{L_p(R^1)} \leqslant c_7 \varepsilon_{k+1}^{1/p-m-\sigma} h^\sigma$$

в первом случае и

$$\| \Delta_h^\sigma \psi_k^{(m)} \|_{L_p(R^1)} \leqslant 2^\sigma \| \psi_k^{(m)} \|_{L_p(R^1)} \leqslant c_8 \varepsilon_{k+1}^{1/p-m}$$

во втором случае.

3°. Оценим, используя (2),

$$\| f_k(u) - f(u) \|_{L_p(R^{n-1})} \leqslant \| \int\limits_{R^{n-1}} [f(u - \delta_k z) - f(u)]\, \omega(z)\, dz \|_{L_p(R^{n-1})} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{R^{n-1}} \| f(u - \delta_k z) - f(u) \|_{L_p(R^{n-1})}\, \omega(z)\, dz \leqslant \sup_{|z| \leqslant 1} \| f(u - \delta_k z) - f(u) \|_{L_p(R^{n-1})} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{|h| \leqslant (n-1)\delta_k} \| f(u + h) - f(u) \|_{L_p(R^{n-1})} \leqslant \Omega(f, n\delta_k)_p. \tag{10}$$

Далее, для $v \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k$ в силу (5) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi_k(v) = \sum\limits_{k=s-1}^{s+1} \psi_k(v) = 1$, где $s = s(v)$ таково, что $s(v) \to \infty$ при $v \to 0$; поэтому согласно (10) и (2)

$$\| (Tf)(u, v) - f(u) \|_{L_p(R^{n-1})} = \| \sum_{k=s-1}^{s+1} \psi_k(v) [f_k(u) - f(u)] \|_{L_p(R^{n-1})} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=s-1}^{s+1} \| f_k(u) - f(u) \|_{L_p(R^{n-1})} \leqslant c_9 \sum_{k=s-1}^{s+1} \Omega(f, n\delta_k)_p \to 0$$

при $v \to 0$, т. е. $(Tf)(x)|_{R^{n-1}} = f(u)$.

Так как $\| f_k \|_{L_p(R^{n-1})} \leqslant \| f \|_{L_p(R^{n-1})}$, то в силу (7) и (4)

$$\| (Tf)(u, v) \|_{L_p(R^{n-1})} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \| \psi_k(v) f_k(u) \|_{L_p(R^n)} = \sum_{k=1}^{\infty} \| \psi_k(v) \|_{L_p(R^1)} \| f_k(u) \|_{L_p(R^{n-1})} \leqslant$$

$$\leqslant c_2 \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k^{\frac{1}{p}} \| f \|_{L_p(R^{n-1})} \leqslant c_{10} \| f \|_{L_p(R^{n-1})}. \tag{11}$$

Пусть теперь $\chi(v) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi_k(v)$, тогда

$$(Tf)(u, v) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(v) [f_k(u) - f(u)] + \chi(v) f(u).$$

Учитывая, что $\chi(v) \in b_{p1}^{1/p}(R^1)$, получим, исходя из (9), (10) и (2),

$$\| (Tf)(u, v) \|_{b_{p1}^{1/p}(R^n)} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \| \psi_k(v) \|_{b_{p1}^{1/p}(R^1)} \| f_k(u) - f(u) \|_{L_p(R^{n-1})} +$$

$$+ \| \chi(v) \|_{b_{p1}^{1/p}(R^1)} \| f(u) \|_{L_p(R^{n-1})} \leqslant c_{11} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \Omega(f, n\delta_k) + \| f \|_{L_p(R^{n-1})} \Big) \leqslant 2c_{11} \| f \|_{L_p(R^{n-1})}. \tag{12}$$

При $i = 1, \ldots, n-1$ воспользуемся тем, что согласно (3)

$$\Delta_{h,\,i}^{\sigma_i} D_i^{m_i} f_k(u) = \delta_k^{-n+1} \int\limits_{R^{n-1}} \Delta_{h,\,i}^{\sigma_i} D_i^{m_i} \left[\omega\left(\frac{u - y}{\delta_k} \right) \right] \cdot f(y)\, dy =$$

$$= \delta_k^{-n+1-m_i} \int\limits_{R^{n-1}} (\Delta_{h,\,i}^{\sigma_i} D_i^{m_i}\omega)\left(\frac{u-y}{\delta_k}\right) f(y)dy = \delta_k^{-m_i} \int\limits_{R^{n-1}} f(u-\delta_k z)\, \Delta_{h\delta_k,\,i}^{\sigma_i} D_i^{m_i}\omega(z)dz =$$

$$= \delta_k^{-m_i} \int\limits_{R^{n-1}} [f(u-\delta_k z) - f(u)]\, \Delta_{h\delta_k,\,i}^{\sigma_i} D_i^{m_i}\omega(z)\, dz \tag{13}$$

$\left(\text{мы учли, что при } \sigma_i + m_i > 0 \int\limits_{R^{n-1}} \Delta_{h\delta_k,\,i}^{\sigma_i} D_i^{m_i}\omega(z)\, dz = 0\right)$.

В силу (13)

$$\| \Delta_{h,\,i}^{\sigma_i} D_i^{m_i} f_k(u) \|_{L_p(R^{n-1})} \leqslant$$

$$\leqslant \delta_k^{-m_i} \int\limits_{R^{n-1}} \| f(u-\delta_k z) - f(u) \|_{L_p(R^{n-1})} \, | \Delta_{h\delta_k,\,i}^{\sigma_i} D_i^{m_i}\omega(z) | dz \leqslant$$

$$\leqslant 2\delta_k^{-m_i} \| f \|_{L_p(R^{n-1})} \| \Delta_{h\delta_k,\,i}^{\sigma_i} D_i^{m_i}\omega(z) \|_{L_1(R^{n-1})}.$$

Следовательно,

$$\| f_k(u) \|_{b^{r_i}_{p_{1,\,i}}(R^{n-1})} \leqslant 2\delta_k^{-m_i} \| f \|_{L_p(R^{n-1})} \int\limits_0^\infty \frac{\| \Delta_{h\delta_k,\,i}^{\sigma_i} D_i^{m_i}\omega \|_{L_1(R^{n-1})}}{h^{1+r_i-m_i}}\, dh,$$

и, заменяя $h\delta_k$ на h_1, мы получим, что

$$\| f_k(u) \|_{b^{r_i}_{p_{1,\,i}}(R^{n-1})} \leqslant 2\delta_k^{-r_i} \| f \|_{L_p(R^{n-1})} \| \omega \|_{b^{r_i}_{1,1,\,i}(R^{n-1})} = c_{12}\delta_k^{-r_i} \| f \|_{L_p(R^{n-1})}. \tag{14}$$

Теперь, исходя из (1), (7), (14) и (4), получим

$$\| Tf \|_{b^{r_i}_{p1,\,i}(R^n)} \leqslant \sum_{k=1}^\infty \| \psi_k(v) \|_{L_p(R^1)} \| f_k(u) \|_{b^{r_i}_{p1,\,i}(R^{n-1})} \leqslant$$

$$\leqslant c_{13} \sum_{k=1}^\infty \varepsilon^{\frac{1}{p}} \delta_k^{-r_i} \| f \|_{L_p(R^{n-1})} = c_{14} \| f \|_{L_p(R^{n-1})}. \tag{15}$$

Объединяя (11), (12) и (15), получим, что

$$\| Tf \|_{B^r_{p1}(R^n)} \leqslant c_{15} \| f \|_{L_p(R^{n-1})},$$

где $r = (r_1, \ldots, r_{n-1}, 1/p)$, $r_i > 0$, $i = 1, \ldots, n-1$ произвольны. Отметим, что оператор T не зависит от $r_1, \ldots, r_{n-1}$ (от r_i зависит постоянная c_{15}).

4°. Для завершения доказательства при любых $1 \leqslant m \leqslant n-1$ воспользуемся известной теоремой продолжения (см., например, [1])

$$B^\rho_{p_1}(R^{m+1}) \to B^r_{p1}(R^n),$$

где $\rho_j = r_j \left(1 - \frac{1}{p} \sum\limits_{i=m+2}^n \frac{1}{r_i}\right) = \frac{1}{p} \frac{r_j}{r_{m+1}}$; соответствующий линейный ограниченный оператор продолжения обозначим через S. Тогда

$$L_p(R^m) \xrightarrow{T} B^\rho_{p1}(R^{m+1}) \xrightarrow{S} B^r_{p1}(R^n),$$

где $\rho = \left(\frac{1}{p}\frac{r_1}{r_{m+1}}, \ldots, \frac{1}{p}\frac{r_m}{r_{m+1}}, \frac{1}{p}\right)$, т. е. оператор ST осуществляет искомое продолжение.

§ 3. НЕВОЗМОЖНОСТЬ ЛИНЕЙНОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ПРИ $\theta = 1$

В этом параграфе доказано, что нелинейность оператора продолжения в условиях (5) — (6) теоремы 1 (см. введение) связана с природой самой задачи, а не является следствием несовершенства тех или иных способов построения такого оператора. Именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $1 \leqslant m < n$ — *целые числа,* $r_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ *и выполнено условие*

$$\varkappa \equiv \frac{1}{p} \sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{r_i} = 1 \qquad (1 \leqslant p < \infty). \tag{1}$$

Тогда не существует линейного ограниченного оператора продолжения вида

$$T : L_p(R^m) \to B^r_{p,1}(R^n). \tag{2}$$

Доказательство теоремы 2 основано на нескольких леммах. В леммах 1—3, полученных М. Л. Гольдманом, показано, что не существует линейного ограниченного оператора продолжения

$$T^* : L_p*(R^m) \to B^r_{p,1}*(R^n) \qquad \left(1 \leqslant p < \infty,\ \frac{1}{p} \sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{r_i} = 1\right), \tag{3}$$

где L^*_p, $B^*_{p,1}$ — соответствующие периодические классы (см. [1]).

В лемме 4, полученной В. И. Буренковым, осуществлен переход к непериодическому случаю в этом отрицательном результате. Отметим, что эта же лемма дает переход от непериодического случая к периодическому в положительных результатах § 1—2 (в утверждениях 1—2 теоремы 1). Перейдем к доказательству теоремы 2. Через $\mathfrak{M}_\lambda(R^m)$, где $\lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$, $\lambda_j \geqslant 1$ — целые, обозначим множество тригонометрических полиномов от m-переменных степени не выше λ_j по x_j $(j = 1, \ldots, m)$. При $r = (r_1, \ldots, r_m)$, $r_j > 0$, будем обозначать для краткости $2^{s/r}$ вектор с компонентами $[2^{s/r_j}]$ $(j = 1, \ldots, m)$ где $[a]$ — целая часть числа $a > 0$.

Здесь $s = 0, 1, \ldots$ Все рассматриваемые функции имеют период 2π по каждой переменной.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2 *и пусть* M — *подпространство* $L_p*(R^m)$ *с нормой* $\|\cdot\|_M$. *Для того чтобы существовал линейный ограниченный оператор продолжения*

$$T^* : M \to B^r_{p,1}*(R^n), \tag{4}$$

необходимо и достаточно существование последовательности линейных ограниченных операторов $\{\Delta_s\}$ *из* M *в* $L_p*(R^m)$ *со свойствами*:

1) $\Delta_s : M \to \mathfrak{M}_{2^{s/r}}(R^m)$;

2) $\sum_{s=1}^{\infty} \|\Delta_s f\|_{L_p*(R^m)} \leqslant c_1 \|f\|_M \quad \forall f \in M$; c_1 *не зависит от* f;

3) $\sum_{s=0}^{\infty} \Delta_s f = f$ (*в* $L_p*(R^m)$) $\quad \forall f \in M$.

Доказательство

1. Докажем необходимость условий 1)—3). Пусть T^* — линейный ограниченный оператор вида (4). Мы, как и выше, обозначаем $x = (u, v) \in R^n$,

$u = (x_1, \ldots, x_m) \in R^m$, $v = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$. Для $f(u) \in M$ обозначим $F(u, v) = T^*f \in B^r_{p,1}*(R^n)$, при этом

$$\| F \|_{B^r_{p1}*(R^n)} \leqslant \| T^* \| \, \| f \|_M. \tag{5}$$

Для F справедливо разложение в ряд по тригонометрическим полиномам (например, в суммы Валле—Пуссена, см. [1]):

$$F(u, v) = \sum_{s=0}^{\infty} Q_s(F, (u, v)), \qquad Q_s(F, x) \in \mathfrak{M}_{2^{s/r}}(R^n), \tag{6}$$

и верна оценка с постоянной c, не зависящей от F:

$$\sum_{s=0}^{\infty} 2^s \| Q_s(F) \|_{L_p*(R^n)} \leqslant c \| F \|_{B^r_{p,1}*(R^n)}. \tag{7}$$

При этом $Q_s(F, x)$ зависят от F линейно.

Обозначим $q_s(f, u) = Q_s(F, (u, 0)) \in \mathfrak{M}_{2^{s/r}}(R^m)$. Эти функции линейно зависят от F, а значит, и от f (оператор T^* линеен!) и по неравенству разных измерений для полиномов (см. [1, 3.4.3], обозначение $\varkappa$ в (1)):

$$\| q_s(f) \|_{L_p*(R^m)} \leqslant c \cdot 2^{s\varkappa} \| Q_s(F) \|_{L_p*(R^n)}.$$

Следовательно, с учетом (7) и (5), получим ($\varkappa = 1$)

$$\sum_{s=0}^{\infty} \| q_s(f) \|_{L_p*(R^m)} \leqslant c \| T^* \| \cdot \| f \|_M = c_1 \| f \|_M. \tag{8}$$

Функция $f(u)$ есть след $F(u, v)$ в обычном смысле (см. [1, с. 281]).

Легко видеть, что тот же самый след мы получим, положив в разложении (6) $v = 0$, т. е. справедливо разложение

$$f(u) = \sum_{s=0}^{\infty} q_s(f, u),$$

сходящееся в $L_p*(R^m)$ (см. (8)). Обозначив $(\Delta_s f)(u) = q_s(f, u)$, мы видим, что условия 1) — 3) выполняются.

2. Достаточность условий 1)—3) в дальнейшем не будет использована. Поэтому ограничимся лишь замечанием, что в непериодическом случае построение оператора продолжения по разложению типа 1)—3) было фактически проведено в § 1 (см. п. 2°), причем оператор продолжения был линеен в случае линейности операторов $\Delta_s f = q_s(f, u)$. В периодическом случае построение аналогично.

З а м е ч а н и е. Лемма 1 верна и в непериодическом варианте, если считать $\mathfrak{M}_{2^{s/r}}(R^m)$ пространством целых функций экспоненциального типа $2^{s/r_j}$ по x_j ($j = 1, \ldots, m$) из $L_p(R^m)$.

Прежде чем перейти к формулировке следующей леммы, дадим определение нулевого периодического класса типа Бесова.

О п р е д е л е н и е. *Пусть* $\nu(l) = \{\nu_1(l), \ldots, \nu_m(l)\}$, *где* $\{\nu_j(l)\}_{l=0}^{\infty}$ — *последовательность возрастающих натуральных чисел* ($j = 1, \ldots, m$). *Класс* $B^{0,\nu}_{p,1}*(R^m)$ *есть совокупность функций из* $L_p*(R^m)$, *для которых разложение в ряд Валле—Пуссена*

$$f(u) = \sum_{l=0}^{\infty} Q_l(f, u),$$

где

$$Q_0(f, u) = \sigma_{\nu(0)}(f, u), \quad Q_l(f, u) = \sigma_{\nu(l)}(f, u) - \sigma_{\nu(l-1)}(f, u) \qquad (l = 1, 2, \ldots)$$

имеет конечную норму

$$\| f \|_{B^{0,\nu}_{p,1}*(R^m)} = \sum_{l=0}^{\infty} \| Q_l(f) \|_{L_p*(R^m)} < \infty. \tag{9}$$

Здесь $\sigma_{\nu(l)}(f, u)$ — средние Валле—Пуссена функции f. Нам потребуются в дальнейшем формулы для $\sigma_{\nu(l)}(f, u)$.

Рассмотрим векторы $k = (k_1, \ldots, k_m) \in Z^m$, т. е. имеющие целочисленные координаты k_j. Обозначим

$$N_m(l) = \{k \in Z^m : |k_j| \leqslant \nu_j(l), \quad j = 1, \ldots, m\},$$
$$N'_m(l) = \{k \in Z^m : |k_j| \leqslant 2\nu_j(l), j = 1, \ldots, m\}. \tag{10}$$

Введем

$$V_{\nu(l)}(u) = \sum_{k \in N'_m(l)} \mu^l_k e^{iku}, \qquad (k, u) = \sum_{j=1}^{m} k_j u_j \tag{11}$$

— ядро Валле — Пуссена, отвечающее вектору $\nu(l)$. Здесь

$$\mu^l_k = \prod_{j=1}^{m} \mu^l_{k_j, j}, \qquad \text{где (см. [1, 8. 6])}$$
$$\mu^l_{r,j} = \begin{cases} 1/2 & \text{при } |r| \leqslant \nu_j(l), \\ (2\nu_j(l) + 1 - |r|)/2\nu_j(l) & \text{при } \nu_j(l) + 1 \leqslant |r| \leqslant 2\nu_j(l). \end{cases}$$

Для дальнейшего важно, что

$$\mu^l_k = 2^{-m} \text{ при } k \in N_m(l). \tag{12}$$

Если $f(u) \in L_p*(R^m)$, $T_m = [-\pi, \pi]^m \subset R^m$;

$$f_k = (2\pi)^{-m} \int_{T_m} f(u) e^{-iku} du \tag{13}$$

— коэффициенты Фурье функции f по системе $\{e^{iku}\}_{k \in Z^m}$; то, по определению,

$$\sigma_{\nu(l)}(f, u) = \pi^{-m} \int_{T_m} f(u - \lambda) V_{\nu(l)}(\lambda) d\lambda = \sum_{k \in N'_m(l)} 2^m \mu^l_k f_k e^{iku}. \tag{14}$$

Лемма 2. *Пусть M — подпространство $L_p*(R^m)$ с нормой $\| \cdot \|_M$, удовлетворяющей условию*

$$\| f \|_{L_p*(R^m)} \leqslant c_0 \| f \|_M \qquad \forall f \in M, \tag{15}$$

инвариантное относительно сдвига, и $e^{iku} \in M$ при любом $k \in Z^m$. Пусть $\lambda(s) = \{\lambda_1(s), \ldots, \lambda_m(s)\}$, где $\{\lambda_j(s)\}_{s=0}^{\infty}$ — последовательность неубывающих натуральных чисел; $\lim \lambda_j(s) = \infty$ $(s \to \infty)$. Если существует последовательность линейных операторов $\{\Delta_s\}$, $\Delta_s : M \to \mathfrak{M}_{\lambda(s)}(R^m)$ со свойствами 2)—3) из леммы 1, то справедливо вложение

$$M \to B^{0,\nu}_{p,1}*(R^m), \qquad \nu = \nu(l) = \{\nu_1(l), \ldots, \nu_m(l)\},$$

где $\nu(l)$ — некоторая подпоследовательность последовательности $\lambda(s)$.

Доказательство.

1. Покажем, что операторы Δ_s в условии леммы можно считать инвариантными относительно сдвига. Действительно, если они не обладают этим свойством, применим к ним известную операцию усреднения по сдвигу (см., например, [9, § 3.4]), т. е. перейдем к операторам

$$(\widetilde{\Delta}_s f)(u) = (2\pi)^{-m} \int\limits_{T_m} (\tau_{-h}\Delta_s\tau_h) f(u)\, dh, \qquad \tau_h f(u) = f(u-h).$$

Здесь $f(u) \in M$ и для любого $h \in T_m$ $\tau_h f(u) \in M$, $\| \tau_h f \|_M = \| f \|_M$. Операторы $\widetilde{\Delta}_s$: $M \to \mathfrak{M}_{\lambda(s)}(R^m)$ инвариантны относительно сдвига, и по неравенству Минковского, с учетом инвариантности $L_p*(R^m)$ относительно сдвига,

$$\| \widetilde{\Delta}_s f \|_{L_{p^*}(R^m)} \leqslant (2\pi)^{-m} \int\limits_{T_m} \| \Delta_s \tau_h f \|_{L_{p^*}(R^m)}\, dh.$$

Отсюда по свойству 2) получим

$$\sum_{s=0}^{\infty} \| \widetilde{\Delta}_s f \|_{L_{p^*}(R^m)} \leqslant c_1 (2\pi)^{-m} \int\limits_{T_m} \| \tau_h f \|_M dh = c_1 \| f \|_M,$$

т. е. такое же неравенство верно для операторов $\widetilde{\Delta}_s$.

Обозначим

$$\psi_S(h) = \left\| \sum_{s=0}^{S} \Delta_s \tau_h f - \tau_h f \right\|_{L_{p^*}(R^m)}.$$

По неравенству Минковского

$$\left\| \sum_{s=0}^{S} \widetilde{\Delta}_s f - f \right\|_{L_{p^*}(R^m)} \leqslant (2\pi)^{-m} \int\limits_{T_m} \psi_S(h)\, dh. \tag{16}$$

В силу свойства 3) $\psi_S(h) \to 0$ $(S \to \infty)$ для любого $h \in T_m$, а в силу условий леммы

$$|\psi_S(h)| \leqslant \sum_{s=0}^{\infty} \| \Delta_s \tau_h f \|_{L_{p^*}(R^m)} + \| \tau_h f \|_{L_{p^*}(R^m)} \leqslant (c_1 + c_0) \| f \|_M.$$

Следовательно, по теореме Лебега первая часть (16) стремится к нулю, что доказывает свойство 3) для $\widetilde{\Delta}_s$.

Итак, операторы $\widetilde{\Delta}_s$ удовлетворяют условиям леммы и инвариантны относительно сдвига. В дальнейшем мы будем просто считать, что уже исходные операторы Δ_s обладают свойством инвариантности. В этом случае они являются операторами мультипликаторного типа.

Обозначим

$$\Lambda_m(s) = \{k \in Z^m:\ |k_j| \leqslant \lambda_j(s),\ \ j = 1, \ldots, m\}.$$

Тогда с каждым Δ_s связан набор множителей $\{\mu_{ks}\}_{k \in \Lambda_m(s)}$ такой, что для любой функции $f(u) \in M$

$$(\Delta_s f)(u) = \sum_{k \in \Lambda_m(s)} \mu_{ks} f_k e^{iku}, \tag{17}$$

где f_k — коэффициенты Фурье функции f (см. (13)).

2. Отметим, что для любого конечного набора $K \subset Z^m$

$$\sum_{s=S}^{\infty} \sum_{k \in K} |\mu_{ks}| \to 0 \qquad (S \to \infty). \tag{18}$$

Свойство (18) следует из соотношений $\Delta_s(e^{iku}) = \mu_{ks}e^{iku}$;

$$\sum_{s=0}^{\infty} |\mu_{ks}| = c \sum_{s=0}^{\infty} \|\Delta_s(e^{iku})\|_{L_{p^*}(R^m)} \leqslant c \cdot c_1 \|e^{iku}\|_M = c_k < \infty,$$

в силу свойства 2), при любом $k \in Z^m$.

Положим теперь $s(0) = 0$ и будем строить последовательность

$$\{s(l)\}_{l=0}^{\infty}$$

индуктивно: если уже выбраны $s(0), \ldots, s(l-1)$, то $s(l)$ выбираем столь большим, чтобы выполнялись условия

$$\begin{aligned} &1)\ \sum_{s=s(l)}^{\infty} \sum_{k \in \Lambda_m(s(l-1))} |\mu_{ks}| < 2^{-l}, \\ &2)\ \lambda_j(s(l))/\lambda_j(s(l-1)) \geqslant 2, \end{aligned} \tag{19}$$

что возможно в силу (18), и условия $\lambda_j(s) \to \infty$ $(s \to \infty)$, $j = 1, \ldots, m$.

Обозначим через A_l оператор

$$A_l = \sum_{s=s(l)}^{s(l+1)-1} \Delta_s\colon\ M \to \mathfrak{M}_{\lambda(s(l+1))} \quad (l = 0, 1, \ldots).$$

Тогда для любой функции $f \in M$ в силу условий 2) и 3) леммы 1

$$\sum_{l=0}^{\infty} \|A_l f\|_{L_{p^*}(R^m)} \leqslant \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=s(l)}^{s(l+1)-1} \|\Delta_s f\|_{L_{p^*}(R^m)} \leqslant c_1 \|f\|_M, \tag{20}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l f = \sum_{s=0}^{\infty} \Delta_s f = f \qquad (\text{в } L_{p^*}(R^m)). \tag{21}$$

Вспоминая вид операторов Δ_s (17), можно записать A_l в виде

$$A_l = \tilde{A}_l + B_l, \tag{22}$$

где $\tilde{A}_0 = A_0$, $B_0 = 0$;

$$A_l f = \sum_{s=s(l)}^{s(l+1)-1} \sum_{k \in \Lambda_m(s) \setminus \Lambda_m(s(l-1))} \mu_{ks} f_k e^{iku}, \qquad l = 1, 2, \ldots; \tag{23}$$

$$B_l f = \sum_{s=s(l)}^{s(l+1)-1} \sum_{k \in \Lambda_m(s(l-1))} \mu_{ks} f_k e^{iku}, \qquad l = 1, 2, \ldots \tag{24}$$

Поскольку $|f_k| \leqslant c \|f\|_{L_{p^*}(R^m)} \leqslant c \cdot c_0 \|f\|_M$, то (см. (19))

$$\|B_l f\|_{L_{p^*}(R^m)} \leqslant c \|f\|_M \sum_{s=s(l)}^{s(l+1)-1} \sum_{k \in \Lambda_m(s(l-1))} |\mu_{ks}| \leqslant c 2^{-l} \|f\|_M,$$

откуда

$$\sum_{L=0}^{\infty} \sum_{l=L}^{\infty} \|B_l f\|_{L_{p^*}(R^m)} \leqslant c \|f\|_M. \tag{25}$$

Из этих неравенств и из (20) следует, что

$$\sum_{l=0}^{\infty} \|\tilde{A}_l f\|_{L_{p^*}(R^m)} \leqslant \sum_{l=0}^{\infty} \|A_l f\|_{L_{p^*}(R^m)} + \sum_{l=0}^{\infty} \|B_l f\|_{L_{p^*}(R^m)} \leqslant c_2 \|f\|_M, \tag{26}$$

где $c_2 > 0$ не зависит от f.

3. Докажем теперь вложение $M \to B_{p,1}^{0,\nu}{}^*(R^m)$, где $\nu(l) = \lambda(s(l))$, $l = 0, 1, \ldots$, последовательность $s(l)$ определена в (19). Пусть $f(u) \in M$,

$Q_l(f, u)$ — члены разложения $f(u)$ в ряд по суммам Валле—Пуссена (см. (9)—(14)). В данном случае $N_m(l) = \Lambda_m(s(l))$; $N'_m(l) \subset N_m(l+1)$, $l = 0, 1, \ldots$ (см. (10), а также второе условие в (19)). Носитель спектра $Q_l(f, u)$ лежит в $N_m(l+1) \setminus N_m(l-1) = \Lambda_m(s(l+1)) \setminus \Lambda_m(s(l-1))$ $l = 1, 2, \ldots$; $Q_l(f, u)$ линейны по f и $\lim\limits_{t\to\infty} Q_l(\varphi_t, u) = Q_l(f, u)$, если $\varphi_t \to f$ при $t \to \infty$ в $L_p*(R^m)$. Поэтому из (21) и (22) следует, что

$$Q_l(f, u) = \sum_{t=0}^{\infty} Q_l(\tilde{A}_t f, u) + \sum_{t=0}^{\infty} Q_l(B_t f, u) \equiv S_l^{(1)}(u) + S_l^{(2)}(u). \tag{27}$$

Поскольку спектр $\tilde{A}_t f$ сосредоточен в $\Lambda_m(s(t+1)) \setminus \Lambda_m(s(t-1))$, $t = 1, 2, \ldots$ (см. (23)), то

$$S_l^{(1)}(u) = Q_l(\tilde{A}_{l-1} f, u) + Q_l(\tilde{A}_l f, u) + Q_l(\tilde{A}_{l+1} f, u), \qquad l = 1, 2, \ldots;$$

$$S_0^{(1)}(u) = Q_0(\tilde{A}_0 f, u) + Q_0(\tilde{A}_1 f, u).$$

Как известно, для любой $\varphi \in L_p^*(R^m)$, $l = 0, 1, \ldots$,

$$\| Q_l(\varphi) \|_{L_{p^*}(R^m)} \leqslant c \| \varphi \|_{L_{p^*}(R^m)}; \tag{28}$$

следовательно, с учетом (26)

$$\sum_{l=0}^{\infty} \| S_l^{(1)} \|_{L_{p^*}(R^m)} \leqslant 3c \sum_{l=0}^{\infty} \| \tilde{A}_l f \|_{L_{p^*}(R^m)} \leqslant c_3 \| f \|_M. \tag{29}$$

Спектр $B_t f$ (24) сосредоточен в $\Lambda_m(s(t-1))$, поэтому

$$S_l^{(2)}(u) = \sum_{t=l}^{\infty} Q_l(B_t f, u)$$

и в силу (28) и (25)

$$\sum_{l=0}^{\infty} \| S_l^{(2)} \|_{L_{p^*}(R^m)} \leqslant c \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{t=l}^{\infty} \| B_t f \|_{L_{p^*}(R^m)} \leqslant c_4 \| f \|_M. \tag{30}$$

Из (27), (29) и (30) следует, что для любой функции $f \in M$

$$\| f \|_{B_{p1}^{0,\nu}*(R^m)} = \sum_{l=0}^{\infty} \| Q_l(f) \|_{L_{p^*}(R^m)} \leqslant c_5 \| f \|_M,$$

где c_5 не зависит от f. При этом $\nu_j(l) = \lambda_j(s(l))$ и $\nu_j(l+1) \geqslant 2\nu_j(l)$, $l = 0, 1, \ldots$; $j = 1, \ldots, m$. Последнее неравенство и означает требуемое вложение. Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 2 и пусть M — подпространство $L_p*(R^m)$, инвариантное относительно сдвига, $e^{ik^u} \in M$ при любом $k \in Z^m$ и существует линейный ограниченный оператор продолжения (4). Тогда справедливо вложение*

$$M \to B_{p,1}^{0,\nu}*(R^m), \tag{31}$$

где $\nu(l) = \{\nu_1(l), \ldots, \nu_m(l)\}$ — подпоследовательность последовательности

$$\lambda(s) = 2^{s/r} = \{[2^{s/r_1}], \ldots, [2^{s/r_m}]\}.$$

Доказательство состоит в последовательном применении лемм 1 и 2.

Следующая лемма показывает, что для $M = L_p*(R^m)$ вложение (31) не имеет места.

Лемма 3. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$; $\nu(l) = \{\nu_1(l), \ldots, \nu_m(l)\}$, $\{\nu_j(l)\}_{l=0}^{\infty}$ — *последовательность возрастающих натуральных чисел. Тогда вложение*

$$B_{p,1}^{0,\nu}*(R^m) \to L_p*(R^m)$$

строгое, т. е. обратное вложение не имеет места.

Доказательство. Будем сначала считать, что $\nu_j(l+1) \geqslant 3\nu_j(l)$, $l = 0, 1, \ldots$ Рассмотрим последовательность чисел $\{a_l\}_{l=0}^{\infty}$ с условиями

$$\sum_{l=0}^{\infty} |a_l|^2 < \infty, \qquad \sum_{l=0}^{\infty} |a_l| = \infty. \tag{32}$$

При $m > 1$ мы будем обозначать $\nu'(l) = \{\nu_1(l), \ldots, \nu_{m-1}(l)\}$ и $u = (u', u_m) \in R^m$, $u' = (u_1, \ldots, u_{m-1})$.

Рассмотрим функции

$$f(u) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l e^{i\nu(l)u} = \sum_{l=0}^{\infty} b_l e^{i\nu_m(l)u_m}, \tag{33}$$

где $b_l = a_l e^{i\nu'(l)u'}$, $\nu(l)u = \sum_{j=1}^{m} \nu_j(l)u_j$, $\nu'(l)u' = \sum_{j=1}^{m-1} \nu_j(l)u_j$.

Второе равенство написано для случая $m > 1$.

Покажем, что

$$f(u) \in L_p*(R^m) \qquad (1 \leqslant p < \infty).$$

В самом деле (пояснения ниже), $T_m = T_{m-1} \times [-\pi, \pi]$ и

$$\|f\|_p = \left\{\int_{T_m} |f(u)|^p du\right\}^{\frac{1}{p}} = \left\{\int_{T_{m-1}} du' \int_{-\pi}^{\pi} \left|\sum_{l=0}^{\infty} b_l e^{i\nu_m(l)u_m}\right|^p du_m\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant c_p \left\{\int_{T_{m-1}} \left(\sum_{l=0}^{\infty} |b_l|^2\right)^{\frac{p}{2}} du'\right\}^{\frac{1}{p}} = c_p' \left\{\sum_{l=0}^{\infty} |a_l|^2\right\}^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Первое неравенство есть результат применения теоремы об оценке суммы лакунарного ряда к интегралу по u_m (см. [10, гл. V, теорема 8.20]), так как условие лакунарности здесь выполнено: $\nu_m(l+1) \geqslant 3\nu_m(l)$. Далее, $|b_l| = |a_l|$ и в интеграле по T_{m-1} стоит постоянная, вынося которую мы получим последнее равенство.

Такое же рассуждение показывает, что ряд (33) сходится к своей сумме $f(u)$ в $L_p*(R^m)$. Поэтому

$$\sigma_{\nu(t)}(f, u) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \sigma_{\nu(t)}(e^{i\nu(l)u}, u).$$

В силу (12) и (14) при $t \geqslant l \geqslant 0$ $\sigma_{\nu(t)}(e^{i\nu(l)u}) = e^{i\nu(l)u}$, а при $l \geqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant l-1$, в силу того, что $\nu(l) \overline{\in} N_m'(t)$ (см. (10) и условие $\nu_j(l) \geqslant \nu_j(t+1) \geqslant 3\nu_j(t)$), $\sigma_{\nu(t)}(e^{i\nu(l)u}) = 0$. Следовательно,

$$\sigma_{\nu(t)}(f, u) = \sum_{l=0}^{t} a_l e^{i\nu(l)u}; \quad Q_l(f, u) = a_l e^{i\nu(l)u}.$$

Поэтому

$$\|f\|_{B_{p1}^{0,\nu}*(R^m)} = \sum_{l=0}^{\infty} \|a_l e^{i\nu(l)u}\|_{L_p*(R^m)} = c_p \sum_{l=0}^{\infty} |a_l| = \infty,$$

что доказывает лемму.

Если условие $\nu_j(l+1) \geqslant 3\nu_j(l)$ не выполняется, то мы можем перейти от $\nu(l)$ к подпоследовательности $\mu(t) = \nu(l(t))$, для которой $B^{0,\nu}_{p,1} * (R^m) \to B^{0,\mu}_{p,1} * (R^m)$, и считать, что $\mu_j(t+1) \geqslant 3\mu_j(t)$ при $t = 0, 1, \ldots$ в приведенных выше рассуждениях.

Следствие 2. *Не существует линейного ограниченного оператора продолжения вида (3).*

Действительно, существование такого оператора T^* означало бы по следствию 1 справедливость вложения (31) при $M = L_p * (R^m)$, что невозможно в силу леммы 3.

Следующая лемма позволит перейти к непериодическому случаю, завершив тем самым доказательство теоремы 2.

Лемма 4. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$; $r = (r_1, \ldots, r_n)$; $r_j > 0$, $j = 1, \ldots, n$; $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. *Если существует ограниченный оператор продолжения*

$$T\colon (L_p(R^m) \to B^r_{p,\theta}(R^n), \tag{34}$$

то существует также ограниченный оператор продолжения

$$T^*\colon L_p * (R^m) \to B^r_{p,\theta}{}^*(R^n). \tag{35}$$

Если оператор T линеен, то таков же оператор T^*.

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию $f(u) \in L_p * (R^m)$ и обозначим через P оператор умножения на характеристическую функцию множества $T_m = [-\pi, \pi]^m \subset R^m$, т. е. $(Pf)(u) = f(u)\chi_{T_m}(u)$. Он действует из $L_p * (R^m)$ в $L_p(R^m)$, причем

$$\| Pf \|_{L_p(R^m)} = \| f \|_{L_p(T_m)} = \| f \|_{L_p*(R^m)}. \tag{36}$$

К функции $\varphi(u) = (Pf)(u)$ можно применить оператор продолжения T из условия леммы. Если обозначить $F(u, v) = (T\varphi)(u, v)$, то

$$\| F \|_{B^r_{p,\theta}(R^n)} \leqslant \| T \| \cdot \| \varphi \|_{L_p(R^m)} = \| T \| \cdot \| f \|_{L_p*(R^m)}. \tag{37}$$

Рассмотрим, далее, множества $T_n = [-\pi, \pi]^n \subset R^n$; $T'_n = [-5\pi/4, 5\pi/4]^n$; $T''_n = [-3\pi/2, 3\pi/2]^n$. Пусть функция $\psi(x) \in C^\infty_0(R^n)$, $\operatorname{supp} \psi \subset T'_n$, $\psi(x) \equiv 1$ при $x \in T_n$. Через S обозначим оператор умножения на $\psi(x)$. Известно, что S — линейный ограниченный оператор из $B^r_{p,\theta}(R^n)$ в $\overset{0}{B}{}^r_{p,\theta}(T'_n)$, где $\overset{0}{B}{}^r_{p,\theta}(T'_n)$ — подпространство функций из $B^r_{p,\theta}(R^n)$ с носителями, содержащимися в T'_n и

$$\| f \|_{\overset{0}{B}{}^r_{p,\theta}(R^n)} = \| f \|_{B^r_{p,\theta}(R^n)}. \tag{38}$$

При этом $\| S \|$ зависит только от ψ.

Наконец, через Q обозначим линейный оператор периодического продолжения, сопоставляющий всякой функции $\Phi(x) \in \overset{0}{B}{}^r_{p,\theta}(T'_n)$ периодическую функцию

$$(Q\Phi)(x) = \sum_{k \in Z^n} \Phi(x + 2\pi k) \tag{39}$$

(при каждом x лишь конечное число слагаемых отлично от нуля), и покажем ограниченность

$$Q : \overset{0}{B}{}^r_{p,\theta}(T'_n) \to B^r_{p,\theta}{}^*(R^n).$$

Норма в $B^r_{p,\theta}*(R^n)$ может быть определена соотношением (4) из введения, где надо лишь считать $F(x)$ 2π-периодической, заменить R^n на T_n и интеграл по h взять в пределах от 0 до $\delta > 0$. При различных δ эти нормы эквивалентны. Мы будем считать, что $\delta = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\pi/4\sigma_i)$.

Обозначим $\Pi = \{k \in Z^n, \ |k_i| \leqslant 1, \ i = 1, \ldots, n\}$. Тогда, в силу условия $\operatorname{supp}\Phi \subset T'_n$ из (39) следует

$$(Q\Phi)(x) \equiv \sum_{k\in\Pi} \Phi(x + 2\pi k), \qquad x \in T''_n. \tag{40}$$

Согласно (40) при $x \in T'_n$ и $0 < |h| < \delta$

$$\Delta^{\sigma_i}_{h,i} D^{m_i}_i (Q\Phi)(x) = \sum_{k\in\Pi} \Delta^{\sigma_i}_{h,i} D^{m_i}_i \Phi(x + 2\pi k). \tag{41}$$

Из (40) следует, что

$$\| Q\Phi \|_{L_p(T'_n)} \leqslant \sum_{k\in\Pi} \| \Phi(\cdot + 2\pi k) \|_{L_p(T_n)} \leqslant \sum_{k\in\Pi} \| \Phi(\cdot + 2\pi k) \|_{L_p(R^n)} = 3^n \| \Phi \|_{L_p(R^n)}$$

и, аналогично, из (41) —

$$\| \Delta^{\sigma_i}_{h,i} D^{m_i}_i (Q\Phi) \|_{L_p(T_n)} \leqslant 3^n \| \Delta^{\sigma_i}_{h,i} D^{m_i}_i \Phi \|_{L_p(R^n)}.$$

Таким образом,

$$\| Q\Phi \|_{B^r_{p,\theta^*}(R^n)} \leqslant 3^n \| \Phi \|_{B^r_{p,\theta}(R^n)} = 3^n \| \Phi \|_{\overset{0}{B}{}^r_{p,\theta}(T'_n)}.$$

Искомый оператор продолжения имеет вид

$$T^* = QSTP : L_p*(R^m) \to B^r_{p,\theta}*(R^n),$$

он ограничен как произведение ограниченных операторов и линеен в случае линейности оператора T.

Осталось доказать, что след T^*f на T_m равен f, т. е.

$$\| (T^*f)(\cdot, v) - f(\cdot) \|_{L_p(T_m)} \to 0 \qquad (v \to 0), \quad f \in L_p*(R^m).$$

Это свойство следует из справедливости аналогичного соотношения для оператора T и структуры оператора T^*. В самом деле, пусть $\Pi' = \{k' \in Z^m, \ |k_j| \leqslant 1, \ j = 1, \ldots, m\} \setminus \{0\}$. Тогда, при $|v_i| < \pi/4$, $i = 1, \ldots, n - m$; $u \in T_m$ имеем $x = (u, v) \in T_n$, $\psi(x) = 1$,

$$(T^*f)(u, v) = (TPf)(u, v) + \sum_{k'\in\Pi'} (STPf)(u + 2\pi k', v)$$

(см. еще (40)) и

$$T^*f(u, v) - f(u) = TPf(u, v) - Pf(u) + \sum_{k'\in\Pi'} STPf(u + 2\pi k', v).$$

Следовательно, при $|v_i| < \pi/4$, $i = 1, \ldots, n - m$,

$$\| T^*f(\cdot, v) - f(\cdot) \|_{L_p(T_m)} \leqslant \| TPf(\cdot, v) - Pf(\cdot) \|_{L_p(T_m)} + \\ + \sum_{k'\in\Pi'} \| STPf(\cdot + 2\pi k', v) \|_{L_p(T_m)}.$$

Расширяя область интегрирования на все R^m, мы видим, что первое слагаемое стремится к нулю при $v \to 0$, поскольку T — оператор продолжения. В силу ограниченности оператора S в L_p, второе слагаемое не больше

чем

$$\sum_{k'\in\Pi'} \| TPf(\cdot + 2\pi k', v) \|_{L_p(T_m)} = \sum_{k'\in\Pi'} \| TPf(\cdot + 2\pi k', v) - Pf(\cdot + 2\pi k') \|_{L_p(T_m)},$$

а правая часть равенства есть сумма конечного числа слагаемых, каждое из которых стремится к нулю при $v \to 0$. Лемма доказана.

Следствие 3. *Из следствия* 2 *и леммы* 4 *вытекает справедливость утверждения теоремы* 2.

Действительно, предположив существование линейного ограниченного оператора продолжения T вида (2), мы построим по нему, используя лемму 4, оператор T^* вида (3), что невозможно по следствию 2.

Следствие 4. *Утверждения* 1)—2) *теоремы* 1 *справедливы также для периодических классов.*

Это следует из теоремы 1, если применить лемму 4.

Сделаем в заключение два замечания.

1. Следствие 1 из § 3 допускает обращение, так что выполнение условия (31) при некоторой последовательности $\nu(l)$ необходимо и достаточно для того, чтобы существовал линейный ограниченный оператор продолжения вида (4).

2. Остается открытым вопрос о существовании линейного оператора продолжения $T: L_1(R^{n-1}) \to W_1^1(R^n)$ (нелинейный был построен Гальярдо [3]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никольский С. М.* Теория приближения функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969.
2. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
3. *Gagliardo E.* Caratterizzazioni delle trace sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili.— Rend. Semin. mat. Univ. Padova, 1957, 27, p. 284—305.
4. *Успенский С. В.* О теоремах вложения для обобщенных классов W_p^r Соболева.— Сиб. мат. журн., 1962, 3, № 3.
5. *Бугров Я. С.* К теоремам вложения для H-классов С. М. Никольского.— Сиб. мат. журн., 4, 1963, с. 1012—1028.
6. *Гольдман М. Л.* Описание следов для функций обобщенного гельдерова класса.— ДАН СССР, 1976, 231, № 3, 13—16.
7. *Буренков В. И.* Об одном способе продолжения дифференцируемых функций.— Труды МИАН СССР, 1976, 140, 27—67.
8. *Буренков В. И.* О разбиениях единицы.— Наст. сб. с. 24—30.
9. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во МГУ, 1976.
10. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965, т. 1.