

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ В ИНТЕГРАЛЕ КРИСТОФФЕЛЯ — ШВАРЦА

И. А. Колесников

Аннотация. Предлагается метод определения параметров в интеграле Кристоффеля — Шварца. Искомое отображение вкладывается в однопараметрическое семейство конформных отображений верхней полуплоскости на семейство многоугольников, получаемое сдвигом одной или нескольких вершин некоторого начального многоугольника при условии сохранения углов. Рассматриваются случаи, когда семейство многоугольников и начальный многоугольник имеют одинаковое число вершин; случай, когда семейство многоугольников имеет две подвижные вершины, совпадающие в начальный момент и не совпадающие с другими вершинами, и случай, когда семейство многоугольников представляет собой многоугольник с подвижным разрезом. Задача определения параметров семейства отображений сводится к задаче интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

DOI 10.33048/smzh.2021.62.407

Ключевые слова: конформное отображение, многоугольник, интеграл Кристоффеля — Шварца.

1. Постановка задачи

Голоморфное однолистное отображение f верхней полуплоскости $\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ (или единичного круга) на многоугольник Δ с границей, состоящей из отрезков прямых, можно записать с помощью интеграла Кристоффеля — Шварца [1, 2]. Для решения задачи нахождения параметров в интеграле Кристоффеля — Шварца — прообразов вершин многоугольника Δ при отображении f — разработаны различные методы. Проблему определения параметров можно свести к задаче решения системы уравнений, содержащей несобственные интегралы. Н. П. Стенин (см. [3]) применяет метод Ньютона — Фурье для решения системы уравнений на параметры, несобственные интегралы, встречающиеся при этом, вычисляет по методу Л. В. Канторовича. В [4] предложен эффективный приближенный метод. П. Ф. Фильчаков решает задачу определения параметров, используя обобщенные степенные ряды [5]. Лоуренсон и Гупта применяют метод сопряженных направлений Пауэлла для решения системы уравнений, определяющей параметры [6]. В дальнейшем эта техника получила развитие в работах Трефесена [7]. Позднее Дрискол адаптировал численный метод Трефесена для пакета MATLAB [8, 9]. В [9, 10] содержится обзор работ.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета).

В [11, 12] предложен численный метод построения конформных отображений различных областей. В. Н. Монаховым разработан конструктивный вариационный метод циклической итерации для решения функциональных уравнений относительно параметров конформных отображений [13]. В [14] предлагается метод определения параметров в интеграле Кристоффеля — Шварца на основе квадратурной формулы средней точки.

Метод определения параметров в интеграле Кристоффеля — Шварца, предлагаемый в данной работе, идейно близок к методу П. П. Куфарева [15, 16]. Метод П. П. Куфарева основывается на параметрическом методе Левнера, сводит проблему определения параметров в интеграле Кристоффеля — Шварца к задаче интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями Коши. Метод П. П. Куфарева получил различные обобщения [17–22] в том числе для отображений на многоугольники на римановых поверхностях [19], для отображений на круговые многоугольники [20, 21].

Рассмотрим n -угольник $\Delta_0 \subset \mathbb{C}$ с границей, состоящей из отрезков прямых. Обозначим его вершины через $A_1^0, A_2^0, \dots, A_n^0$ и углы при этих вершинах соответственно — через $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \dots, \alpha_n\pi$, $\alpha_p \in (0, 1) \cup (1, 2)$, если $A_p^0 \in \mathbb{C}$, и $\alpha_p \in [-2, 0]$, если $A_p^0 = \infty$. Образует семейство n -угольников $\Delta(t)$, $\Delta(0) = \Delta_0$, сдвигая вершины многоугольника Δ_0 по закону $A_p^0 + tB_p =: A_p(t)$, $B_p \in \mathbb{C}$, $0 \leq t \leq T$, так, чтобы углы многоугольника оставались неизменными и хотя бы одна сторона оставалась на одной прямой. Таким образом, многоугольник $\Delta(t)$ имеет углы $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \dots, \alpha_n\pi$ при вершинах $A_1(t), A_2(t), \dots, A_n(t)$.

Согласно теореме Римана существует отображение $f_t : \mathbb{P}^+ \rightarrow \Delta(t)$, переводящее верхнюю полуплоскость \mathbb{P}^+ на многоугольник $\Delta(t)$, $t \in [0, T]$. Обозначим прообраз вершины $A_p(t)$ многоугольника $\Delta(t)$ при отображении f_t через $a_p(t)$.

В данной статье решается задача построения семейства отображений $f : \mathbb{P}^+ \times [0, T] \rightarrow \Delta(t)$, $f = f(z, t) = f_t(z)$. Отображение f_t можно представить с помощью формулы Кристоффеля — Шварца

$$\frac{\partial f_t(z)}{\partial z} = c(t) \prod_{p=1}^n (z - a_p(t))^{\alpha_p - 1}, \quad (1)$$

где $c(t) \in \mathbb{C}$. Прообразы вершин $a_p(t)$, $p = 1, \dots, n$, и коэффициент $c(t)$ — параметры интеграла Кристоффеля — Шварца — будем называть *параметрами отображения* f_t . Задача построения отображения f_t сводится к следующим трем задачам.

Задача 1. Определить параметры отображения $f_t : \mathbb{P}^+ \rightarrow \Delta(t)$ верхней полуплоскости на многоугольник $\Delta(t)$, $t \in [0, T]$. Вершины многоугольника перемещаются по закону $A_p^0 + tB_p =: A_p(t)$, угол при вершине $A_p(t)$ равен $\alpha_p\pi$, $t \in [0, T]$, $p = 1, \dots, n$. Вершины $A_p(t)$ попарно не совпадают между собой при $t \in [0, T]$.

Задача 2. Определить параметры отображения $f_t : \mathbb{P}^+ \rightarrow \Delta(t)$ верхней полуплоскости на многоугольник $\Delta(t)$, $t \in [0, T]$. Семейство многоугольников $\Delta(t)$ имеет только две подвижные смежные вершины $A_1(t) = A_0 + tB_1$, $A_n(t) = A_0 + tB_n$, при $t = 0$ совпадающие между собой и не совпадающие с другими вершинами A_2, \dots, A_{n-1} . Угол при вершине $A_p(t)$ равен $\alpha_p\pi$, $t \in (0, T)$, $p = 1, \dots, n$.

Задача 3. Определить параметры отображения $f_t : \mathbb{P}^+ \rightarrow \Delta(t)$ верхней полуплоскости на многоугольник $\Delta(t)$, $t \in [0, T]$. Семейство $\Delta(t)$ получается

проведением разреза переменной длины по отрезку прямой от некоторой точки границы многоугольника $\Delta(0)$ до некоторой внутренней точки многоугольника $\Delta(0)$.

Во всех трех задачах образ бесконечности при отображении $f_t = f_t(z)$, $t \in [0, T]$, — некоторая фиксированная точка границы многоугольника $\Delta(0)$. Отображение полуплоскости на многоугольник $\Delta(0)$ считается известным.

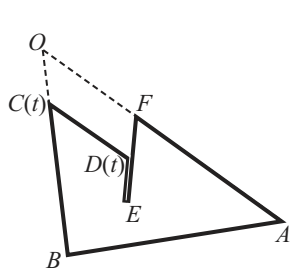


Рис. 1.

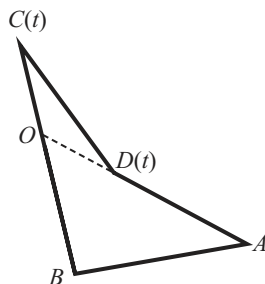


Рис. 2.

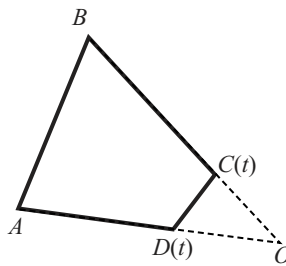


Рис. 3.

Пример семейства многоугольников, удовлетворяющего условиям задачи 1, изображен на рис. 1. Здесь вершины $C(t)$ и $D(t)$ многоугольника $ABCDEF$ перемещаются вдоль прямых BO и EF соответственно так, что углы многоугольника $ABCDEF$ остаются неизменными. На рис. 2, 3 изображены примеры семейств многоугольников, удовлетворяющих условиям задачи 2. Вершины $C(t)$ и $D(t)$ многоугольника $ABCD$ перемещаются вдоль прямых BO и AO соответственно так, что углы многоугольника $ABCD$ остаются неизменными.

Опишем кратко содержание статьи. В разд. 2 приведены некоторые предварительные результаты, используемые при решении поставленных задач. Для отображения f_t записано дифференциальное уравнение второго порядка относительно переменной t , приведена система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно параметров отображения f_t . Записаны нормировки отображения, при которых система уравнений относительно параметров принимает наиболее простой вид. В лемме 1 записано одно линейное соотношение относительно параметров отображения f_t . Эти результаты получены в [23]. Лемма 2 используется для нахождения начальных условий системы.

В разд. 3 записана система линейных уравнений, позволяющая определить начальные условия системы дифференциальных уравнений относительно параметров отображения f_t , удовлетворяющего условиям задачи 1. Этот раздел дополняет работу [23], в которой эквивалентная система линейных уравнений относительно начальных условий получена другим способом несколько в ином виде.

В разд. 4 и 5 решаются задачи 2 и 3 соответственно. Решение задач 2 и 3 сводится к задаче интегрирования системы дифференциальных уравнений с сингулярностью в области начальной точки.

Полученные результаты позволяют проинтегрировать систему дифференциальных уравнений относительно параметров отображения, удовлетворяющего условиям задач 1, 2 или 3.

2. Предварительные сведения

Рассмотрим следующие способы нормировки отображения $f_t : \Pi^+ \rightarrow \Delta(t)$, $t \in [0, T]$.

1. Пусть бесконечность принадлежит отрезку прямой, составляющей границу многоугольника $\Delta(t)$. Можно потребовать $f_t(\infty) = \infty$, тогда f_t имеет на бесконечности разложение

$$f_t(z) = e^{i\varphi} \left(Hz + B + \frac{c_1(t)}{z} + \frac{c_2(t)}{z^2} + \dots \right), \tag{2}$$

где $H > 0$, $B \in \mathbb{R}$. В разложении можно задать H и B .

Поясним, почему выбор $H > 0$ и $B \in \mathbb{R}$ возможен. Пусть f_t — некоторое отображение верхней полуплоскости на многоугольник Δ , одно из ребер которого проходит через бесконечность, и этой бесконечно удаленной точке соответствует бесконечность при отображении f_t . Тогда f_t имеет на бесконечности разложение $f_t(\zeta) = e^{i\varphi} (c_{-1}\zeta + c_0 + \frac{c_1}{\zeta} + \dots)$, где $c_{-1} > 0$ и $c_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, в силу того, что f_t отображает часть вещественной прямой, проходящей через бесконечность, в отрезок прямой, проходящей через бесконечность (под углом φ к вещественной оси). Построим композицию $g_t(\zeta) = f_t(z(\zeta))$, где $z(\zeta) = h\zeta + b$, $h > 0$, $b \in \mathbb{R}$, отображает Π^+ на Π^+ , оставляя бесконечность неподвижной. Композиция g_t имеет на бесконечности разложение $g_t(\zeta) = e^{i\varphi} (hc_{-1}z + c_0 + bc_{-1} + \frac{\tilde{c}_1}{z} + \dots)$. Подбирая $h > 0$ и $b \in \mathbb{R}$, можно задать модуль коэффициента при z и свободный член в разложении задать на прямой, проходящей через начало координат под углом φ к вещественной оси.

2. Пусть бесконечность является вершиной многоугольника $\Delta(t)$, образованной двумя лучами, угол при этой вершине имеет раствор $\alpha\pi$, $\alpha \in (-2, -1) \cup (-1, 0)$. Можно потребовать $f_t(\infty) = \infty$, тогда f_t имеет на бесконечности разложение

$$f_t(z) = A^* + e^{i\varphi} \left(\frac{H}{z^\alpha} + \frac{B}{z^{\alpha+1}} + \frac{c_1(t)}{z^{\alpha+2}} + \frac{c_2(t)}{z^{\alpha+3}} + \dots \right), \tag{3}$$

где $H > 0$, $B \in \mathbb{R}$, $A^* \in \mathbb{C}$ — точка пересечения прямых, образующих угол на бесконечности. В разложении можно задать H и B .

3. Пусть $A \in \mathbb{C}$ — точка, принадлежащая неподвижной стороне многоугольника $\Delta(t)$. Можно потребовать $f_t(\infty) = A$, тогда f_t имеет на бесконечности разложение

$$f_t(z) = A + e^{i\varphi} \left(\frac{H}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{c_1(t)}{z^3} + \frac{c_2(t)}{z^4} + \dots \right), \tag{4}$$

где $H > 0$, $B \in \mathbb{R}$. В разложении можно задать H и B .

4. Пусть $A \in \mathbb{C}$ — вершина многоугольника $\Delta(t)$, образованная отрезками прямых, угол при этой вершине имеет раствор $\alpha\pi$, $\alpha \in (0, 1) \cup (1, 2]$. Можно потребовать $f_t(\infty) = A$, тогда f_t имеет на бесконечности разложение

$$f_t(z) = A + e^{i\varphi} \left(\frac{H}{z^\alpha} + \frac{B}{z^{\alpha+1}} + \frac{c_1(t)}{z^{\alpha+2}} + \frac{c_2(t)}{z^{\alpha+3}} + \dots \right), \tag{5}$$

где $H > 0$, $B \in \mathbb{R}$. В разложении можно задать H и B .

Пусть f_t — некоторое отображение верхней полуплоскости Π^+ на многоугольник Δ с вершиной на бесконечности нулевого раствора и этой вершине

соответствует бесконечно удаленная точка при отображении f_t . Тогда f_t имеет на бесконечности разложение $f_t(z) = e^{i\varphi}(\gamma \ln z + c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots)$, где $\gamma\pi$ — расстояние между лучами, образующими нулевой угол на бесконечности, φ — угол между лучом, уходящим на бесконечность, и вещественной осью. Построим композицию $g_t(\zeta) = f_t(z(\zeta))$, где $z(\zeta) = h\zeta + b$, $h > 0$, $b \in \mathbb{R}$, отображает Π^+ на Π^+ , оставляя бесконечность неподвижной. Композиция g_t имеет на бесконечности разложение

$$g_t(\zeta) = e^{i\varphi} \left(\gamma \ln z + c_0 + \gamma \ln h + \frac{c_1 + \gamma b}{h\zeta} + \frac{\tilde{c}_2}{\zeta^2} + \dots \right).$$

Подбирая $h > 0$ и $b \in \mathbb{R}$, можно свободный член и коэффициент при z в разложении задать на прямой, проходящей через начало координат под углом φ к вещественной оси.

5. Пусть бесконечность является вершиной многоугольника $\Delta(t)$ с углом раствора $\alpha\pi$, $\alpha \in \{-2, -1, 0\}$, образованной двумя лучами. Можно потребовать $f_t(\infty) = \infty$, тогда f_t имеет на бесконечности разложение

$$f_t(z) = e^{i\varphi} \gamma(t) \ln z + e^{i\varphi} z^{-\alpha} \left(H + \frac{B}{z} + \frac{c_1(t)}{z^2} + \frac{c_2(t)}{z^3} + \dots \right), \quad (6)$$

где $H, B \in \mathbb{R}$, если $\alpha = 0$, и $H > 0$, $B \in \mathbb{R}$, если $\alpha \in \{-2, -1\}$. В разложении можно задать H и B . Заметим, что $\dot{\gamma}(t) = 0$.

В [23] получены следующие результаты.

Теорема 1. *Отображение $f_t = f(z, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\frac{\partial^2 f_t(z)}{\partial t^2} = c(t) \prod_{j=1}^n (z - a_j(t))^{\alpha_j - 1} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\dot{a}_j^2(t)(\alpha_j - 1)}{z - a_j(t)} + C(t)z^2 + D(t)z + E(t) \right), \quad (7)$$

где $C(t), D(t), E(t) \in \mathbb{C}$.

В [23] дифференциальное уравнение (7) записано для отображения полуплоскости на внешность многоугольника.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если прообраз одной из вершин, скажем $a_0(t)$, находится на бесконечности, то формулы (1) и (7) не изменят вида.

Лемма 1. *Пусть отображение f_t удовлетворяет одной из нормировок (2)–(6). Тогда в формуле (7) $C(t) = D(t) = E(t) = 0$. Кроме того, коэффициент $c(t)$ равен $c(t) = e^{i\varphi} \gamma(t)$ и $\sum_{j=1}^n (\alpha_j - 1)a_j(t) = -\frac{B}{\gamma(t)}$ при $\alpha = 0$; $c(t) = He^{i\varphi}$ и*

$\sum_{j=1}^n (\alpha_j - 1)a_j(t) = -\frac{\gamma(t)}{H}$ при $\alpha = -1$ в случае нормировки (6) и $c(t) = -\alpha He^{i\varphi}$,
 $\sum_{j=1}^n (\alpha_j - 1)a_j(t) = -\frac{B}{H} \frac{\alpha+1}{\alpha}$ в остальных случаях. Здесь $\alpha\pi$ — угол при вершине $f_t(\infty)$ ($\alpha = 1$ в случае нормировки (4)).

С помощью теоремы 1 в [23] получена система дифференциальных уравнений относительно параметров $a_p(t)$, $p = 1, \dots, n$, отображения f_t . Приведем ее для отображения f_t , удовлетворяющего одной из указанных нормировок.

Теорема 2. Пусть отображение f_t нормировано одним из условий (2)–(6) (в случае нормировки (6) при $\alpha = 0$ потребуем $\gamma(t) = \text{const}$). Тогда параметры $a_p(t)$, $p = 1, \dots, n$, $t \in [0, T)$, отображения f_t удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\ddot{a}_p(t) + \sum_{j=1, j \neq p}^n (\alpha_j - 1) \frac{(\dot{a}_p(t) - \dot{a}_j(t))^2}{a_p(t) - a_j(t)} = 0, \quad p = 1, \dots, n, \quad (8)$$

точка над функцией означает частную производную по t .

Далее будем рассматривать отображение f_t , нормированное одним из условий (2)–(5) при $B = 0$ или условием (6) при $\alpha = -2$ и $B = 0$. Таким образом, $c(t) = -\alpha H e^{i\varphi} = \text{const}$, и параметры отображения f_t удовлетворяют соотношению

$$\sum_{j=1}^n (\alpha_j - 1) a_j(t) = 0. \quad (9)$$

Следующая лемма — вариация теоремы о дифференцируемости интеграла от параметра.

Лемма 2. Пусть функция $g(\xi, x)$ непрерывна вместе с частной производной $\frac{\partial g(\xi, x)}{\partial x}$ на прямоугольнике $\{(\xi, x) : \xi \in [a, b], x \in [c, d]\}$ и интеграл $\int_a^b h(\xi) d\xi$ сходится. Тогда интеграл $J(x) = \int_a^b h(\xi) g(\xi, x) d\xi$ (несобственный, если $h(\xi)$ неограниченная), зависящий от параметра, является непрерывно дифференцируемой функцией на отрезке $[c, d]$, причем справедливо следующее равенство:

$$\frac{dJ(x)}{dx} = \int_a^b h(\xi) \frac{\partial g(\xi, x)}{\partial x} d\xi, \quad x \in [c, d].$$

Доказательство. Рассмотрим

$$\begin{aligned} \frac{dJ(x)}{dx} - \int_a^b h(\xi) \frac{\partial g(\xi, x)}{\partial x} d\xi &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_a^b h(\xi) \frac{g(\xi, x + \Delta x) - g(\xi, x)}{\Delta x} d\xi - \int_a^b h(\xi) \frac{\partial g(\xi, x)}{\partial x} d\xi. \end{aligned}$$

Так как функция g непрерывна и дифференцируема по x на $[x, x + \Delta x]$, по теореме Лагранжа о среднем значении

$$\int_a^b h(\xi) \frac{g(\xi, x + \Delta x) - g(\xi, x)}{\Delta x} d\xi = \int_a^b h(\xi) \frac{\partial g(\xi, x + \theta_\xi \Delta x)}{\partial x} d\xi, \quad \theta_\xi \in (0, 1).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_a^b h(\xi) \frac{g(\xi, x + \Delta x) - g(\xi, x)}{\Delta x} d\xi - \int_a^b h(\xi) \frac{\partial g(\xi, x)}{\partial x} d\xi &= \int_a^b h(\xi) \left(\frac{\partial g(\xi, x + \theta_\xi \Delta x)}{\partial x} - \frac{\partial g(\xi, x)}{\partial x} \right) d\xi. \end{aligned}$$

Поскольку функция $\frac{\partial g(\xi, x)}{\partial x}$ непрерывна на прямоугольнике $\{(\xi, x) : \xi \in [a, b], x \in [c, d]\}$, по теореме Кантора она равномерно непрерывна на нем, т. е. для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых $\xi \in [a, b]$ и $|\Delta x| < \delta$ выполняется

$$\left| \frac{\partial g(\xi, x + \Delta x)}{\partial x} - \frac{\partial g(\xi, x)}{\partial x} \right| < \frac{\varepsilon}{C}, \quad \text{где } C = \int_a^b h(\xi) d\xi.$$

Поскольку $\theta_\xi \in (0, 1)$, справедлива оценка

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b h(\xi) \frac{g(\xi, x + \Delta x) - g(\xi, x)}{\Delta x} d\xi - \int_a^b h(\xi) \frac{\partial g(\xi, x)}{\partial x} d\xi \right| \\ \leq \int_a^b h(\xi) \left| \frac{\partial g(\xi, x + \theta_\xi \Delta x)}{\partial x} - \frac{\partial g(\xi, x)}{\partial x} \right| d\xi \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

3. Решение задачи 1

Пусть отображение $f_t : \Pi^+ \rightarrow \Delta(t)$ переводит Π^+ на многоугольник $\Delta(t)$, $t \in [0, T]$. Пусть $f_t(\infty) =: A$ — некоторая фиксированная точка (возможно, вершина), принадлежащая границе многоугольника $\Delta(0)$, $t \in [0, T]$. Пусть $A_p(t) = A_p^0 + tB_p$ — вершины многоугольника $\Delta(t)$, $A_p(t) \neq A_0$, $t \in [0, T]$. Угол при вершине $A_p(t)$ равен $\alpha_p \pi$, $p = 1, \dots, n$, $t \in [0, T]$. Обозначим прообраз вершины $A_p(t)$ через $a_p(t)$, $p = 1, \dots, n$, пусть $-\infty < a_1(t) < a_2(t) < \dots < a_n(t) < +\infty$, $t \in [0, T]$. Отображение $f_0 = f(z, 0)$ известно, соответственно значения $a_p(0)$, $p = 1, \dots, n$, известны.

Параметры $a_p(t)$, $p = 1, \dots, n$, удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (8). Запишем ее в нормальной форме

$$\begin{cases} \dot{b}_p(t) = - \sum_{j=1, j \neq p}^n (\alpha_j - 1) \frac{(b_p(t) - b_j(t))^2}{a_p(t) - a_j(t)}, & p = 1, \dots, n, \\ \dot{a}_p(t) = b_p(t), & p = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Выражения, стоящие в правых частях, имеют непрерывные частные производные по a_p , b_p на отрезке $t \in [0, T]$, следовательно, по теореме существования и единственности решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений решение системы существует и единственно на отрезке $t \in [0, T]$ при заданных начальных значениях $a_p(0) =: a_{p,0}$, $b_p(0) = \dot{a}_p(0) =: a_{p,1}$, $p = 1, \dots, n$.

Теорема 3. При выполнении условий задачи 1 начальные данные $\dot{a}_p(0) = a_{p,1}$, $p = 1, \dots, n$, системы дифференциальных уравнений (8) удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\begin{aligned} (a_{p,1} - a_{p-1,1}) \left(\frac{\alpha_p + \alpha_{p-1} - 1}{a_{p,0} - a_{p-1,0}} \int_0^1 F_p(\xi) d\xi + \sum_{m=1, m \neq p, p-1}^n (\alpha_m - 1) \int_0^1 \xi \frac{F_p(\xi)}{y_{p,m}(\xi)} d\xi \right) \\ + \sum_{k=1, k \neq p, p-1}^n (a_{p-1,1} - a_{k,1}) (\alpha_k - 1) \int_0^1 \frac{F_p(\xi)}{y_{p,k}(\xi)} d\xi \\ = \frac{B_p - B_{p-1}}{c(a_{p,0} - a_{p-1,0})^{\alpha_p + \alpha_{p-1} - 1}}, \quad p = 2, \dots, n, \quad (10) \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n (\alpha_k - 1) a_{k,1} = 0, \tag{11}$$

где

$$y_{p,j}(\xi) = \xi(a_{p,0} - a_{p-1,0}) + a_{p-1,0} - a_{j,0},$$

$$F_p(\xi) = (\xi - 1)^{\alpha_p - 1} \xi^{\alpha_p - 1} \prod_{j=1, j \neq p, p-1}^n (y_{p,j}(\xi))^{\alpha_j - 1}, \quad p = 2, \dots, n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим равенства

$$\begin{aligned} L_p &:= f_t(a_p(t)) - f_t(a_{p-1}(t)) \\ &= c \int_{a_{p-1}(t)}^{a_p(t)} \prod_{j=1}^n (\zeta - a_j(t))^{\alpha_j - 1} d\zeta = t(B_p - B_{p-1}), \quad p = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Дифференцируя по t , получим

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial L_p}{\partial a_k} \dot{a}_k(t) = B_p - B_{p-1}, \quad p = 2, \dots, n. \tag{12}$$

Найдем частную производную L_p , $p = 2, \dots, n$, по a_k , $k = 1, \dots, n$. Сделаем замену в интеграле $\zeta = \xi(a_p - a_{p-1}) + a_{p-1}$, запишем L_p в виде

$$L_p = c(a_p - a_{p-1})^{\alpha_p + \alpha_{p-1} - 1} \int_0^1 h_p(\xi) g(\xi, a_k) d\xi =: (a_p - a_{p-1})^{\alpha_p + \alpha_{p-1} - 1} J_p,$$

где

$$g(\xi, a_k) = \prod_{j=1, j \neq p, p-1}^n (\xi(a_p - a_{p-1}) + a_{p-1} - a_j)^{\alpha_j - 1}.$$

Функция $g(\xi, a_k)$ непрерывна вместе с частной производной $\frac{\partial g(\xi, a_k)}{\partial a_k}$ в прямоугольнике $\{(\xi, a_k) : \xi \in [0, 1], a_k \in [a_k(0) - \varepsilon, a_k(0) + \varepsilon]\}$, и интеграл $\int_0^1 h_p(\xi) d\xi$ сходится, следовательно, согласно лемме 2

$$\frac{\partial J_p}{\partial a_k} = \frac{\partial}{\partial a_k} \int_0^1 h_p(\xi) g(\xi, a_k) d\xi = \int_0^1 h_p(\xi) \frac{\partial g(\xi, a_k)}{\partial a_k} d\xi.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{c} \frac{\partial L_p}{\partial a_k} = J_p \frac{\partial}{\partial a_k} (a_p - a_{p-1})^{\alpha_p + \alpha_{p-1} - 1} + (a_p - a_{p-1})^{\alpha_p + \alpha_{p-1} - 1} \frac{\partial J_p}{\partial a_k}, \quad p = 2, \dots, n. \tag{13}$$

Записывая систему (12) при $t = 0$, после преобразований с учетом формулы (13) получим (10). Дифференцируя (9) по t и устремив t к нулю, придем к (11). Теорема 3 доказана.

4. Решение задачи 2

Пусть отображение $f_t : \Pi^+ \rightarrow \Delta(t)$ переводит Π^+ на многоугольник $\Delta(t)$, $t \in [0, T]$. Пусть $f_t(\infty) =: A$ — некоторая фиксированная точка (возможно, вершина), принадлежащая границе многоугольника $\Delta(0)$, $t \in [0, T]$. Пусть $A_p(t)$ — вершины многоугольника $\Delta(t)$, $A_p(t) \neq A$, $t \in [0, T]$, $p = 1, \dots, n$. Угол при вершине $A_p(t)$ равен $\alpha_p \pi$, $t \in (0, T)$, $p = 1, \dots, n$. Две смежные вершины $A_1(t)$ и $A_n(t)$ перемещаются по закону $A_1(t) = A_0 + tB_1$, $A_n(t) = A_0 + tB_n$, совпадают между собой при $t = 0$ и не совпадают с другими вершинами при $t \in [0, T]$. Вершины A_2, \dots, A_{n-1} неподвижны. Обозначим прообраз вершины $A_p(t)$ через $a_p(t)$, $p = 1, \dots, n$, пусть $-\infty < a_2(t) < \dots < a_n(t) < a_1(t) < +\infty$, $t \in (0, T)$. Отображение $f_0 = f(z, 0)$ известно, соответственно значения $a_p(0)$, $p = 1, \dots, n$, известны.

Теорема 4. При выполнении условий задачи 2 система дифференциальных уравнений (8) имеет на промежутке $t \in [0, t_0)$ аналитическое относительно параметра $x = t^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_n - 1}}$ решение

$$a_p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{p,k} t^{\frac{k}{\alpha_1 + \alpha_n - 1}}, \quad p = 1, \dots, n, \quad (14)$$

где $a_{p,k}$, $p = 1, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots$, определяются формулами

$$a_{1,1} - a_{n,1} = \left(\left| \frac{B_n - B_1}{c} \prod_{p=2}^{n-1} (a_{1,0} - a_{p,0})^{1-\alpha_p} \left| \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_n)} \right|^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_n - 1}} \right), \quad (15)$$

$$a_{n,1} = -\frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_n - 1} a_{1,1}, \quad (16)$$

$$a_{p,1} = 0, \quad p = 2, \dots, n-1, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} a_{1,k} = & \left(C_k(\alpha_n - 1) - \sum_{j=2}^{n-1} (\alpha_j - 1) \right. \\ & \times \left. \left(\gamma_{k-2}^{(1,j)}(k^2 - k + 1 + \alpha_1(k-1) - k\alpha_n) + \gamma_{k-2}^{(n,j)}(\alpha_n - 1)(2k-1) \right) \right) \\ & \times (k(k-1)(k+1 - \alpha_1 - \alpha_n)(k-2 + \alpha_1 + \alpha_n))^{-1}, \\ a_{n,k} = & \left(-C_k(\alpha_1 - 1) - \sum_{j=2}^{n-1} (\alpha_j - 1) \right. \\ & \times \left. \left(\gamma_{k-2}^{(1,j)}(\alpha_1 - 1)(2k-1) + \gamma_{k-2}^{(n,j)}(k^2 - k + 1 + \alpha_n(k-1) - k\alpha_1) \right) \right) \\ & \times (k(k-1)(k+1 - \alpha_1 - \alpha_n)(k-2 + \alpha_1 + \alpha_n))^{-1}, \quad (18) \end{aligned}$$

$$a_{p,k} = -\frac{1}{k(k+1 - \alpha_1 - \alpha_n)} \sum_{j=1}^n (\alpha_j - 1) \gamma_{k-2}^{(p,j)}, \quad p = 2, \dots, n-1,$$

где

$$C_2 = 0, \quad C_k = \frac{k(k+1 - \alpha_1 - \alpha_n)}{b_1^{(n,1)}} \sum_{j=1}^{k-2} b_{k-j}^{(n,1)} ((j+1)(k-j)b_{j+1}^{(n,1)} - \gamma_j^{(n,1)}), \quad k = 3, 4, \dots,$$

$$\begin{aligned}
 -\gamma_0^{(1,n)} = \gamma_0^{(n,1)} = b_1^{(n,1)}, \quad \gamma_0^{(p,q)} &= \frac{(b_1^{(p,q)})^2}{b_0^{(p,q)}}, \quad p \neq q, \quad (p,q) \notin \{(1,n), (n,1)\}, \\
 -\gamma_k^{(1,n)} = \gamma_k^{(n,1)} &= \frac{1}{b_1^{(n,1)}} \left(c_k^{(n,1)} - \sum_{j=1}^k \gamma_{j-1}^{(n,1)} b_{k+2-j}^{(n,1)} \right), \quad k = 1, 2, \dots, \\
 \gamma_k^{(p,q)} &= \frac{1}{b_0^{(p,q)}} \left(c_k^{(p,q)} - \sum_{j=1}^k \gamma_{j-1}^{(p,q)} b_{k+1-j}^{(p,q)} \right), \quad p \neq q, \quad (p,q) \notin \{(1,n), (n,1)\}, \quad k = 1, 2, \dots, \\
 \gamma_k^{(p,p)} = 0, \quad c_k^{(p,q)} &= \sum_{j=1}^{k+1} j(k+2-j) b_j^{(p,q)} b_{k+2-j}^{(p,q)}, \quad b_k^{(p,q)} = a_{p,k} - a_{q,k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать для определенности, что $-\infty < a_2(t) < \dots < a_n(t) \leq a_1(t) < \infty$ (бесконечность отображается в фиксированную точку — вершину многоугольника или точку на ребре многоугольника).

Рассмотрим равенство

$$|A_n(t)A_1(t)| = |B_n - B_1|t = \left| c \int_{a_1(t)}^{a_n(t)} \prod_{p=1}^n (\xi - a_p(t))^{\alpha_p - 1} d\xi \right|.$$

Выполнив замену $\xi = \zeta(a_n(t) - a_1(t)) + a_1(t)$, получим

$$|B_n - B_1|t = \left| c(a_n(t) - a_1(t))^{\alpha_1 + \alpha_n - 1} \int_0^1 \zeta^{\alpha_1 - 1} (1 - \zeta)^{\alpha_n - 1} g(\zeta, t) d\zeta \right|,$$

где

$$g(\zeta, t) = \prod_{p=2}^{n-1} (\zeta(a_n(t) - a_1(t)) - a_p(t) + a_1(t))^{\alpha_p - 1}.$$

По теореме о среднем

$$|B_n - B_1|t = \left| c g(\theta, t) (a_n(t) - a_1(t))^{\alpha_1 + \alpha_n - 1} \int_0^1 \zeta^{\alpha_1 - 1} (1 - \zeta)^{\alpha_n - 1} d\zeta \right|, \quad (19)$$

где $g(\theta, t)$ — непрерывная функция, $\theta \in [0, 1]$, $t \in [0, T]$.

Учитывая, что $\int_0^1 \zeta^{\alpha_1 - 1} (1 - \zeta)^{\alpha_n - 1} d\zeta = \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_n)}$, где Γ — гамма функция,

перепишем равенство (19) в виде

$$\frac{1}{t} (a_1(t) - a_n(t))^{\alpha_1 + \alpha_n - 1} = \left| \frac{B_n - B_1}{c g(\theta, t)} \right| \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_n)}. \quad (20)$$

Заметим, что

$$\lim_{t \rightarrow +0} g(\theta, t) = \prod_{p=2}^{n-1} (a_1(0) - a_p(0))^{\alpha_p - 1},$$

поэтому предел правой части (20) при t , стремящемся к нулю справа, существует и отличен от нуля, следовательно, должен существовать предел левой части. Отсюда можно заключить, что

$$a_p(t) = a_{p,0} + a_{p,q_1} t^{\psi_1} + \dots + a_{p,q_s} t^{\psi_s} + a_{p,1} t^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_n - 1}} + o(t^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_n - 1}}), \quad p = 1, n, \quad (21)$$

где $\alpha_1 + \alpha_n - 1 > 0$, $\psi_1 < \dots < \psi_s < \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_n - 1}$, $a_{1,q_j} = a_{n,q_j}$, $j = 1, \dots, s$, и выполняется равенство (15).

В силу того, что $a_p(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (8), заключаем, что разложение (21) справедливо при $p = 1, \dots, n$.

Предположим, что a_{p,q_1} , $p = 1, \dots, n$, в разложении (21) не обращаются все одновременно в нуль. Выполним замену $t^{\psi_1} = \tau$, сохранив за параметрами прежние обозначения. Тогда $\frac{da_p(0)}{d\tau} = a_{p,q_1}$, $p = 1, \dots, n$.

Рассмотрим равенства

$$L_2 = f_\tau(a_2(\tau)) - f_\tau(-\infty) = c \int_{-\infty}^{a_2(\tau)} \prod_{j=1}^n (\zeta - a_j(\tau))^{\alpha_j - 1} d\zeta,$$

$$L_p = f_\tau(a_p(\tau)) - f_\tau(a_{p-1}(\tau)) = c \int_{a_{p-1}(\tau)}^{a_p(\tau)} \prod_{j=1}^n (\zeta - a_j(\tau))^{\alpha_j - 1} d\zeta, \quad p = 3, \dots, n-1.$$

Дифференцируя по τ , получим

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial L_p}{\partial a_k} \dot{a}_k(\tau) = \frac{dL_p}{d\tau}, \quad p = 2, \dots, n-1. \quad (22)$$

В силу того, что $L_2 = A_2 - f_\tau(\infty)$, $L_p = A_p - A_{p-1}$ не зависят от τ , в правой части уравнений (22) стоят нули. Частную производную L_p , $p = 3, \dots, n-1$, по a_k , $k = 1, \dots, n$, можно найти по аналогии с (13). Найдем производную L_2 по a_k , $k = 1, \dots, n$. Выполним в формуле для L_2 замену $\zeta = 1 + a_2 - \frac{1}{\xi}$, запишем L_2 в виде

$$L_2 = c \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)^{\alpha_2 - 1} \prod_{j=1, j \neq 2}^n \left(1 + a_2 - a_j - \frac{1}{\xi}\right)^{\alpha_j - 1} \frac{1}{\xi^2} d\xi$$

или с учетом того, что $\sum_{j=1}^n \alpha_j - n + 2 = 1 - \alpha$, где $\alpha\pi$ — угол при вершине $f_t(\infty)$ ($\alpha = 1$, если $f_t(\infty)$ — точка, принадлежащая ребру многоугольника), в виде

$$L_2 = c \int_0^1 \xi^{\alpha - 1} (\xi - 1)^{\alpha_2 - 1} \prod_{j=1, j \neq 2}^n (\xi(1 + a_2 - a_j) - 1)^{\alpha_j - 1} d\xi.$$

Тогда

$$\frac{\partial L_2}{\partial a_k} = c \int_0^1 \xi^{\alpha - 1} (\xi - 1)^{\alpha_2 - 1} \frac{\partial}{\partial a_k} \prod_{j=1, j \neq 2}^n (\xi(1 + a_2 - a_j) - 1)^{\alpha_j - 1} d\xi.$$

Запишем уравнения (22) в точке $\tau = 0$ и исключим из них $a_1(0) = a_{1,q_1}$ и $a_n(0) = a_{n,q_1}$, используя соотношение (9) и условие $a_{1,q_1} = a_{n,q_1}$. Получим линейную систему

$$\sum_{k=2}^{n-1} a_{k,q_1} \left(\frac{\partial L_p}{\partial a_k} - \frac{\alpha_k - 1}{\alpha_1 + \alpha_n - 2} \left(\frac{\partial L_p}{\partial a_1} + \frac{\partial L_p}{\partial a_n} \right) \right) \Big|_{\tau=0} = 0, \quad p = 2, \dots, n-1,$$

из $n - 2$ уравнений относительно $n - 2$ неизвестных a_{k,q_1} , $k = 2, \dots, n - 1$. Поскольку данная система имеет решение при ненулевой правой части, определитель системы отличен от нуля. Следовательно, $a_{k,q_1} = 0$, $k = 2, \dots, n - 1$, и из соотношения (9) и условия $a_{1,q_1} = a_{n,q_1}$ вытекает, что $a_{1,q_1} = a_{n,q_1} = 0$; противоречие. Таким образом, разложение (21) имеет вид $a_p = a_{p,0} + a_{p,1}t^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_n - 1}} + o(t^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_n - 1}})$, $p = 1, \dots, n$.

Выполним замену $t^{\frac{1}{\varphi}} = x$, где $\varphi = \alpha_1 + \alpha_n - 1$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{\varphi} t^{\frac{1}{\varphi} - 1} = \frac{1}{\varphi} x^{1 - \varphi}, & \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{1 - \varphi}{\varphi^2} t^{\frac{1}{\varphi} - 2} = \frac{1 - \varphi}{\varphi^2} x^{1 - 2\varphi}, \\ \frac{da}{dt} &= \frac{da}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{x^{1 - \varphi}}{\varphi} \frac{da}{dx}, \\ \frac{d^2a}{dt^2} &= \frac{d^2a}{dx^2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{da}{dx} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{x^{2 - 2\varphi}}{\varphi^2} \frac{d^2a}{dx^2} + \frac{1 - \varphi}{\varphi^2} x^{1 - 2\varphi} \frac{da}{dx}. \end{aligned}$$

Сохранив за неизвестными функциями прежние обозначения, запишем систему (8) с учетом данной замены:

$$x\ddot{a}_p(x) + (1 - \varphi)\dot{a}_p(x) + x \sum_{j=1, j \neq p}^n (\alpha_j - 1) \frac{(\dot{a}_p(x) - \dot{a}_j(x))^2}{a_p(x) - a_j(x)} = 0, \quad p = 1, \dots, n. \quad (23)$$

Подставляя в уравнения системы (23) ряды $a_p(x) = a_{p,0} + a_{p,1}x + o(x)$, находим, что коэффициенты $a_{1,1}$, $a_{n,1}$ удовлетворяют соотношению (16).

Из уравнений системы (23) при $p = 2, \dots, n - 1$ получаем равенства (17) для $a_{p,1}$, $p = 2, \dots, n - 1$.

Равенства (17) можно получить из системы уравнений (22) и равенства (16). Действительно, положим $a_{1,0} = a_{n,0} =: \sigma$ и заметим, что при $x = 0$

$$\frac{\partial L_p}{\partial a_1} = (1 - \alpha_1)L, \quad \frac{\partial L_p}{\partial a_n} = (1 - \alpha_n)L,$$

где

$$\begin{aligned} L &= (a_{p,0} - a_{p-1,0})^{\alpha_p + \alpha_{p-1} - 1} \int_0^1 (\xi - 1)^{\alpha_p - 1} \xi^{\alpha_{p-1} - 1} \\ &\quad \times \frac{\prod_{j \neq p, p-1} (\xi(a_{p,0} - a_{p-1,0}) + a_{p-1,0} - a_{j,0})^{\alpha_j - 1}}{\xi(a_{p,0} - a_{p-1,0}) + a_{p-1,0} - \sigma} d\xi. \end{aligned}$$

Тогда систему уравнений (23) при $x = 0$ можно записать в виде

$$\sum_{k=2}^{n-1} a_{k,1} \frac{\partial L_p}{\partial a_k} \Big|_{x=0} + L(a_{1,1}(1 - \alpha_1) + a_{n,1}(1 - \alpha_n)) = 0$$

или, учитывая равенство (16), в виде

$$\sum_{k=2}^{n-1} a_{k,1} \frac{\partial L_p}{\partial a_k} \Big|_{x=0} = 0,$$

откуда получаем (17).

Можно доказать по индукции, что $a_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{p,k}x^k$, $p = 1, \dots, n$. Действительно, предположим, что $a_p(x) = a_{p,0} + a_{p,1}x + \dots + a_{p,k}x^k + a_{p,q}x^\psi + O(x^{k+1})$, $k < \psi < k + 1$, $p = 1, \dots, n$. Подставляя эти ряды в систему уравнений (23), находим $a_{p,q} = 0$, $p = 1, \dots, n$.

Итак, будем искать решение системы (23) в виде рядов $a_p(x) = a_{p,0} + a_{p,1}x + \dots + a_{p,k}x^k + \dots$, $p = 1, \dots, n$. Подставляя ряды в систему (23) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , после преобразований получаем для коэффициентов $a_{p,k}$, $p = 1, \dots, n$, $k = 2, 3, 4, \dots$, формулы (18). Теорема 4 доказана.

5. Решение задачи 3

Пусть отображение $f_t : \Pi^+ \rightarrow \Delta(t)$ переводит Π^+ на многоугольник $\Delta(t)$, $t \in [0, T)$, представляющий собой многоугольник $\Delta(0)$ с разрезом длины $t|B_0|$ от некоторой точки границы многоугольника $\Delta(0)$ до внутренней точки $A_0(t)$ многоугольника $\Delta(0)$. Пусть $f_t(\infty) =: A$ — некоторая фиксированная точка (возможно, вершина), принадлежащая границе многоугольника $\Delta(0)$, $t \in [0, T)$. Пусть $A_p(t)$ — вершины многоугольника $\Delta(t)$, $A_p(t) \neq A$, $t \in [0, T)$, $p = 0, 1, \dots, n$. Угол при вершине A_p равен $\alpha_p\pi$, $t \in (0, T)$, $k = 1, \dots, n$, угол при вершине $A_0(t)$ равен $2\pi =: \alpha_0\pi$. Вершина $A_0(t)$ перемещается по закону $A_0(t) = A_0^0 + tB_0$ и совпадает при $t = 0$ с вершинами A_1 и A_n . Вершины A_1, \dots, A_n неподвижны, $t \in [0, T)$. Обозначим прообраз вершины A_p через $a_p(t)$, $p = 0, 1, \dots, n$, пусть $-\infty < a_2(t) < \dots < a_n(t) < a_0(t) < a_1(t) < +\infty$, $t \in (0, T)$. Отображение $f_0 = f(z, 0)$ известно, соответственно значения $a_p(0)$, $p = 0, 1, \dots, n$, известны.

Рассмотрим сначала один частный случай.

В [24] (ср. [1, гл. II, § 3]) получено отображение верхней полуплоскости на полуплоскость с прямолинейным разрезом переменной длины, выходящим из начала координат под фиксированным углом к положительной части вещественной оси. Построив композицию этого отображения со степенным отображением, запишем отображение $g = g(z, t)$, $t > 0$, верхней полуплоскости на сектор $\{w \in \mathbb{C} : 0 < \arg w < (\alpha + \beta)\pi\}$ с прямолинейным разрезом длины t , выходящим из начала координат под углом $\alpha\pi$ к положительной части вещественной оси:

$$g(z, t) = (z - a(t))^\alpha (z - b(t))^\beta,$$

где $a(t) = t^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$, $b(t) = -t^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$ — прообразы вершин, находящихся в начале координат с углами $\alpha\pi$ и $\beta\pi$ соответственно, или в интегральном виде

$$g(z, t) = (\alpha + \beta) \int_{z_0}^z (\zeta - \lambda(t)) (\zeta - a(t))^{\alpha-1} (\zeta - b(t))^{\beta-1} d\zeta + g(z_0, t),$$

где $\lambda(t) = \frac{\beta a(t) + \alpha b(t)}{\alpha + \beta}$ — прообраз подвижного конца разреза. Отображение g удовлетворяет нормировке (2).

В силу того, что $g(\lambda(t), t) - g(b(t), t) = g(\lambda(t), t) - g(a(t), t) = t$, справедливо равенство

$$\int_b^\lambda (\xi - \lambda)(\xi - a)^{\alpha-1} (\xi - b)^{\beta-1} d\xi = - \int_\lambda^a (\xi - \lambda)(\xi - a)^{\alpha-1} (\xi - b)^{\beta-1} d\xi.$$

В интеграле в левой части равенства выполнив замену $\zeta = \xi(a - \lambda) + \lambda$, а в интеграле в правой части — замену $\zeta = \xi(b - \lambda) + \lambda$, получим

$$\int_0^1 \zeta(\zeta - 1)^{\beta-1}(\zeta - X)^{\alpha-1}d\zeta = -X^{\alpha+\beta} \int_0^1 \zeta(\zeta - 1)^{\alpha-1}(\zeta - X^{-1})^{\beta-1}d\zeta, \quad (24)$$

где $X = \frac{a-\lambda}{b-\lambda}$.

В силу существования и единственности конформного отображения g уравнение (24) имеет единственное (вещественное) решение $X = -\frac{\alpha}{\beta}$ при $\alpha, \beta \in (0, 1) \cup (1, 2)$.

Теорема 5. При выполнении условий задачи 3 система дифференциальных уравнений (8) имеет на промежутке $t \in [0, t_0)$ аналитическое относительно параметра $x = t^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_n}}$ решение

$$a_p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{p,k} t^{\frac{k}{\alpha_1+\alpha_n}}, \quad p = 0, 1, \dots, n, \quad (25)$$

где $a_{p,k}, p = 0, 1, \dots, n, k = 1, 2, \dots$, определяются формулами

$$a_{p,1} = 0, \quad p = 2, \dots, n, \quad (26)$$

$$a_{1,1} = \alpha_n \nu, \quad a_{n,1} = -\alpha_1 \nu, \quad a_{0,1} = (\alpha_n - \alpha_1) \nu, \quad (27)$$

где

$$\nu = \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_n}{\alpha_1^{\alpha_1} \alpha_n^{\alpha_n}} \left| \frac{B_0}{c} \prod_{j=2}^{n-1} (a_{0,0} - a_{j,0})^{1-\alpha_j} \right| \right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_n}};$$

$$a_{11} = \alpha_n \nu, \quad a_{n1} = -\alpha_1 \nu, \quad a_{01} = (\alpha_n - \alpha_1) \nu, \quad (28)$$

где

$$\nu = \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_n}{\alpha_1^{\alpha_1} \alpha_n^{\alpha_n}} \left| \frac{B_0}{c} \prod_{j=2}^{n-1} (a_{00} - a_{j0})^{1-\alpha_j} \right| \right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_n}};$$

$$\begin{aligned} & a_{0,k}(k^2 - 4k + 2 + (k - 1)(\alpha_1 + \alpha_n)) - a_{1,k}(2k - 1)(\alpha_1 - 1) - a_{n,k}(2k - 1)(\alpha_n - 1) \\ &= (1 - \alpha_1)C_k^{(0,1)} + (1 - \alpha_n)C_k^{(0,n)} + \sum_{j=2}^{n-1} (1 - \alpha_j)\gamma_{k-2}^{(0,j)}, \quad k = 3, 4, \dots, \\ & - a_{0,k}(2k - 1) + a_{1,k}(k^2 - k\alpha_1 + \alpha_n(k - 1)) - a_{n,k}(2k - 1)(\alpha_n - 1) \\ &= C_k^{(0,1)} + (1 - \alpha_n)C_k^{(1,n)} + \sum_{j=2}^{n-1} (1 - \alpha_j)\gamma_{k-2}^{(1,j)}, \quad k = 3, 4, \dots, \\ & - a_{0,k}(2k - 1) - a_{1,k}(2k - 1)(\alpha_1 - 1) + a_{n,k}(k^2 + \alpha_1(k - 1) - k\alpha_n) \\ &= C_k^{(0,n)} - (1 - \alpha_1)C_k^{(1,n)} + \sum_{j=2}^{n-1} (1 - \alpha_j)\gamma_{k-2}^{(n,j)}, \quad k = 3, 4, \dots, \\ & a_{p,k} = \frac{1}{k(k - \alpha_1 - \alpha_n)} \sum_{j=0}^n (1 - \alpha_j)\gamma_{k-2}^{(p,j)}, \quad p = 2, \dots, n - 1, \quad k = 3, 4, \dots, \quad (29) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 C_k^{(p,q)} &= \frac{1}{b_1^{(p,q)}} \sum_{j=1}^{k-2} b_{k-j}^{(p,q)} ((j+1)(k-j)b_{j+1}^{(p,q)} - \gamma_j^{(p,q)}), \quad k = 3, 4, \dots, \\
 -\gamma_0^{(q,p)} &= \gamma_0^{(p,q)} = b_1^{(p,q)}, \quad p \neq q, \quad p, q \in \{0, 1, n\}, \\
 \gamma_0^{(p,q)} &= \frac{(b_1^{(p,q)})^2}{b_0^{(p,q)}}, \quad p \neq q, \quad (p, q) \notin \{(p, q) : p, q \in \{0, 1, n\}\}, \\
 -\gamma_k^{(q,p)} &= \gamma_k^{(p,q)} = \frac{1}{b_1^{(p,q)}} \left(c_k^{(p,q)} - \sum_{j=1}^k \gamma_{j-1}^{(p,q)} b_{k+2-j}^{(p,q)} \right), \quad p, q \in \{0, 1, n\}, \quad k = 1, 2, \dots, \\
 \gamma_k^{(p,q)} &= \frac{1}{b_0^{(p,q)}} \left(c_k^{(p,q)} - \sum_{j=1}^k \gamma_{j-1}^{(p,q)} b_{k+1-j}^{(p,q)} \right), \\
 p \neq q, \quad (p, q) &\notin \{(p, q) : p, q \in \{0, 1, n\}\}, \quad k = 1, 2, \dots, \\
 \gamma_k^{(p,p)} &= 0, \quad c_k^{(p,q)} = \sum_{j=1}^{k+1} j(k+2-j)b_j^{(p,q)}b_{k+2-j}^{(p,q)}, \quad b_k^{(p,q)} = a_{p,k} - a_{q,k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть отображение $g : \Pi^+ \times [0, \tau_0) \rightarrow \Delta(\tau)$ при фиксированном τ голоморфно и однолистно переводит Π^+ на многоугольник $\Delta(\tau)$. Пусть $g(\infty, \tau) =: A$ — фиксированная точка (возможно, вершина), принадлежащая границе многоугольника $\Delta(0)$, и отображение g удовлетворяет одной из нормировок (2)–(6). Тогда композиция $\omega(z, \tau) = g^{-1}(g(z, \tau), 0)$ имеет на бесконечности разложение

$$\omega(z, \tau) = z + \frac{c_1(\tau)}{z} + \frac{c_2(\tau)}{z^2} + \dots$$

Параметризацию семейства g можно выбрать так, что $c_1(\tau) = -\tau$, тогда отображение $g(z, \tau)$ удовлетворяет [25] уравнению Левнера

$$\frac{\partial g(z, \tau)}{\partial \tau} + \frac{1}{z - \lambda(\tau)} \frac{\partial g(z, \tau)}{\partial z} = 0, \quad g(z, 0) = g_0(z), \quad g_0 : \Pi^+ \rightarrow \Delta(0), \quad (30)$$

где $\lambda(\tau)$ — прообраз вершины $A_0(\tau)$ при отображении g . Параметры $\tilde{a}_p(\tau)$ отображения g (прообразы неподвижных вершин A_p многоугольника $\Delta(t)$ при отображении g) удовлетворяют [26] системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d\tilde{a}_p(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{\tilde{a}_p(\tau) - \lambda(\tau)}, \quad p = 1, \dots, n. \quad (31)$$

Известно [26–28], что управляющая функция $\lambda(\tau)$, а также $\tilde{a}_p(\tau)$ имеет разложение

$$\lambda(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \tau^{\frac{k}{2}}, \quad \lambda_1 \neq 0. \quad (32)$$

Рассмотрим теперь отображение $f : \Pi^+ \times [0, T) \rightarrow \Delta(t)$, переводящее при фиксированном t полуплоскость Π^+ на многоугольник $\Delta(t)$ с разрезом длины $t|B_0|$. Отображение f продолжается в нижнюю полуплоскость через любой отрезок вещественной оси, не содержащий точек $a_p(t)$. Различные ветви φ, ψ связаны между собой следующим образом: $\varphi(z, t) = M_{\varphi\psi}\psi(z, t) + L_{\varphi\psi}$ (ср. [23,

теорема 1]). Поэтому $\frac{\dot{\varphi}(z,t)}{\varphi'(z,t)} = \frac{\dot{\psi}(z,t)}{\psi'(z,t)}$ (точка над функцией означает частную производную по t , штрих — по z) и, следовательно, функция $\frac{\dot{f}}{f'}$ продолжается из верхней полуплоскости в нижнюю через любой отрезок вещественной оси, не содержащий точек $a_p(t)$, однозначным образом.

В окрестности точки $a_0(t)$ отображение $f = f(z, t) = f_t(z)$ раскладывается в ряд

$$f(z, t) = A_0(t) + c_{0,1}(t)(z - a_0(t))^2 + c_{0,2}(t)(z - a_0(t))^3 + \dots,$$

тогда

$$\begin{aligned} \dot{f}(z, t) &= B_0 - 2\dot{a}_0(t)c_{0,1}(t)(z - a_0(t)) + (\dot{c}_{0,1} - 3\dot{a}_0(t)c_{0,2}(t))(z - a_0(t))^2 + \dots, \\ f'(z, t) &= 2c_{0,1}(t)(z - a_0(t)) + 3c_{0,2}(t)(z - a_0(t))^2 + \dots, \end{aligned} \quad (33)$$

следовательно, отображение $\frac{\dot{f}}{f'}$ раскладывается в окрестности точки $a_0(t)$ в ряд

$$\frac{\dot{f}(z, t)}{f'(z, t)} = \frac{B_0}{2c_{0,1}(t)} \frac{1}{z - a_0(t)} + O(1).$$

Аналогично можно показать, что $\frac{\dot{f}}{f'}$ голоморфно в остальной части комплексной плоскости $\mathbb{C} \setminus \{a_0(t)\}$ и раскладывается на бесконечности в ряд

$$\frac{\dot{f}(z, t)}{f'(z, t)} = \frac{c_{1,\infty}}{z} + \frac{c_{2,\infty}}{z^2} + \dots$$

Следовательно, по теореме Лиувилля

$$\frac{\dot{f}(z, t)}{f'(z, t)} = \frac{B_0}{2c_{0,1}(t)} \frac{1}{z - a_0(t)},$$

т. е.

$$\frac{\partial f(z, t)}{\partial t} - \frac{B_0}{2c_{0,1}(t)} \frac{1}{z - a_0(t)} \frac{\partial f(z, t)}{\partial z} = 0, \quad f(z, 0) = f_0(z), \quad f_0 : \Pi^+ \rightarrow \Delta(0).$$

Сравнивая это уравнение и уравнение (30), заключаем, что параметризации семейств отображений g и f связаны следующим образом:

$$\frac{dt}{d\tau} = -\frac{2}{B_0} c_{0,1}(t(\tau)).$$

Раскладывая правую часть (1) в окрестности точки $a_0(t)$ и сравнивая с разложением (33), находим $c_{0,1}(t) = \frac{c}{2} \prod_{j=1}^n (a_0(t) - a_j(t))^{\alpha_j - 1}$. Композиция $a_p(t(\tau))$ раскладывается в ряд вида (32). Учитывая, что $a_0(0) = a_1(0) = a_n(0) \neq a_p(0)$, $p = 2, \dots, n - 1$, имеем

$$\frac{dt}{d\tau} = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \tau^{\frac{\alpha_1 + \alpha_n - 2 + k}{2}}, \quad \gamma_0 \neq 0.$$

Интегрируя при условии $\tau(t)|_{t=0} = 0$, находим

$$t = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\gamma}_k \tau^{\frac{\alpha_1 + \alpha_n + k}{2}}, \quad \tilde{\gamma}_0 \neq 0.$$

Обращая этот ряд, имеем

$$\tau(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\gamma}_k t^{\frac{2+k}{\alpha_1+\alpha_n}}, \quad \hat{\gamma}_0 \neq 0.$$

Подставляя этот ряд в (32), получаем

$$\lambda(\tau(t)) = a_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{0,k} t^{\frac{k}{\alpha_1+\alpha_n}}, \quad a_{0,1} \neq 0.$$

Итак, параметры $a_p(t)$, $p = 0, 1, \dots, n$, имеют разложение вида (25).

Найдем коэффициенты $a_{1,1}$, $a_{n,1}$ и $a_{0,1}$. В силу того, что $f_t(\lambda(t)) - f_t(b(t)) = f_t(\lambda(t)) - f_t(a(t)) = tB_0$, справедливы равенства

$$-c \int_{a_0}^{a_1} \prod_{j=0}^n (\xi - a_j)^{\alpha_j - 1} d\xi = tB_0 = c \int_{a_n}^{a_0} \prod_{j=0}^n (\xi - a_j)^{\alpha_j - 1} d\xi.$$

В интеграле в левом равенстве выполним замену $\xi = \zeta(a_1 - a_0) + a_0$, в интеграле в правом равенстве — замену $\xi = \zeta(a_n - a_0) + a_0$. Разделив обе части этих равенств на t и устремив t к нулю, получим

$$B_0 = -c(a_{1,1} - a_{0,1})^{\alpha_1 + \alpha_n - 1} \prod_{j=2}^{n-1} (a_{0,0} - a_{j,0})^{\alpha_j - 1} \int_0^1 \zeta(\zeta - 1)^{\alpha_1 - 1} (\zeta - X^{-1})^{\alpha_n - 1} d\zeta,$$

$$B_0 = c(a_{n,1} - a_{0,1})^{\alpha_1 + \alpha_n - 1} \prod_{j=2}^{n-1} (a_{0,0} - a_{j,0})^{\alpha_j - 1} \int_0^1 \zeta(\zeta - 1)^{\alpha_n - 1} (\zeta - X)^{\alpha_1 - 1} d\zeta,$$

где $X = \frac{a_{1,1} - a_{0,1}}{a_{n,1} - a_{0,1}}$. Приравняв правые части этих равенств, получим уравнение (24), следовательно,

$$X = \frac{a_{1,1} - a_{0,1}}{a_{n,1} - a_{0,1}} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_n}. \quad (34)$$

Перейдя в уравнении (31) к параметру $x = (t(\tau))^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_n}}$, получим

$$\frac{da_p(x)}{dx} = -x^{\alpha_1 + \alpha_n - 1} \frac{B_0}{c} \frac{\alpha_1 + \alpha_n}{a_p(x) - a_0(x)} \prod_{j=1}^n (a_0(x) - a_j(x))^{1 - \alpha_j}, \quad p = 1, \dots, n. \quad (35)$$

Подставляя в эти уравнения ряды (25) и устремляя x к нулю, получаем (26) и

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= \tilde{C}(a_{1,1} - a_{0,1})^{-\alpha_1} (a_{0,1} - a_{n,1})^{1 - \alpha_n}, \\ a_{n,1} &= -\tilde{C}(a_{1,1} - a_{0,1})^{1 - \alpha_1} (a_{0,1} - a_{n,1})^{-\alpha_n}, \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$\tilde{C} = (\alpha_1 + \alpha_n) \left| \frac{B_0}{c} \prod_{j=2}^{n-1} (a_{0,0} - a_{j,0})^{1 - \alpha_j} \right|.$$

Из соотношения (9) и равенств (26) имеем

$$a_{0,1} + (\alpha_1 - 1)a_{1,1} + (\alpha_n - 1)a_{n,1} = 0. \quad (37)$$

С помощью равенств (34), (37) и одного из равенств (36) получаем равенства (27) для $a_{0,1}$, $a_{1,1}$ и $a_{n,1}$.

Раскладывая уравнения (35) по степеням x , приходим к равенствам (28) для $a_{p,2}$, $p = 0, 1, \dots, n$.

Подставляя ряды (25) в уравнения (23) при $\varphi = \alpha_1 + \alpha_n$, находим формулы (29) для остальных коэффициентов рядов (25). Заметим, что формулы (29) остаются справедливыми при $k = 2$ (и $C_2^{(p,q)} = 0$), если $\varphi \neq 2$.

Теорема 5 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Лань, 2002.
2. Коппенфельс В., Штальман Ф. Практика конформных отображений. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
3. Стенин Н. П. Определение параметров в функции Кристоффеля — Шварца // Конформное отображение односвязных и многосвязных областей. М.; Л.: Гостехиздат, 1937. С. 47–79.
4. Хара И. С. Об одном методе приближенного конформного отображения многоугольных областей на единичный круг // Докл. АН УССР. 1953. № 4. С. 289–293.
5. Фильчаков П. Ф. Определение констант интеграла Кристоффеля — Шварца при помощи обобщенных степенных рядов // Некоторые проблемы математики и механики. К шестидесятилетию академика М. А. Лаврентьева. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1961. С. 236–252.
6. Lawrenson P. J., Gupta S. K. Conformal transformation employing direct-search techniques of minimisation // Proc. IEE. 1968. V. 115, N 3. P. 427–431.
7. Trefethen L. N. Numerical computation of the Schwarz — Christoffel transformation // SIAM J. Sci. Statistical Comput. 1980. V. 1, N 1. P. 82–102.
8. Driscoll T. A. Algorithm 756: A MATLAB toolbox for Schwarz — Christoffel mapping // ACM Trans. Math. Software. 1996. V. 22, N 2. P. 168–186.
9. Driscoll T. A., Trefethen L. N. Schwarz — Christoffel mapping. Cambridge: Camb. Univ. Press., 2002.
10. Papamichael N., Stylianopoulos N. S. Numerical conformal mapping: domain decomposition and the mapping of quadrilaterals. New Jersey; London; Singapore: World Sci., 2010.
11. Ищенко Н. В., Соболев В. В. Комплексный алгоритм построения конформного отображения неограниченной области на внешность круга и обратного отображения // Исследования по математическому анализу и алгебре. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1998. С. 10–17.
12. Соболев В. В. Численный метод конформного отображения полуплоскости в себя с гидродинамической нормировкой // Вестн. Томск. гос. ун-та. Математика и механика. 2003. № 280. С. 81–85.
13. Монахов В. Н. Об одном методе решения задач гидродинамики со свободными границами // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 5. С. 1106–1121.
14. Natarajan S., Bordas, S., Mahapatra, D. R. Numerical integration over arbitrary polygonal domains based on Schwarz–Christoffel conformal mapping // Int. J. Numer. Methods Eng. 2009. V. 80, N 1. P. 103–134.
15. Куфарев П. П. Об одном методе численного определения параметров в интеграле Шварца — Кристоффеля // Докл. АН СССР. 1947. Т. 57, № 6. С. 535–537.
16. Труды П. П. Куфарева: к 100-летию со дня рождения / Под общ. ред. И. А. Александрова. Томск: Изд-во науч.-техн. лит., 2009.
17. Gutlyanskii V. Ya., Zaidan A. O. On conformal mapping of polygonal regions // Ukr. Math. J. 1993. V. 45, N 11. P. 1669–1680.
18. Низамиева Л. Ю. О нахождении акцессорных параметров в интеграле Кристоффеля — Шварца // Потребительская кооперация: теория, методология, практика: Материалы Междунар. науч.-практ. конф. М.: Рос. ун-т кооперации, 2010. С. 313–319.
19. Накшпов Н. Н., Насыров С. Р. Параметрический метод нахождения акцессорных параметров в обобщенных интегралах Кристоффеля — Шварца // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2016. Т. 158, № 2. С. 202–220.

20. Байбарин Б. Г. Об одном численном способе определения параметров производной Шварца для функции, конформно отображающей полуплоскость на круговые области // Тр. Томск. гос. ун-та. 1966. Т. 189. С. 123–136.
21. Kolesnikov I. A. On the problem of determining parameters in the Schwarz equation // Issues Anal. 2018. V. 7, N 2. P. 50–62.
22. Колесников И. А. Нахождение параметров конформного отображения из полуплоскости на круговой многоугольник // Современная математика и ее приложения. М.: ВИНТИ, 2020. Т. 175. С. 56–68. (Итоги науки и техники).
23. Колесников И. А., Шарофов А. Х. Однопараметрическое семейство конформных отображений из полуплоскости на семейство многоугольников // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 5. С. 1027–1040.
24. Борисова Я. В., Колесников И. А., Копанев С. А. О малых вариационных формулах // Вестн. Томск. гос. ун-та. Математика и механика. 2017. № 49. С. 5–15.
25. Lawler G. F. Conformally invariant processes in the plane. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2005.
26. Александров И. А. Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976.
27. Marshall D. E., Rohde S. The Loewner differential equation and slit mappings // J. Amer. Math. Soc. 2005. V. 18, N 4. P. 763–778.
28. Prokhorov D., Zakharov A. Harmonic measures of sides of a slit perpendicular to the domain boundary // J. Math. Anal. Appl. 2012. V. 394. P. 738–743.

Поступила в редакцию 30 декабря 2020 г.

После доработки 25 мая 2021 г.

Принята к публикации 11 июня 2021 г.

Колесников Иван Александрович
Томский государственный университет,
пр. Ленина, 36, Томск 634050
ia.kolesnikov@mail.ru