

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. A. Bityurin, G. A. Lyubimov, Квазиодномерный анализ течения в канале МГД-генератора, *TVT*, 1969, Volume 7, Issue 5, 974–986

<https://www.mathnet.ru/eng/tvt7592>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.173

April 28, 2025, 12:17:36



УДК 532.542:538.4

КВАЗИОДНОМЕРНЫЙ АНАЛИЗ ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛЕ МГД-ГЕНЕРАТОРА

В. А. Битюрин, Г. А. Любимов

В предположении идеальности секционирования нагрузки и отсутствия концевых эффектов приводится система обыкновенных дифференциальных уравнений (гидравлическое приближение), которая приближенно описывает течение в канале МГД-генератора и учитывает основные пространственные эффекты, связанные с неоднородностью потока и неидеальностью изоляции канала.

1. Инженерный расчет канала МГД-генератора производится обычно на основе гидравлической (квазиодномерной) теории (см., например, [1]). Такая теория предполагает введение некоторых средних по сечению канала величин или, иными словами, введение идеального, канонического одномерного потока, который ставится в соответствии с действительным потоком в канале [2]. При построении канонического потока должны учитываться основные свойства течений, которые необходимо описать с приемлемой точностью в рамках данного канонического потока. Не останавливаясь на общих соображениях, связанных с введением канонического потока в гидравлической теории [2, 3], подчеркнем, что, так как распределения гидравлических и электродинамических параметров в конкретном течении во многом зависят от входных условий, электрических свойств стенок канала и внешней цепи, геометрии внешних полей и внешних токовых проводников и т. д., построение универсального канонического потока в принципе невозможно.

Наиболее распространенная гидравлическая теория [1] опирается на канонический поток с однородным распределением всех (гидравлических и электродинамических) параметров по сечению канала. Такая теория дает хорошие результаты в ряде задач газовой динамики [3, 4]. Она, по-видимому, будет хороша и для некоторых магнитогидродинамических задач, например для описания развившегося турбулентного течения жидкого металла в канале МГД-генератора вдали от входа в зону магнитного поля ($\sigma = \text{const}$, распределение скорости, давления, поперечного электрического поля и т. д. — близки к однородным).

При течении электропроводного газа в канале МГД-генератора могут возникнуть существенные неоднородности в распределении тех или иных параметров.

Из общих соображений ясно, что в этом случае целесообразно вводить в рассмотрение неоднородные (в плоскости поперечного сечения) канонические потоки.

Определение неоднородного канонического потока включает в себя конкретизацию дополнительных связей между различными средними величинами. Эти связи замыкают систему уравнений гидравлики и должны отражать в какой-то степени реальные свойства рассматриваемого течения. Такие связи могут вводиться по-разному. В [5], например, эти связи вводятся как линейные соотношения с неизвестными коэффициентами. Число таких коэффициентов оказывается весьма большим и их определение из экспериментальных данных довольно затруднительно.

В данной работе для получения необходимых связей между средними параметрами задаются профили некоторых газодинамических функций в плоскости поперечного сечения канала. Тем самым центр тяжести в вопросе соотношения канонического и действительного потоков переносится в соответствие заданных профилей действительным распределением в рассматриваемом сечении. Такой подход представляется более удобным, так как соответствующие профили, во-первых, могут быть измерены

непосредственно; во-вторых, можно ожидать, что, как и в обычной газовой динамике, эти распределения для некоторого класса течений будут близки между собой и, наконец, в-третьих, электрические характеристики генератора (как будет видно из дальнейшего) во многом определяются конкретным распределением газодинамических параметров, а не только их средними значениями.

2. Рассмотрим течение электропроводного газа в канале линейного МГД-генератора прямоугольного сечения при малых магнитных числах Рейнольдса. Допустим, что за счет неидеальности изоляции возможны

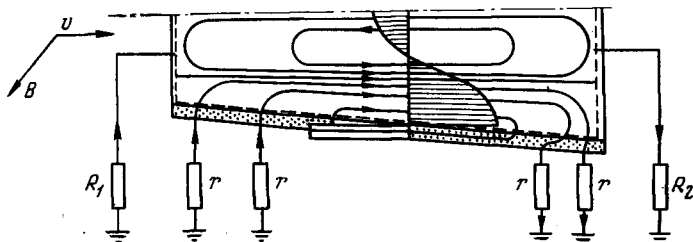


Рис. 1

замыкание поперечного и продольного тока по изоляционным стенкам; замыкание продольного тока по электродным стенкам, которые предполагаются идеально секционированными, утечки тока на землю с каждой пары электродов и на землю с концов канала (рис. 1). Изоляционные свойства стенок канала будем характеризовать их поверхностной проводимостью ($\sigma_w^{из}$, $\sigma_w^{эл}$). При этом полные продольные утечки в данном сечении определяются величиной

$$G_x(x) = 2 \int_{-a}^a \sigma_w^{из}(x, y) dy + 2 \int_{-b}^b \sigma_w^{эл}(x, z) dz, \quad (2.1)$$

где $2a$ и $2b$ — расстояния между электродными и изоляционными стенками канала соответственно. Удельные поперечные утечки определяются величиной

$$G_y(x, y) = 2\sigma_w^{из}l, \quad (2.2)$$

где l — длина одной секции электродной стенки.

Утечки на землю с электродной стенки определяются удельным сопротивлением r , а утечки на землю с концов канала соответственно сосредоточенными сопротивлениями R_1 и R_2 .

Будем считать, что к каждой паре электродов подключено сопротивление нагрузки R_0 , удельная величина которого обозначена через r_0 ($r_0 \equiv \equiv lR_0$), а в тех случаях, когда используется холловская э.д.с., к концам канала может быть присоединено сопротивление $R_{хол}$.

Будем считать канал длинным $L \gg \max\{a, b\}$ (или $L \gg \max\{a\beta, b\beta\}$, если параметр Холла $\beta > 1$). При оценках длину канала будем принимать за характерную длину изменения всех параметров вдоль канала. Естественно, что при этом пренебрегаем концевыми эффектами, которые могут быть учтены отдельно, например с помощью метода, развитого в [6, 7].

Будем считать известными термодинамические свойства газа

$$p = p(\rho, T), \quad h = h(\rho, T), \quad (2.3)$$

а также связи электропроводности газа и параметра Холла с термодинамическими параметрами, т. е.

$$\sigma = \sigma(p, T), \quad \beta/B \equiv \omega\tau/B = f(p, T), \quad (2.4)$$

Закон Ома будем использовать в следующем виде:

$$\mathbf{j} + (\omega\tau/B) [\mathbf{jB}] = \sigma(\mathbf{E} + [\mathbf{vB}]). \quad (2.5)$$

Чтобы получить уравнения гидравлической теории, возьмем уравнения магнитной гидродинамики в интегральной форме [8]. Считая задачу стационарной и выбирая в качестве объема интегрирования элемент канала, заключенный между двумя бесконечно близкими сечениями, получим при обычных предположениях и отсутствии вдува или отсоса газа через стенки канала

$$\frac{d}{dx} \iint_F \rho u d\Sigma = 0, \\ \frac{d}{dx} \left(\iint_F \rho u^2 d\Sigma + \iint_F p d\Sigma \right) = - \int_{\chi} \tau_w d\chi + \iint_F [\mathbf{jB}]_x d\Sigma, \quad (2.6)$$

$$\frac{d}{dx} \iint_F \rho u \left(h + \frac{u^2}{2} \right) d\Sigma = - \int_{\chi} q_w d\chi + \iint_F \mathbf{jE} d\Sigma.$$

Здесь $F = F(x)$ — площадь поперечного сечения канала, χ — периметр поперечного сечения, τ_w , q_w — сила трения и тепловой поток на стенке канала.

Уравнения (2.6) представляют собой уравнения гидравлики, но очевидно, что в таком виде они могут быть решены только в том случае, если их правые части выражены через расход m , средние по сечению потоки импульса I_* и теплосодержания H_*

$$m = \iint_F \rho u d\Sigma, \quad I_* = \iint_F (\rho u^2 + p) d\Sigma, \quad H_* = \iint_F \rho u \left(h + \frac{u^2}{2} \right) d\Sigma \quad (2.7)$$

и заданные электродинамические величины.

Определение канонического потока включает:

п. 2.1) определение связей между средними газодинамическими параметрами, представляющими интерес с точки зрения рассматриваемой задачи, и интегральными величинами (2.7);

п. 2.2) определение правых частей уравнений (2.6) через задаваемые при постановке задачи величины и интегральные величины (2.7).

3. Если рассматриваемое течение аппроксимируется однородным по газодинамическим параметрам каноническим потоком, то в качестве связей (п. 2.1) между газодинамическими параметрами и величинами

$$m, i_* \equiv I_* / m, \quad h_* \equiv H_* / m, \quad (3.1)$$

принимаются обычные соотношения газовой динамики для однородных потоков. Соответствующие формулы пересчета приведены, например, в [3] (о соответствии введенного таким образом канонического потока действительному течению в канале см. [2, 3]). Отметим, что вместо (3.1) можно вводить однородный канонический поток посредством параметров

$$m, h_*, s_* = \frac{1}{m} \iint_F \rho u S d\Sigma, \quad (3.2)$$

здесь S — энтропия единицы массы. При этом можно рассматривать не второе уравнение (2.6), а интегральное уравнение второго закона термодинамики, например, в следующей форме

$$\frac{d}{dx} m s_* = - \int_{\chi} \frac{q_w}{T} d\chi + \iint_F \frac{j^2}{\sigma T} d\Sigma + \iint_F \lambda \left(\frac{\nabla T}{T} \right)^2 d\Sigma \quad (3.3)$$

В (3.3) опущен член, связанный с вязкой диссипацией.

Если рассматриваемый действительный поток, который необходимо рассчитать, существенно неоднороден по газодинамическим параметрам, то величины, рассчитанные по параметрам (3.1) или (3.2), будут сильно отличаться от действительных средних значений, присущих данному потоку.

Чтобы рассчитать в этом случае распределение действительных средних характеристик потока по длине канала, введем неоднородный канонический поток, который будем характеризовать следующими распределениями:

$$u = U(x)\psi(y, z), \quad p = p(x), \quad h = H(x)\varphi(y, z). \quad (3.4)$$

Задание именно этих распределений диктуется соображениями удобства* и тем, что они могут быть измерены непосредственно и сравнены с модельными распределениями $\varphi(y, z)$, $\psi(y, z)$, принятыми для расчета.

Подставляя (3.4) в левые части уравнений (2.6), получим систему уравнений гидравлического приближения для определения функций $U(x)$, $p(x)$, $H(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(U\delta_1) &= 0, \\ \frac{d}{dx}(U^2\delta_2) + F \frac{dp}{dx} &= - \int_x \tau_w d\chi + \int_F [jB]_x d\Sigma, \\ \frac{d}{dx}(U^3\delta_3/2 + UH\delta^*) &= - \int_x q_w d\chi + \int_F jE d\Sigma. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь

$$\delta_n = \iint_F \rho \psi^n d\Sigma; \quad n = 1, 2, 3; \quad \delta^* = \iint_F \rho \psi \varphi d\Sigma. \quad (3.6)$$

При заданных распределениях (3.4) величины (3.6) являются функциями только x (зависят от x через ρ) и могут быть вычислены с помощью (3.4).

Если рассматриваемый поток однороден, то $\varphi = \psi = 1$ и $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta^* = \rho F$. При этом левые части уравнений (3.5) переходят в соответствующие члены уравнений простейшей гидравлической теории [1] причем величины $U(x)$, $H(x)$, $p(x)$ и т. д. представляют собой распределение истинных значений соответствующих параметров вдоль канала.

Отметим, что формально уравнения для однородного по сечению потока ($\varphi = \psi = 1$) совпадают с соответствующими уравнениями для однородного канонического потока, введенного в начале этого раздела и аппроксимирующего слабо неоднородный поток. Разница заключается в том, что для однородного потока средние по сечению от газодинамических параметров в точности совпадают с U , H , p и т. д., а в слабо неоднородном потоке только средние (3.1) или (3.2) совпадают с соответствующими величинами в однородном каноническом потоке. Отличие остальных средних величин в неоднородном потоке от соответствующих величин, фигурирующих в уравнениях гидравлики для однородного канонического потока, зависит от степени неоднородности потока и может оказаться существенным, например, при сопоставлении результатов расчета с опытными данными [2, 3].

4. Перейдем теперь (см. п. 2.2) к определению правых частей уравнения (3.5), которые необходимо выразить через величины (3.4) и известные «внешние» параметры (температура стенок канала, параметры внешней электрической цепи и т. д.).

Вопрос о связи величин τ_w и q_w с определяющими параметрами представляет собой самостоятельную задачу, которая здесь рассматриваться

* Задание распределения температуры $T = \theta(x)\tau(y, z)$ менее удобно, так как функция $h = h(\rho, T)$ представляется обычно в виде таблиц и, следовательно, задавая температуру, нельзя из третьего уравнения (3.4) получить уравнение для функции $\theta(x)$. С другой стороны, профиль энтальпии $\varphi(y, z)$ может быть восстановлен (с помощью таблиц) по измеренным распределениям давления и температуры.

не будет. При конкретных расчетах будут использоваться соотношения, принятые в обычной газовой динамике [9]. При этом пренебрегается влиянием МГД-эффектов на величины τ_w и q_w . Можно надеяться, что такой подход будет давать хорошие результаты, если параметр МГД-взаимодействия невелик и величина джоулева тепла, выделяющаяся в холодном пограничном слое на электродной стенке, мала по сравнению с конвективным тепловым потоком.

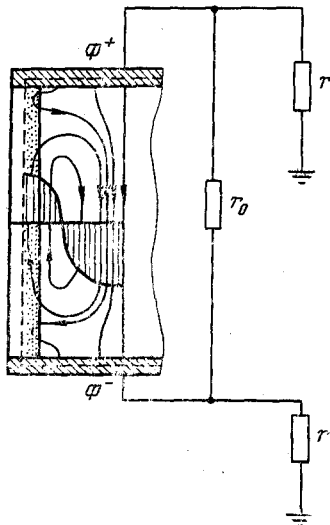


Рис. 2

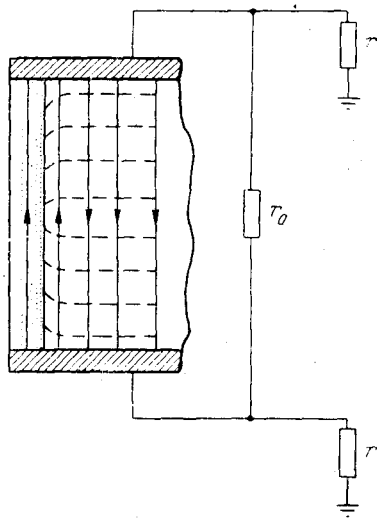


Рис. 3

Электродинамические члены в уравнениях (3.5) зависят от распределения тока и электрического потенциала в канале и его стенках. Эти распределения при неоднородном потоке и неидеальности изоляции стенок весьма сложны и их расчет представляет очень сложную трехмерную задачу. Однако, опираясь на свойства введенного неоднородного канонического потока и некоторые ограничения, связанные с величиной сопротивлений утечки (2.1) и (2.2), распределения токов и потенциала в длинном канале могут быть вычислены приближенно. При этом действительному распределению электродинамических параметров будет поставлено в соответствие некоторое аппроксимирующее его распределение, которое наряду с (3.4) можно рассматривать как доопределение свойств канонического МГД-потока. При выводе соотношений, описывающих каноническое распределение электродинамических величин, будем существенным образом использовать результаты качественного анализа, проведенного в работе [10].

Дальнейшие преобразования электродинамических уравнений будем проводить с использованием электрической схемы генератора, качественно особенности которой видны из рис. 1 и 2. Рассматриваемая электрическая схема генератора позволяет учесть закорачивание холловского тока по неоднородным слоям потока, по стенкам канала и по земле через сопротивления утечек r с электродов и R_1 и R_2 по концам канала (рис. 1). В поперечном сечении учитывается закорачивание поперечного рабочего тока по пограничному слою и по проводящим стенкам (рис. 2).

Отметим, что учет влияния проводящей боковой стенки на распределение тока в канале с помощью некоторого сосредоточенного шунтирующего сопротивления, присоединенного к электродам параллельно сопротивлению нагрузки, возможен, строго говоря, лишь в том случае, если отсутствует непосредственное перетекание токов из газа в стенку (рис. 3).

Такой подход используется, например, в [11, 12] для оценки поперечного и продольного перетекания токов по изолирующим стенкам.

При сделанных выше предположениях (идеальность секционирования нагрузки, отсутствие концевых эффектов, слабое изменение параметров потока и внешних электрических условий) напряженность холловского поля E_x можно считать постоянной в поперечном сечении канала.

Действительно, записав выражение для $E_x(x, y, z)$ в форме

$$E_x(x, y, z) = E_x(x, 0, 0) + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y E_y dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^z E_z dz, \quad (4.1)$$

легко обнаружить, что изменение холловского поля поперек канала $\Delta_{\perp} E_x$ определяется продольными градиентами компонент напряженности электрического поля E_y и E_z , которые, в свою очередь, связаны с продольными неоднородностями в канале. Следовательно:

$$\Delta_{\perp} E_x \sim \max \{aE_y^* / L, \quad bE_z^* / L\} \ll \max \{E_y^*, E_z^*\}. \quad (4.2)$$

Звездочкой здесь и всюду в дальнейшем обозначаются характерные значения соответствующих величин.

Таким образом, с точностью до членов порядка a/L имеем

$$E_x = E_x(x), \quad (4.3)$$

$$d\Phi(x) / dx = -E_x, \quad (4.4)$$

здесь $\Phi(x)$ — потенциал на оси канала относительно земли.

Рассмотрим теперь уравнение неразрывности тока:

$$\oint j_n d\Sigma = 0.$$

Для преобразования этого уравнения выберем в качестве поверхности интегрирования поверхность канала, заключенную между двумя близкими поперечными сечениями, причем проводящие участки стенок канала будем считать внутренними по отношению к поверхности интегрирования (штриховая линия на рис. 2). В результате получаем

$$dI / dx = -[i_y(x, a) - i_y(x, -a)], \quad (4.5)$$

где

$$I(x) = \int_F j_x(x, y, z) d\Sigma + G_x(x) E_x(x) \quad (4.6)$$

полный продольный ток в канале, равный сумме полного холловского тока и продольного тока утечки по стенкам ($G_x(x)$ определено соотношением (2.1)). Величина i_y в (4.5) представляет собой удельный (на единицу длины канала) поперечный ток и определяется соотношением

$$i_y(x, y) = \int_{-b}^b j_y dz + \sigma_w^{из}(x, y, b) E_y(x, y, b) + \sigma_w^{из}(x, y, -b) E_y(x, y, -b). \quad (4.7)$$

Очевидно (рис. 2), что правая часть уравнения (4.5) представляет собой ток утечки на землю с электродов по сопротивлению r в данном сечении, и, следовательно, уравнение (4.5) можно переписать в виде

$$dI / dx = -(\Phi^+ + \Phi^-) / r, \quad (4.8)$$

где $\Phi^{\pm}(x)$ представляет собой потенциал электродных стенок относительно земли:

$$\Phi^{\pm}(x) = \Phi(x) - \int_0^{\pm a} E_y(x, y, 0) dy + \Delta V^{\pm}. \quad (4.9)$$

Здесь ΔV^\pm — падение потенциала в тонких приэлектродных слоях, связанное с поверхностными явлениями. Эта величина зависит от плотности тока, температуры и материала электродов, концентрации присадки и свойств рабочего газа [13, 14]. При конкретных расчетах можно использовать кривые аппроксимирующие экспериментально полученные зависимости $\Delta V^\pm = f(j, T_w, \dots)$ [15]. Ниже при расчетах, носящих иллюстративный характер, будет принято $\Delta V^\pm = 0$.

Из закона Ома (2.5) при условии (4.3) получаем

$$I - G_x E_x = E_x \int_F \int \frac{\sigma d\Sigma}{1 + \beta^2} - \int_F \int \frac{\sigma \beta}{1 + \beta^2} (E_y - uB) d\Sigma \quad (4.10)$$

или

$$I = E_x \left(G_x + \int_F \int \frac{\sigma}{1 + \beta^2} d\Sigma \right) + UB \int_F \int \frac{\sigma \beta \psi}{1 + \beta^2} d\Sigma - \int_F \int \frac{\sigma \beta}{1 + \beta^2} E_y d\Sigma,$$

где $\psi(y, z)$ и $U(x)$ определены в (3.4).

Поэтому, если распределение электрического поля $E_y(x, y, z)$ известно, то уравнения (4.4), (4.8) можно рассматривать как уравнения для определения $I(x)$ и $\Phi(x)$, причем граничными условиями для этих уравнений служат соотношения на концах канала

$$\Phi(0) = -I(0)R_1, \quad \Phi(L) = I(L)R_2 \quad (4.11)$$

при отсутствии холловой нагрузки $R_{хол}$.

Получим теперь упрощенные соотношения, которые связывают распределения компонент электрического поля и плотности тока, лежащих в плоскости поперечного сечения канала (E_y, E_z, j_y, j_z).

Оценим изменение величины поперечного тока (4.7) в поперечном сечении. Интегрируя уравнение $\text{div } \mathbf{j} = 0$ по z в пределах проводящей области (поток и проводящие участки изолирующих стенок см. рис. 2), получим

$$\frac{\partial i_y}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_{-b}^b j_x dz + 2\sigma_w^{из} E_x \right\}. \quad (4.12)$$

Будем считать, что утечки на землю не очень велики, т. е. характерной величиной изменения полного продольного тока $I(x)$ является длина канала L (соответствующее ограничение на r будет получено ниже — см. (4.16)). При этом из (4.12) получим

$$\Delta i_y \sim \max \left\{ \frac{j_x^* ab}{L}, \frac{\sigma_w^{из*} E_x a}{L} \right\}.$$

Будем считать также, что поверхностная проводимость изоляционных стенок $\sigma_w^{из}$ не очень велика, т. е. имеет место условие:

$$\sigma^* b / \sigma_w^{из} \gg 1. \quad (4.13)$$

Для длинного канала

$$\Delta i_y \sim \Phi(x) / r \sim E_x L / r \sim \beta^* j_y^* L / \sigma^* r.$$

т. е. изменением i_y в поперечном сечении канала можно пренебречь

$$i_y = i_y(x). \quad (4.15)$$

Чтобы получить ограничение сопротивления утечки на землю r , оценим еще Δi_y исходя из уравнения (4.8)

$$\Delta i_y \sim \Phi(x) / r \sim E_x L / r \sim \beta^* j_y^* L / \sigma^* r.$$

Сопоставляя это условие с (4.14), получим

$$\sigma^* r \gg \beta^* L / b. \quad (4.16)$$

Условия (4.13) и (4.16), характеризующие степень ухудшения изоляции канала, являются наряду с условием $L \gg \max\{a, \beta a\}$ основными условиями применимости данного приближения. Если изоляционная стенка обладает разной проводимостью вдоль и поперек канала (например, канал секционирован в одном из направлений), то условие (4.13) должно выполняться для обеих величин $\sigma_w^{из}$, $\sigma_w^{эл}$.

Ограничения (4.13), (4.16) сопротивлений утечки, приводящие к соотношению (4.15), эквивалентны предположению о малости «поперечного тока утечки» в данном сечении по сравнению с полным поперечным током i_y . При этом, конечно, полный ток утечки (по всей длине канала) может быть большим. Благодаря (4.14) можно считать, что полный поперечный ток в данном сечении $i_y(x)$ замыкается только через внешнюю нагрузку r_0 , и, следовательно, граничное условие, определяющее величину $i_y(x)$, имеет вид

$$r_0 i_y(x) = \Phi^+ - \Phi^- \equiv V_y. \quad (4.17)$$

Будем считать, что стенки достаточно однородны по своим изоляционным свойствам (отсутствие хорошо проводящих вставок в непроводящем массиве, идеальное секционирование и т. д.). При этом условия (4.13) обеспечивают малость составляющей плотности тока j_z на изоляционной стенке

$$j_z^*(\pm b) \leq j_y^*; \quad j_z^*(\pm b)/j_y^* \sim \sigma_w^{из}/b\sigma^* \equiv \varepsilon \ll 1. \quad (4.18)$$

Кроме того, будем считать, что рабочим телом служит слабоионизованный газ, представляющий собой смесь основного газа и легко ионизируемой присадки. Электропроводность такого газа является сильной функцией температуры и поэтому вблизи стенки, температура которой ниже на 500—1000° К температуры ядра потока, образуется слой с очень низкой электропроводностью σ^{**} ($\sigma^{**} \ll \sigma^*$), протяженность которого l^* много меньше толщины δ температурного пограничного слоя $l^* \ll \delta \leq a$.

Вне слоев l^* можно считать $\sigma \approx \text{const}$, и, следовательно, распределение потенциала и электрического тока в этой области зависит только от профиля скорости и близко к распределению, исследованному в [16]. Анализ этого решения показывает, что для канала квадратного сечения и параболического профиля скорости отношение $E_z^*/E_y^* < 0,3$ и быстро уменьшается при уменьшении размера сечения вдоль магнитного поля и увеличении наполненности профиля скорости. Если изоляционные стенки неидеальны, то благодаря утечкам тока в направлении магнитного поля поле E_y вне слоев l^* изменится, но это изменение будет иметь порядок ε (4.18). Наконец, в областях вблизи стенок благодаря низкой электропроводности и большой концентрации объемного заряда возникает сильное электрическое поле, причем $E_z^{**} \sim j_z^*/\sigma_{из}^{**}$, $E_y^{**} \sim j_y^*/\sigma_{эл}^{**}$. Но так как эти слои узкие, то электрическое поле в этих слоях одномерно $E_y(x, y, \pm b)$, $E_z(x, \pm a, z)$.

Таким образом, анализ распределения потенциала в плоскости поперечного сечения канала показывает, что при принятых ограничениях распределение потенциала можно аппроксимировать функцией, зависящей только от y , т. е. принять

$$E_y = E_y(x, y). \quad (4.19)$$

Эта аппроксимация будет неудовлетворительной только вблизи углов канала в области $\sim l^{*2}$. В этой области электрическое поле существенно двумерно. Ясно, что использование (4.19) в этой области дает сильно завышенные значения токов по изоляционной стенке $\sigma_w^{из} E_y^{**}$, которые не существуют в действительности. Чтобы исключить это противоречие, при конкретных расчетах будем предполагать, что ток в стенке не меняется на отрезке l^* вблизи электрода.

Функцию (4.19) можно связать с полным поперечным током (4.7) с помощью соотношения, следующего из закона Ома (2.5):

$$\int_{-b}^b j_y dz = i_y - [\sigma_w^{нз}(x, y, b) + \sigma_w^{нз}(x, y, -b)] E_y(x, y) =$$

$$= E_y(x, y) \int_{-b}^b \frac{\sigma dz}{1 + \beta^2} - U(x) B \int_{-b}^b \frac{\sigma \psi dz}{1 + \beta^2} + E_x(x) \int_{-b}^b \frac{\sigma \beta dz}{1 + \beta^2}. \quad (4.20)$$

Отметим, что все соображения и оценки, приводящие к соотношению (4.19), равносильны замене действительного распределения $E_y(x, y, z)$ на некоторое однородное по z распределение, представляющее собой «среднее с весом» значение E_y :

$$E_y(x, y) \equiv \langle E_y(x, y, z) \rangle_z =$$

$$\int_{-b}^b \frac{\sigma E_y(x, y, z) dz}{1 + \beta^2} + E_y(x, y, b) \sigma_w^{нз}(x, y, b) + E_y(x, y, -b) \sigma_w^{нз}(x, y, -b)$$

$$= \int_{-b}^b \sigma dz (1 + \beta^2)^{-1} + \sigma_w^{нз}(x, y, b) + \sigma_w^{нз}(x, y, -b) \quad (4.21)$$

Выразим $E_y(x, y)$ через i_y и известные функции x и y из соотношения (4.20). Вычисляя после этого Φ^\pm при помощи (4.9) и подставляя их в (4.17), получим уравнение для определения $i_y(x)$. Зная $i_y(x)$, $\Phi^\pm(x)$, $E_y(x, y)$, можно найти распределения $I(x)$, $E_x(x)$, $\Phi(x)$ на основе уравнений (4.4), (4.8), (4.10). Опуская элементарные преобразования, приведем окончательные выражения для расчета величин $E_x(x)$, $E_y(x, y)$, $V_y(x)$, $i_y(x)$:

$$E_x = \frac{IR^* - UB(\gamma R^* + \nu \beta) + \beta \Delta V}{(G_x + \bar{\sigma}) R^* - \beta^2} \quad (4.22)$$

$$i_y = (-UB\nu + \beta E_x + \Delta V) / R^*,$$

$$V_y(x) \equiv \Phi^+ - \Phi^- = -i_y \bar{R} - UB\nu + \beta E_x + \Delta V,$$

$$E_y = \omega \left\{ i_y + UB \int_{-b}^b \frac{\sigma \psi dz}{1 + \beta^2} - E_x \int_{-b}^b \frac{\sigma \beta dz}{1 + \beta^2} \right\},$$

где

$$\Delta V = V^+ + \Delta V^-; \quad \omega = \left[2\sigma_w + \int_{-b}^b \frac{\sigma dz}{1 + \beta^2} \right]^{-1},$$

$$\bar{R} = \int_{-a}^a \omega dy; \quad R^* = \bar{R} + r_0,$$

(4.23)

$$\nu = \int_{-a}^a \omega \int_{-b}^b \frac{\sigma \psi}{1 + \beta^2} dz dy; \quad \bar{\sigma} = \int_{-a}^a \left[\int_{-b}^b \frac{\sigma dz}{1 + \beta^2} + \omega \left(\int_{-b}^b \frac{\sigma \beta dz}{1 + \beta^2} \right)^2 \right] dy,$$

$$\beta = \int_{-a}^a \omega \int_{-b}^b \frac{\sigma \beta}{1 + \beta^2} dz dy; \quad \gamma = \int_{-a}^a \left[\int_{-b}^b \frac{\sigma \psi \beta dz}{1 + \beta^2} - \omega \int_{-b}^b \frac{\sigma \psi dz}{1 + \beta^2} \int_{-b}^b \frac{\sigma \beta dz}{1 + \beta^2} \right] dy.$$

Определенных уравнениями (4.22) функций достаточно для вычисления электродинамических членов в уравнениях гидравлического приближения (3.5). Выражение для силы в уравнении импульсов (4.5) получаем в

виде:

$$\begin{aligned} \iint_F [\mathbf{jB}]_x d\Sigma &= \iint_F j_n B d\Sigma = B \int_{-a}^a dy \int_{-b}^b j_y dz = \\ &= 2aBi_y(x) - B \int_{-a}^a E_y(x, y) [\sigma_w^{из}(x, y, b) + \sigma_w^{из}(x, y, -b)] dy. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Если в уравнении энергии (3.5) в силу сделанных выше оценок пренебрежем диссипацией энергии, связанной с токами j_z , получим

$$\begin{aligned} \iint_F \mathbf{jE} d\Sigma &= \iint_F (j_x E_x + j_y E_y) d\Sigma = \\ &= E_x(I - G_x E_x) + \int_{-a}^a E_y (i_y - E_y) \{ \sigma_w^{из}(x, y, b) + \sigma_w^{из}(x, y, -b) \} dy. \end{aligned}$$

Система уравнений (3.5) с учетом (4.22)–(4.25) представляет собой замкнутую систему уравнений относительно средних параметров потока, которая описывает течение проводящего газа в канале МГД-генератора с учетом неоднородностей потока и несовершенства изоляции канала.

Отметим, что все предыдущие рассуждения относились к таким условиям, когда разряд на электроде распределенный. В этом случае, так как $j_z(\pm b) \ll j_y^*$, джоулева диссипация в слоях l^* вблизи изоляционных стенок $Q_z \sim j_z^{*2} / \sigma^{**}$ много меньше джоулевой диссипации вблизи электродной стенки $Q_y \sim j_y^{*2} / \sigma^{**}$. Так как тепло Q_z и Q_y , по-видимому, целиком уходит в стенку канала (благодаря узости слоя l^* см. [17, 18]), то они будут изменять экспериментально измеренное значение q_w . С другой стороны, Q_y учтено в соответствии с (4.25). Отсюда следует, что, используя (4.25), можно, по-видимому, при вычислении q_w пользоваться газодинамическими соотношениями [9]. Если же в (3.5) использовать экспериментально измеренные в МГД-канале значения q_w , то вместо (4.25) надо использовать величину

$$\begin{aligned} \iint_F \mathbf{jE} d\Sigma - Q_y &= E_x(T(x) - G_x E_x) + \\ &+ \int_{-a+l^*}^{a-l^*} E_y (i_y - E_y [\sigma_w^{из}(x, y, b) + \sigma_w^{из}(x, y, -b)]) dy. \end{aligned} \quad (4.26)$$

При этом зависимость l^* от определяющих задачу параметров должна вводиться из дополнительных соображений, на которых не будем здесь останавливаться.

Вопрос о вычислении q_w и электрических членов в уравнениях (3.5) при дуговом режиме разряда с электродов [14, 15] также нуждается в дополнительном исследовании. Иногда учет влияния неоднородности течения на характеристики генератора сводится лишь к учету изменения внутреннего сопротивления генератора за счет «холодного» пограничного слоя на электродах. Анализ уравнений (4.22) показывает, что это возможно при достаточно тонком пограничном слое ($\delta \ll a$) или малых значениях параметра Холла ($\beta < 1$). Тогда величины (4.23) можно заменить их приближенными значениями

$$\begin{aligned} \bar{R} &\approx (1 + \beta^2) \alpha < \sigma^{-1} > a / b, \quad \bar{\sigma} \approx < \sigma > F, \\ \bar{\beta} &\approx 2a\beta\alpha, \quad Uv \approx 2a\alpha < u >, \\ U\gamma &\approx < u > [(1 - \alpha) / (1 + \alpha\beta^2)] \beta < \sigma > F, \end{aligned} \quad (4.27)$$

где $\alpha = [1 + (1 + \beta^2) < \sigma_w > / < \sigma >]^{-1}$ — коэффициент, характеризующий снижение напряжения холостого хода под влиянием утечек по изоляционным стенкам.

Таким образом, в этом случае для расчета канала можно ввести однородный по всем параметрам канонический поток. Этот поток будет описывать с точностью до членов $\delta/a \ll 1$ распределения всех параметров, кроме внутреннего сопротивления \bar{R} . Для расчета последнего по (4.27.1) необходимо задать, например, профиль температуры и давления в поперечном сечении канала.

5. Рассмотрим несколько численных примеров, иллюстрирующих влияние неоднородности течения и несовершенства изоляции канала на характеристики течения. Численное интегрирование системы уравнений (3.5) проведено для случая течения

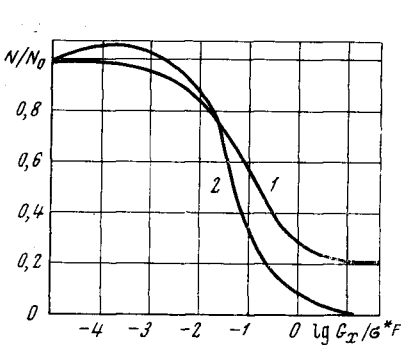


Рис. 4

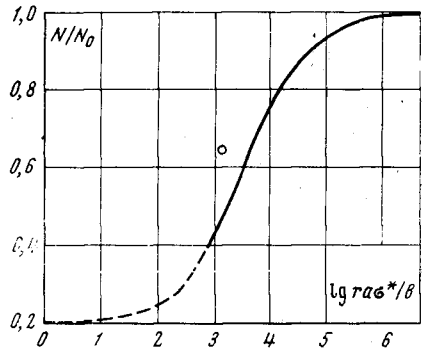


Рис. 5

газа в канале постоянного прямоугольного сечения $0,08 \times 0,22 \times 3,00$ м. Принято, что температура торможения на входе равна 2550°K , давление торможения — $0,85 \cdot 10^5$ н/м², расход — $0,8$ кг/сек, магнитная индукция постоянна и равна $1,7$ тл, температура стенок канала постоянна по длине и равна 1500°K , приэлектродное падение $\Delta V = 0$.

В качестве уравнений состояния использовали таблицы термодинамических свойств продуктов сгорания метана в воздухе, обогащенном кислородом до 40%, с присадкой K_2CO_3 [19].

Проводимость газа и число Холла определялись по формулам

$$\sigma(p, T) = 2,05 \cdot 10^5 T^{0,75} \exp \{-2,515 \cdot 10^4 / T\} p^{-0,5}, \quad (5.1)$$

$$\beta / B = 0,19 \cdot 10^4 T^{0,5} / p.$$

Принято, что профили газодинамических функций определяются с помощью функций

$$\eta(y) = \begin{cases} 1 & \text{при } a - \delta_1 < y; \\ [(a - y) / \delta_1]^{1/n} & \text{при } a - \delta_1 \leq y; \end{cases} \quad \xi(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } b - \delta_2 < z; \\ [(b - z) / \delta_2]^{1/n} & \text{при } b - \delta_2 \geq z \end{cases} \quad (5.2)$$

в виде

$$\varphi = \eta(y) \xi(z); \quad \psi = (1 - h_w) \xi \eta + \Delta_w (\xi - \eta) + h_w,$$

где

$$h_w = (h_w \text{ эл} + h_w \text{ из}) / 2H(x), \quad \Delta_w = (h_w \text{ эл} - h_w \text{ из}) / 2H(x),$$

$$\delta_1 = \begin{cases} \delta & \text{при } \delta \leq a; \\ a & \text{при } \delta > a; \end{cases} \quad \delta_2 = \begin{cases} \delta & \text{при } \delta \leq b; \\ b & \text{при } \delta > b; \end{cases}$$

$$\delta = 0,32 \text{Re}_x^{-0,2} x.$$

Графики, представленные на рис. 4–7, иллюстрируют влияние различных факторов неидеальности течения на величину суммарной мощности МГД-генератора.

На рис. 4 показана зависимость величины мощности генератора от величины сопротивления утечек по стенкам канала ($1/R_1 = 1/R_2 = 1/r = 0$). Кривая 1 построена для случая, когда присутствует только продольная утечка G_x ($G_y = 0$). Заметное снижение мощности происходит при значениях $G_x / \sigma^* F^* > 10^{-2}$; при значениях $G_x / \sigma^* F^* > 10$ генератор работает в режиме «сплошного» электрода ($E_x \approx 0$). Кривая 2 представляет совместное влияние продольных и поперечных утечек, причем принято, что $\sigma_w \text{из} = \sigma_w \text{эл} / 2$. Некоторое повышение мощности генератора при низких значениях утечек во втором случае объясняется тем, что расчеты проводились для $k = \text{const} = 0,5$, где

$$k = \frac{V_y}{V_y(i_y = 0, I = 0)} = \frac{r_0}{r_0 + r_{opt}} A(I). \quad (5.4)$$

Здесь r_{opt} — локально-оптимальное значение сопротивления нагрузки; $A(I)$ — множитель, учитывающий взаимосвязь различных участков канала по цепи тока Холла

[10]. Однако известно [20], что оптимальным в смысле получения максимальной мощности является течение, в котором значения коэффициента нагрузки лежат ниже уровня 0,5 на начальных участках канала, поэтому некоторое дросселирование потока, вызванное наличием утечек по стенке, и привело в рассматриваемом случае к увеличению мощности.

Снижение мощности генератора из-за утечек тока на землю с электродов по сопротивлением r иллюстрируется кривой на рис. 5, которая построена для случая постоянного r . Резкое падение мощности начинается со значений сопротивления утечки

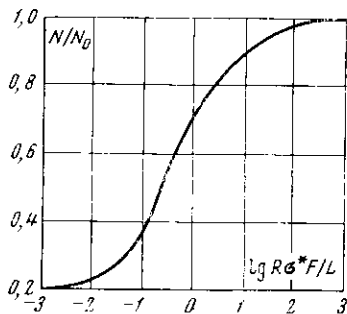


Рис. 6

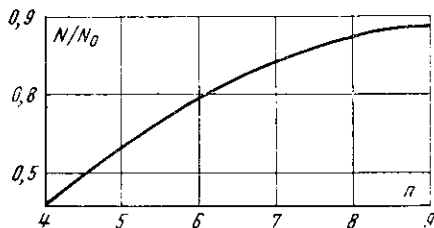


Рис. 7

$\text{ar} \sigma^* / b < 10^5$, что соответствует для рассматриваемого примера сосредоточенному сопротивлению утечки с одного электрода длиной 0,1 м, равному 10^4 ом.

Снижение холлового поля в канале из-за утечек на землю определяется величиной полного продольного тока в канале, $I(x)$, см. уравнение (4.22.1), изменение которого по длине канала пропорционально потенциалу на оси канала относительно земли и утечке в данном сечении. В силу монотонности изменения $\Phi(x)$ в канале потенциал достигает максимального значения на концах канала, поэтому наиболее высокие требования к изоляции канала от земли предъявляются к концевым участкам канала. Для иллюстрации этого на рис. 5 точкой показано значение мощности для случая $r = r^0 x$ при $x < L/2$; $r = r^0 (L - x)$ при $x > L/2$, причем абсцисса точки выбрана из условия равенства суммарного сопротивления утечки $R = [\int r^{-1} dx]^{-1}$ на землю со всего канала для данного случая и для случая постоянного по длине сопротивления утечки $R = r / L$.

При небольших значениях сопротивления утечки на землю r ($r < 10 \frac{b}{ad^*}$) режим работы генератора близок к режиму «сплошного электрода» ($E_x \approx 0$). Соответствующий участок кривой рис. 5 показан пунктиром, поскольку использование рассматриваемой в данной работе модели при таких условиях (4.16) дает только качественный результат.

Влияние утечек тока Холла по концам канала на землю по сопротивлениям R_1 и R_2 (см. рис. 1) на величину мощности генератора показано на рис. 6. Кривая рис. 6 имеет, как и в предыдущем случае, три характерных участка: при больших значениях сопротивлений R_1 и R_2 влияние утечек незначительно $R\sigma^*F^*/L > 10^2$, при $R\sigma^*F^*/L < 10^{-1}$ продольное поле в канале оказывается практически полностью закороченным.

Для иллюстрации влияния формы профиля газодинамических параметров на характеристики течения на рис. 7 представлено значение мощности генератора в функции параметра η , входящего в соотношение (5.2), (5.3).

Институт высоких температур
Академии наук СССР

Институт механики МГУ

Поступила в редакцию
6 III 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Саттон, А. Шерман. Основы технической магнитной газодинамики. «Мир», 1968.
2. Г. А. Любимов. Механика жидкости и газа, № 3, 3, 1966.
3. Л. И. Седов. Методы подобия и размерности в механике. «Наука», 1967.
4. Г. Н. Абрамович. Прикладная газовая динамика. Гостехиздат, 1953.
5. S. I. Pai. Electricity from MHD, I, Vienna, 1966.
6. Л. Ф. Лобанова. ПМТФ, № 6, 31, 1964.
7. D. Q. Elliott. AIAA J., 4, № 4, 627, 1966.
8. А. Г. Куликовский, Г. А. Любимов. Магнитная гидродинамика. Физматгиз, 1962.

9. Э. Р. Эккерт, Р. М. Дрейк. Теория тепло- и массообмена. Госэнергоиздат, 1961.
 10. В. А. Битюрин, В. И. Ковбасюк, С. А. Медин. Механика жидкости и газа, № 3, 3, 1968.
 11. А. Е. Шейндлин, Б. Я. Шумяцкий, В. В. Кириллов, В. И. Ковбасюк, В. И. Залкинд. М-107/145. Симпозиум по производству электроэнергии с помощью МГД. Варшава, 1968.
 12. K. G. Reseck, R. H. Eustis, C. H. Kruger. Electricity from MHD, III, Vienna, 1966.
 13. Г. А. Любимов. Теплофизика высоких температур, 4, № 1, 1966.
 14. Г. А. Любимов. Теплофизика высоких температур, 6, № 4, 1968.
 15. А. Б. Ватажин, Г. А. Любимов, С. А. Регирер. Сб. МГД метод получения электроэнергии. «Энергия», 1967, стр. 329.
 16. С. А. Регирер. Сб. Вопросы магнитной гидродинамики. Рига, 1963, стр. 81.
 17. В. М. Пасконов, А. Е. Якубенко. Механика жидкости и газа, № 3, 12, 1966.
 18. Л. Ф. Лобанова. Механика жидкости и газа, № 2, 3, 1967.
 19. В. С. Юнгман, А. В. Гурвич, Н. П. Ртищева. Теплофизика высоких температур, 4, № 4, 1966.
 20. В. И. Ковбасюк, С. А. Медин, А. Е. Шейндлин. Сб. МГД метод получения электроэнергии. «Энергия», 1968, стр. 373.
-