М. И. Урсул, Пример плоской группы, квазикомпонента которой не совпадает с компонентой,
*Матем. заметки*, 1985, том 38, выпуск 4, 517–522

https://www.mathnet.ru/mzm5562

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 38, № 4 (1985)


# ПРИМЕР ПЛОСКОЙ ГРУППЫ, КВАЗИКОМПОНЕНТА КОТОРОЙ НЕ СОВПАДАЕТ С КОМПОНЕНТОЙ


**М. И. Урсул**


В настоящей статье при помощи одной конструкции Хильгерса (см. [1], [2, § 27, IX, с. 311—312]) на плоскости (рассматриваемой как абелева топологическая группа с обычной топологией) строится подгруппа, квазикомпонента нуля которой не совпадает с компонентой нуля.

Ниже через $\mathbf{R}$ обозначается группа действительных чисел с обычной топологией. Замыкание подмножества $A$ топологического пространства $X$ обозначается через $[A]$, а ее граница — через $\mathrm{Fr}\, A$.

Напомним понятие связности между подмножествами (см. [3, § 46, IV, с. 151]): топологическое пространство $X$ называется связным между подмножествами $A$ и $B$, если не существует открыто-замкнутого подмножества $F$ такого, что $A \subseteq F$ и $F \cap B = \varnothing$.

Нам понадобится следующий критерий связности между подмножествами [3, § 46, IV, теорема 7, с. 154]: подмножество $E$ наследственно нормального пространства $X$ связно между двумя подмножествами $A$ и $B$ тогда и только тогда, когда не существует открытого подмножества $U$ в $X$ такого, что

$$E \cap \mathrm{Fr}\, U = \varnothing, \quad A \subseteq U, \quad [U] \cap B = \varnothing.$$

Далее для каждого $\varepsilon > 0$ через $C_\varepsilon$ обозначим открытый круг на плоскости радиуса $\varepsilon$ с центром в $(0, 0)$, т. е. $C_\varepsilon = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 < \varepsilon^2\}$, а через $K_\varepsilon$ — границу этого круга, т. е. $K_\varepsilon = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 = \varepsilon^2\}$.

ЛЕММА 1. *Пусть* $E \subseteq \mathbf{R}^2$, $(0, 0) \in E$ *и* $\operatorname{ind}_{(0,0)} E = 1$. *Тогда существует такое* $\varepsilon > 0$, *что пространство* $E \bigcup K_\varepsilon$ *связно между* $(0, 0)$ *и* $K_\varepsilon$.

Доказательство. Так как $\operatorname{ind}_{(0,0)} E = 1$, то найдется такое $\varepsilon > 0$, что не существует открыто-замкнутого подмножества $W$ в $E$ такого, что $(0, 0) \in W \subseteq C_\varepsilon \bigcap E$. Докажем, что $E \bigcup K_\varepsilon$ связно между $(0, 0)$ и $K_\varepsilon$.

Допустим противное. Ввиду наследственной нормальности $\mathbf{R}^2$ по указанному выше критерию существует такое открытое подмножество $U$ в $\mathbf{R}^2$, что:

1) $(E \bigcup K_\varepsilon) \bigcap \operatorname{Fr} U = \varnothing$;

2) $(0, 0) \in U$;

3) $[U] \bigcap K_\varepsilon = \varnothing$.

Рассмотрим окрестность $U \bigcap C_\varepsilon \bigcap E$ точки $(0, 0)$ в $E$. Имеем $U \bigcap C_\varepsilon \bigcap E = ((U \bigcap C_\varepsilon) \bigcup (U \bigcap K_\varepsilon)) \bigcap E = (U \bigcap (C_\varepsilon \bigcup K_\varepsilon)) \bigcap E = U \bigcap [C_\varepsilon] \bigcap E = [C_\varepsilon] \bigcap U \bigcap E = [C_\varepsilon] \bigcap ((U \bigcap E) \bigcup (\operatorname{Fr} U \bigcap E)) = [C_\varepsilon] \bigcap ((U \bigcup \operatorname{Fr} U) \bigcap E) = [C_\varepsilon] \bigcap [U] \bigcap E$. Отсюда следует, что $U \bigcap C_\varepsilon \bigcap E$ — открыто-замкнутое подмножество пространства $E$, содержащее $(0, 0)$ и содержащееся в $C_\varepsilon \bigcap E$. Получили противоречие; следовательно, $E \bigcup K_\varepsilon$ связно между $(0, 0)$ и $K_\varepsilon$. Лемма доказана.

Замечание 1. Если $U$, $V$ — открытые подмножества топологического пространства $X$, то $\operatorname{Fr}(U \bigcap V) \subseteq \operatorname{Fr} U \bigcup \operatorname{Fr} V$.

ЛЕММА 2. *Пусть* $E \subseteq \mathbf{R}^2$, *причем* $(0, 0) \in E$ *и* $\operatorname{ind}_{(0,0)} E = 1$, *а* $\varepsilon > 0$ *такое, что пространство* $E \bigcup K_\varepsilon$ *связно между* $(0, 0)$ *и* $K_\varepsilon$. *Тогда существует такая точка* $k \in K_\varepsilon$, *что пространство* $E \bigcup k$ *связно между* $(0, 0)$ *и* $k$.

Доказательство. Допустим противное. Ввиду наследственной нормальности $\mathbf{R}^2$ по указанному выше критерию для каждой точки $k \in K_\varepsilon$ существует такое открытое в $\mathbf{R}^2$ множество $U_k$, что:

1) $(E \bigcup k) \bigcap \operatorname{Fr} U_k = \varnothing$;

2) $(0, 0) \in U_k$;

3) $k \notin [U_k]$.

Поскольку окружность $K_\varepsilon$ компактна и семейство $\{\mathbf{R}^2 \setminus [U_k] \mid k \in K_\varepsilon\}$ покрывает $K_\varepsilon$, то существуют такие $k_1, \ldots, k_n \in K_\varepsilon$, что $\bigcup_{i=1}^n (R^2 \setminus [U_{k_i}]) \supseteq K_\varepsilon$, откуда $\mathbf{R}^2 \setminus (\bigcap_{i=1}^n [U_{k_i}]) \supseteq K_\varepsilon$. В частности, $(\bigcap_{i=1}^n [U_{k_i}]) \bigcap K_\varepsilon = \varnothing$.

Докажем, что для открытого множества $W = \bigcap_{i=1}^{n} U_{k_i}$ выполнены следующие условия:

а) $(E \bigcup K_\varepsilon) \bigcap \mathrm{Fr}\, W = \varnothing$;

б) $(0, 0) \in W$;

в) $[W] \bigcap K_\varepsilon = \varnothing$.

Из замечания 1 и из 1) следует $E \bigcap \mathrm{Fr}\, W \subseteq E \bigcap \bigcap (\mathrm{Fr}\, U_{k_1} \bigcup \ldots \bigcup \mathrm{Fr}\, U_{k_n}) = (E \bigcap \mathrm{Fr}\, U_{k_1}) \bigcup \ldots \bigcup (E \bigcap \bigcap \mathrm{Fr}\, U_{k_n}) = \varnothing$. Поскольку $\mathrm{Fr}\, W \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} [U_{k_i}]$, то $K_\varepsilon \bigcap \mathrm{Fr}\, W \subseteq K_\varepsilon \bigcap (\bigcap_{i=1}^{n} [U_{k_i}]) = \varnothing$. Следовательно, $(E \bigcup K_\varepsilon) \bigcap \mathrm{Fr}\, W = (E \bigcap \mathrm{Fr}\, W) \bigcup (K_\varepsilon \bigcap \mathrm{Fr}\, W) = \varnothing$, т. е. верно а)). Условие б) очевидно. Из того, что $[W] \subseteq \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} [U_{k_i}]$, имеем $[W] \bigcap K_\varepsilon = \varnothing$, т. е. верно в).

Таким образом, выполнены условия а) — в), поэтому по указанному выше критерию $E \bigcup K_\varepsilon$ несвязно между $(0, 0)$ и $K_\varepsilon$ — получили противоречие. Лемма доказана.

Из лемм 1 и 2 следует

ЛЕММА 3. *Пусть* $E \subseteq \mathbf{R}^2$, $(0, 0) \in E$ *и* $\mathrm{ind}_{(0,0)}\, E = 1$. *Тогда найдется такая точка* $k \neq (0, 0)$, *что* $E \bigcup k$ *связно между* $(0, 0)$ *и* $k$.

Если $X$ — топологическое пространство, $x \in X$, то через $Q_x(X)$ обозначаем квазикомпоненту точки $x$ в пространстве $X$ (т. е. пересечение всех открыто-замкнутых подмножеств, содержащих точку $x$).

Замечание 2. Если $X$ — топологическое пространство, $Y \subseteq X$, $y \in Y$, то $Q_y(Y) \subseteq Q_y(X)$. В любой топологической группе квазикомпонента единицы является замкнутым нормальным делителем.

Если $G$ — некоторая группа, $\varnothing \neq S \subseteq G$, то через $\langle S \rangle$ обозначаем подгруппу, порожденную подмножеством $S$. Подгруппа, порожденная одним элементом $x$, обозначается через $\langle x \rangle$.

ЛЕММА 4. *Пусть* $G$ — *топологическая абелева группа,* $E$ — *подгруппа группы* $G$ *и* $x \in G$. *Если* $x \in Q_0(E \bigcup \bigcup x)$ *и существует такой непрерывный гомоморфизм*

$$f\colon G \to G'$$

*на другую топологическую группу* $G'$, *причем* $Q_0(G') = 0$ *и* $\mathrm{Ker}\, f = \langle x \rangle$, *то* $Q_0(G) = \langle x \rangle$.

Доказательство. Подгруппа $\mathrm{Ker}\, f$ замкнута, и существует непрерывный изоморфизм группы $G/\mathrm{Ker}\, f$

на $G'$. Так как $Q_0(G') = 0$, то $Q_0(G/\mathrm{Ker}\, f) = 0$. Поэтому $Q_0(G) \subseteq \mathrm{Ker}\, f$ [1]).

По замечанию 2 $x \in Q_0(E \cup x) \subseteq Q_0(G)$. Так как $Q_0(G)$ — подгруппа группы $G$, то $\langle x\rangle \subseteq Q_0(G)$; таким образом, $Q_0(G) = \langle x\rangle$. Лемма доказана.

Замечание 3. а) Всякая несчетная подгруппа в $\mathbf{R}$ всюду плотна; б) всякая собственная подгруппа группы $\mathbf{R}$ нульмерна в смысле ind.

ТЕОРЕМА. *На плоскости* $\mathbf{R}^2$ *существует такая подгруппа* $G$, *что* $Q_{(0,0)}(G)$ *дискретна и изоморфна группе целых чисел* $\mathbf{Z}$. *Далее, компонента* $C$ *нуля группы* $G$ *равна нулю, и* $G$, *рассматриваемая без топологии,— свободная группа ранга* $2^{\aleph_0} = \exp \aleph_0$.

Доказательство. Группа $\mathbf{R}$ является векторным пространством размерности $\exp \aleph_0$ над полем $\mathbf{Q}$ рациональных чисел. Пусть $\Omega$ — некоторое множество мощности $\exp \aleph_0$ и $\mathbf{R} = \sum_{\alpha\in\Omega} Q_\alpha$ — разложение $\mathbf{R}$ в прямую сумму одномерных подпространств. Значит, каждая группа $Q_\alpha$ алгебраически изоморфна группе $\mathbf{Q}$ рациональных чисел.

В каждой группе $Q_\alpha$ выбираем по одному ненулевому элементу $l_\alpha$ и обозначим $Z_\alpha = \langle e_\alpha\rangle$. Тогда $Z_\alpha$ алгебраически изоморфна группе $\mathbf{Z}$. Очевидно, что $Z_\alpha \neq Q_\alpha$, поэтому $Q_\alpha/Z_\alpha \neq 0$.

Рассмотрим подгруппу $S = \sum_{\alpha\in\Omega} Z_\alpha \subsetneq \mathbf{R}$. Группа $S$ несчетна, а потому по замечанию 3 а) всюду плотна в $\mathbf{R}$. Так как фактор-группа $\mathbf{R}/S$ (рассматриваемая без топологии) изоморфна группе $\sum_{\alpha\in\Omega} Q_\alpha/Z_\alpha$ (— прямая сумма групп $Q_\alpha/Z_\alpha$, $\alpha \in \Omega$), то $|\mathbf{R}/S| = \exp \aleph_0$. Далее заметим, что если $r$ — произвольный элемент из $\mathbf{R}$, то $S + \langle r\rangle \neq \mathbf{R}$, ибо в противном случае имели бы $|\mathbf{R}/S| = \aleph_0$.

Семейство $\mathfrak{S}$ всех $G_\delta$-множеств в $\mathbf{R}^2$ имеет мощность $\exp \aleph_0$, а потому все элементы из $\mathfrak{S}$ можно занумеровать элементами из $\Omega$: $\mathfrak{S} = \{\Gamma_\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$.

---

[1]) Если $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение топологического пространства $X$ в топологическое пространство $Y$, $x \in X$, то $f(Q_x(X)) \subseteq Q_{f(x)}(Y)$. Поэтому, если $G$ — топологическая абелева группа и $H$ — такая замкнутая подгруппа, что $Q_0(G/H) = 0$, то $Q_0(G) \subseteq H$. В самом деле, если $p\colon G \to G/H$ — канонический гомоморфизм, то $p(Q_0(G)) \subseteq Q_{p(0)}(G/H) = Q_0(G/H) = 0$, т. е. $Q_0(G) \subseteq H$.

Дальнейшие рассуждения являются модификацией рассуждений Хильгерса (см. [2, § 27, IX, с. 311—312]). Выбираем элементы $(e_\alpha, r_\alpha) \in \mathbf{R}^2$ следующим образом: если $(e_\alpha, \mathbf{R}) \subseteq \Gamma_\alpha$, то в качестве $r_\alpha$ выбираем любой элемент из $\mathbf{R}$. Если же $(e_\alpha, \mathbf{R}) \not\subseteq \Gamma_\alpha$, то в качестве $r_\alpha$ выбираем такой элемент $r_\alpha \in \mathbf{R}$, чтобы $(e_\alpha, r_\alpha) \notin \Gamma_\alpha$.

Пусть $P = \langle (e_\alpha, r_\alpha) \mid \alpha \in \Omega \rangle$ и $\varphi$: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $\varphi(x, y) = x$. Имеем $e_\alpha \in \varphi(P)$ для каждого $\alpha \in \Omega$, а потому $S \subseteq \varphi(P)$. Очевидно, что $\varphi(P) \subseteq S$, стало быть, $\varphi(P) = S$.

Утверждаем, что $\operatorname{ind} P = 1$. В самом деле, так как $S \neq \mathbf{R}$, то по замечанию 3 б) $\operatorname{ind} S = 0$. Тогда (см. [2, § 27, VIII, с. 310]) $\operatorname{ind}(S \times \mathbf{R}) \leqslant \operatorname{ind} S + \operatorname{ind} \mathbf{R} = \operatorname{ind} \mathbf{R} = 1$. Так как $P \subseteq S \times \mathbf{R}$, то $\operatorname{ind} P \leqslant 1$.

С другой стороны (см. [2, § 27, IV, с. 307]), существует такое $G_\delta$-множество $H$, что $P \subseteq H \subseteq \mathbf{R}^2$ и $\operatorname{ind} P = \operatorname{ind} H$. Тогда $H = \Gamma_{\alpha_0}$ для некоторого $\alpha_0 \in \Omega$. Так как $(e_{\alpha_0}, r_{\alpha_0}) \in P \subseteq \Gamma_{\alpha_0}$, то в силу выбора элементов $(e_\alpha, r_\alpha)$ $(e_{\alpha_0}, \mathbf{R}) \subseteq \Gamma_{\alpha_0}$, поэтому $\operatorname{ind} \Gamma_{\alpha_0} \geqslant 1$, т. е. $\operatorname{ind} P \geqslant 1$. Значит, $\operatorname{ind} P = 1$.

Поэтому $\operatorname{ind}_{(0,0)} P = 1$. По лемме 3 существует такая точка $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, $(a, b) \neq (0, 0)$, что множество $P \cup (a, b)$ связно между точками $(0, 0)$ и $(a, b)$, т. е. если $U$ — открыто-замкнутое подмножество в $P \cup (a, b)$, содержащее $(0, 0)$, то $(a, b) \in U$. Иначе говоря, $(a, b) \in Q_{(0,0)}(P \cup (a, b))$. Поэтому (см. замечание 2) $(a, b) \in Q_{(0,0)}(P \cup (a, b)) \subseteq Q_{(0,0)}(P + \langle (a, b) \rangle)$.

Рассмотрим множество $\varphi(P + \langle (a, b) \rangle) = \varphi(P) + \langle \varphi(a, b) \rangle = S + \langle a \rangle$. Как было замечено выше, $S + \langle a \rangle \neq \mathbf{R}$, а потому по замечанию 3 б) $\operatorname{ind}(S + \langle a \rangle) = 0$. В частности, $Q_0(S + \langle a \rangle) = 0$.

Пусть $\lambda$: $P + \langle (a, b) \rangle \xrightarrow{\text{на}} S + \langle a \rangle$, где $\lambda = \varphi \mid (P + \langle (a, b) \rangle)$. Имеем $\lambda(Q_{(0,0)}(P + \langle (a, b) \rangle)) = 0$, откуда $\lambda(a, b) = 0$, т. е. $\varphi(a, b) = 0 = a$. Поэтому $S + \langle a \rangle = S$. Так как $(a, b) \neq (0, 0)$, то $b \neq 0$.

Итак, $\lambda$ отображает подгруппу $P + \langle (0, b) \rangle$ на $S$, причем $Q_0(S) = 0$.

Покажем, что $\operatorname{Ker} \lambda = \langle (0, b) \rangle$. В самом деле, если $m \in \mathbf{Z}$, то $\lambda(m(0, b)) = \lambda(0, mb) = \varphi(0, mb) = 0$, т. е. $\langle (0, b) \rangle \subseteq \operatorname{Ker} \lambda$. Докажем, что $\operatorname{Ker} \lambda \subseteq \langle (0, b) \rangle$. Пусть $p \in P$, $m \in \mathbf{Z}$ и $\lambda(p + m(0, b)) = 0$. Тогда найдутся такие $k_1, \ldots, k_n \in \mathbf{Z}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Omega$ (все $\alpha_i$, $i = 1, \ldots, n$, попарно различны), что $p = k_1(e_{\alpha_1}, r_{\alpha_1}) + \ldots + k_n(e_{\alpha_n}, r_{\alpha_n})$.

Имеем

$$p + m(0, b) = \\ = k_1(e_{\alpha_1}, r_{\alpha_1}) + \ldots + k_n(e_{\alpha_n}, r_{\alpha_n}) + (0, mb) = \\ = (k_1 e_{\alpha_1} + \ldots + k_n e_{\alpha_n}, k_1 e_{\alpha_1} + \ldots + k_n e_{\alpha_n} + mb).$$

Отсюда

$$\lambda(p + m(0, b)) = \varphi(p + m(0, b)) = \\ = \varphi(k_1 e_{\alpha_1} + \ldots + k_n e_{\alpha_n}, k_1 e_{\alpha_1} + \ldots + k_n e_{\alpha_n} + \\ + mb) = k_1 e_{\alpha_1} + \ldots + k_n e_{\alpha_n} = 0.$$

Так как $\mathbf{R} = \sum_{\alpha \in \Omega} Q_\alpha$ — прямая сумма подгрупп $Q_\alpha$, $\alpha \in \Omega$, то $k_1 e_{\alpha_1} = \ldots = k_n e_{\alpha_n} = 0$, и поскольку $\mathbf{R}$ — группа без кручения, то $k_1 = \ldots = k_n = 0$. А тогда $p = 0$, т. е. $p + m(0, b) \in \langle(0, b)\rangle$, или $\operatorname{Ker} \lambda \subseteq \langle(0, b)\rangle$. Мы доказали, что $\operatorname{Ker} \lambda = \langle(0, b)\rangle$.

Находимся в условиях леммы 4, поэтому $Q_{(0,0)}(P + \langle(0, b)\rangle) = \langle(0, b)\rangle$.

Очевидно, что $\langle(0, b)\rangle$ — дискретная группа изоморфная $\mathbf{Z}$. Так как $\langle(0, b)\rangle \supseteq C$ и $C$ связна, то $C = 0$.

Докажем, что $P + \langle(0,b)\rangle$ — свободная группа с базисом $\{(e_\alpha, r_\alpha) \mid \alpha \in \Omega\} \cup \{(0, b)\}$. В самом деле, пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Omega$ и $k_1, \ldots, k_{n+1} \in \mathbf{Z}$, причем $k_1(e_{\alpha_1}, r_{\alpha_1}) + \ldots + k_n(e_{\alpha_n}, r_{\alpha_n}) + k_{n+1}(0, b) = 0$. Тогда $k_1 e_{\alpha_1} + k_n e_{\alpha_n} = 0 \Rightarrow k_1 = \ldots = k_n = 0$. Поэтому $k_{n+1} b = 0 \Rightarrow k_{n+1} = 0$. Группа $G = P + \langle(0, b)\rangle$ искомая. Теорема доказана.

Институт математики
с вычислительным центром
АН МССР

Поступило
11.10.84

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Hilgers A. Bemerkung zur Dimensiontheorie.— Fund. Math., 1937, v. 28, p. 303—304.
[2] Куратовский К. Топология, т. 1.— М.: Мир, 1966.
[3] Куратовский К. Топология, т. 2.— М.: Мир, 1969.