А. И. Козко, Л. М. Лужина, А. Ю. Попов, В. Г. Чирский, Локализация показателя оптимальной экспоненты задачи Рамсея — Касса — Купманса стремящейся к бесконечности степенной функции полезности, *Чебышевский сб.*, 2021, том 22, выпуск 2, 121–134

DOI: 10.22405/2226-8383-2018-22-2-121-134

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 2.

УДК 518.865 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-121-134

Локализация показателя оптимальной экспоненты задачи Рамсея — Касса — Купманса стремящейся к бесконечности степенной функции полезности[1]

А. И. Козко, Л. М. Лужина, А. Ю. Попов, В. Г. Чирский

Козко Артем Иванович — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Российская академия народного хозяйства и государственной службы (г. Москва).
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk
Лужина Любовь Михайловна — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Российская академия народного хозяйства и государственной службы (г. Москва).
e-mail: lluzhina@gmail.com
Попов Антон Юрьевич — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Российская академия народного хозяйства и государственной службы (г. Москва).
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk
Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Российская академия народного хозяйства и государственной службы (г. Москва).
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Аннотация

В статье исследуется полная полезность экономической деятельности. В случае производстывенной функции Кобба-Дугласа и экономического ресурса $K(t) = K_0e^{-\lambda t}$ доказывается, что показатель экспоненты λ, доставляющий максимум полной полезности, находится в определенном интервале.

Ключевые слова: математическая модель, задача Рамсея — Касса — Купманса, конкурентные домохозяйства, максимизация полной полезности.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
А. И. Козко, Л. М. Лужина, А. Ю. Попов, В. Г. Чирский. Локализация показателя оптимальной экспоненты задачи Рамсея — Касса — Купманса стремящейся к бесконечности степенной функции полезности // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 121–134.

[1]Работа первого автора выполнена при поддержке РФФИ (проект 19-01-00332-а).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 2.

UDC 518.865 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-121-134

Localization of the indicator optimal exponent of the Ramsey–Kass–Koopmans problem tending to infinity of the power utility function

A. I. Kozko, L. M. Luzhina, A. Yu. Popov, V. G. Chirskii

Kozko Artem Ivanovich — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; Moscow center of fundamental and applied mathematics, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow).
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk
Luzhina Lyubov Mihailovna — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow).
e-mail: lluzhina@gmail.com
Popov Anton Yurievich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow).
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk
Chirskii Vladimir Grirorevich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow).
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Abstract

The full utility of economic activity is investigated in article. In the case of the Cobb-Douglass production function and the economic resource $K(t) = K_0 e^{-\lambda t}$, it is proved that the exponent of λ that delivers the maximum of total utility is in a certain interval.

Keywords: mathematical model, Ramsey–Kass–Koopmans problem, competitive households, maximizing total utility.

Bibliography: 16 titles.

For citation:
A. I. Kozko, L. M. Luzhina, A. Yu. Popov, V. G. Chirskii, 2021, “Localization of the indicator optimal exponent of the Ramsey–Kass–Koopmans problem tending to infinity of the power utility function”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 121–134.

Введение и основной результат

Задача Рамсея —Касса —Купманса (см. [1], [2], [8]) заключается в максимизации интеграла

$$P = \int_0^{+\infty} U\left(f\left(K(t)\right) - \dot{K}(t)\right) e^{-\rho t} dt. \tag{1}$$

Точная верхняя грань интегралов (1) берется по всем не возрастающим на луче $[0;+\infty)$ функциям $K \in C^1[0;+\infty)$, удовлетворяющим условиям (число $K_0 > 0$ задано)

$$K(0) = K_0, \quad \lim_{t\to+\infty} K(t) = 0. \tag{2}$$

Такая задача ставится при исследовании эффективности различного рода экономических моделей, где в качестве U (функции полезности) обычно рассматривают

$$U(C) = U_\theta(C) = \frac{C^{1-\theta}-1}{1-\theta}, \quad C > 0, \quad \theta > 0. \tag{3}$$

В "особом"случае $\theta = 1$ функция полезности является логарифмической:

$$U_1(C) = \lim_{\theta\to1} U_\theta(C) = \lim_{x\to0} \frac{C^x - 1}{x} = \ln C. \tag{4}$$

Все функции (3) возрастают на луче $0 < C < +\infty$, но стремятся к $+\infty$ при $C \to +\infty$ только при $0 < \theta \leqslant 1$. В исследованиях по этой тематике рассматривались всевозможные значения параметра θ: значения $\theta \in (0;1)$, $\theta = 1$ и $\theta > 1$ брались в [7]-[12], [16] в [13] фигурировала функция (4). Здесь мы уделим внимание значениям $0 < \theta \leqslant 1$, особому случаю $\theta = 1$ была посвящена наша статья [3].

Отметим, что авторами был разобран аналог поставленной модели в случае конечного отрезка [5], [6] (интегрирование в (1) ведётся по конечному отрезку).

Интеграл (1) в рассматриваемых моделях выражает полную полезность экономической деятельности. Функция $K(t)$ интерпретируется как экономический ресурс (капитал) в момент времени t. В наиболее простых моделях считается, что происходит непрерывное вложение экономического ресурса в производство и поэтому $K(t)$ — убывающая функция. Функция $f(K)$ выражает зависимость производства продукции от величины капитала. Обычно согласно Коббу и Дугласу (историю этой производственной функции можно посмотреть в [14]) рассматривают степенную зависимость

$$f(K) = aK^\alpha, \quad a > 0, \quad 0.5 \leqslant \alpha < 1. \tag{5}$$

Производственная функция (5) с показателем $\alpha < 0.5$ делает экономическую модель заведомо неэффективной. Впрочем, значения $\alpha \in [0.5; 0.7]$ также представляют, в основном, теоретический интерес. Наиболее востребованы в приложениях значения $\alpha \in [0.72; 0.96]$, а чаще всего берут $\alpha = 0.75$ (см. [8]). В работе [15] было замечено, что, например, при $\alpha = 0.3$ модель Рамсея —Касса —Купманса не представляет интереса.

Число ρ называется ставкой временного предпочтения. Обычно (см. [8]) этот параметр лежит в границах $\rho \in (0; 0.025]$.

Задача максимизации интеграла (1) вкладывается в общую схему поиска экстремалей $K(t)$ интеграла

$$\int_0^T F(t, K(t), \dot{K}(t))\, dt, \tag{6}$$

удовлетворяющих граничным условиям $K(0) = K_0$, $K(T) = K_1$, где F — произвольная гладкая функция трех переменных. В нашем случае

$$F(t, K(t), \dot{K}(t)) = U(f(K) - \dot{K})e^{-\rho t}. \tag{7}$$

Если не накладывать на функцию $K(t)$ дополнительных ограничений (таким ограничением в исследуемой модели является неравенство $\dot{K}(t) \leqslant 0$), то экстремали интеграла (6) являются решениями уравнения Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{K}}\right),$$

сводящегося к нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка относительно функции $K(t)$. Для зависимости (7) мы выписали соответствующие уравнения в [3], но получившееся уравнение даже в этом случае, когда функции U и f имеют максимально простой вид (3)–(5), не решается в квадратурах. Ещё сложнее выглядит система уравнений, из которой находится $K(t)$, получаемая на основе принципа максимума Понтрягина и учитывающая ограничение $\dot{K}(t) \leqslant 0$. В то же время, в практической деятельности достаточно найти режим вложения экономического ресурса $K(t)$ пусть не оптимальный, но достаточно близкий к оптимальному, который был бы максимально простой функцией времени. Наиболее простыми убывающими функциями, удовлетворяющими условия (2) являются экспоненты

$$K(t) = K_0 e^{-\lambda t}, \quad t \geqslant 0, \quad \lambda > 0. \tag{8}$$

В этой работе мы исследуем, какой из показателей λ дает максимальное значение интеграла полной полезности (1), когда в качестве $K(t)$ берутся только функции (8), а функция полезности U задана формулой (3), в которой мы рассматриваем значения $\theta \in (0;1)$. Подставив в интеграл (1) функцию (8) и её производную

$$\dot{K}(t) = -\lambda K_0 e^{-\lambda t},$$

мы приходим к задаче максимизации интеграла

$$P_\theta(\lambda) = \int_0^{+\infty} U_\theta(aK_0^\alpha e^{-\alpha\lambda t} + \lambda K_0 e^{-\lambda t}) e^{-\rho t}\, dt \tag{9}$$

на действительной полуоси $0 \leqslant \lambda < +\infty$. В предыдущей нашей работе [3] мы рассмотрели "особое" значение $\theta = 1$. В предположении, что начальный экономический ресурс K_0 является ”достаточно большим”, а именно, величина

$$\varepsilon = aK_0^{\alpha-1}\rho^{-1}$$

мала (нам хватило неравенства $\varepsilon \leqslant 1/3$), мы получили следующий результат.

Теорема 1. *(см. теорему 2 из [3]). Если* $1/2 \leqslant \alpha < 1$, *постоянные* a, ρ, K_0 *таковы, что* $\varepsilon \leqslant 1/3$, *то оптимальный показатель* λ *экспоненты* (8) *в задаче максимизации на луче* $0 \leqslant \lambda < +\infty$ *интеграла*

$$\int_0^{+\infty} \ln(aK_0^\alpha e^{-\alpha\lambda t} + \lambda K_0 e^{-\lambda t}) e^{-\rho t}\, dt$$

существует, единствен и лежит на интервале $((1-\varepsilon)\rho, \rho)$.

Здесь мы доказываем аналог теоремы 1 для произвольных значений параметра $\theta \in (0;1)$, который усиливает её результат, позволяя рассматривать произвольное значение $\theta \in (0;1)$. Вместе с тем, здесь не выясняется вопрос единственности оптимального показателя. Однако ввиду наибольшего разброса получаемых значений величины λ, которая может быть оптимальной в рассматриваемой задаче, вопрос единственности в приложениях не имеет решающего значения.

Основным результатом статьи являются следующая теорема. В ней мы рассматриваем параметр α, определяющий производственную функцию Кобба – Дугласа (5), удовлетворяющий ограничению $2/3 \leqslant \alpha < 1$.

Теорема 2. *Пусть* $\theta \in (0;1)$. *Тогда при условии* $\varepsilon \leqslant \alpha$ *показатель* λ *экспоненты* (8), *доставляющий максимум на полуоси* $0 \leqslant \lambda < +\infty$ *интеграла* (9), *лежит в интервале*

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{\alpha}\right)\frac{\rho}{\theta} < \lambda < \frac{\rho}{\theta}.$$

Скажем несколько слов о структуре статьи. В §2 мы выводим интегральное представление производной по переменной λ функции полной полезности (9). Затем мы доказываем две леммы, дающие возможность определить знак интеграла от специальным образом устроенной функции с одной переменной знака. В §3 и §4 мы доказываем более детальные, нежели теорема 2, утверждения о монотонности функции полной полезности $P_\theta(\lambda)$, из которых следует теорема 2. В заключительном параграфе мы подводим итог нашему исследованию и намечаем перспективы дальнейших исследований в данном направлении.

Вспомогательные утверждения

Запишем интеграл, которым выражается функция (9) в более краткой форме, введя функцию двух переменных

$$C(t,\lambda) = aK_0^\alpha e^{-\alpha\lambda t} + \lambda K_0 e^{-\lambda t}:$$

$$P_\theta(\lambda) = \int_0^{+\infty} U_\theta(C(t,\lambda))e^{-\rho t}\,dt. \tag{10}$$

Нетрудно убедиться в том, что на множестве

$$\{(t,\lambda) \mid 0 \leqslant t < +\infty, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0\} \tag{11}$$

функция $C(t,\lambda)$ является положительной и ограниченной, каково бы ни было число λ_0. Поэтому функция $U_\theta(C(t,\lambda))$ при любом $\theta \in (0;1)$ также является ограниченной на любом множестве вида (11). Отсюда заключаем, что в виду наличия в подынтегральной функции сомножителя $e^{-\rho t}$, интеграл (10) равномерно сходится по λ на любом отрезке $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0$, а значит, представляет собой непрерывную функцию переменной λ на полуоси $0 \leqslant \lambda < +\infty$. Итак, мы доказали непрерывность $P_\theta(\lambda)$ на луче $[0;+\infty)$. Теперь докажем непрерывную дифференцируемость этой функции. Согласно известной теореме о дифференцируемости интеграла по параметру для этого достаточно непрерывной дифференцируемости по λ подынтегральной функции и равномерной сходимости на любом отрезке $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0$ интеграла от частной производной подыинтегральной функции по переменной λ. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}U_\theta(C(t,\lambda)) = U_\theta'(C(t,\lambda))\frac{\partial C}{\partial\lambda} = C^{-\theta}(t,\lambda)\frac{\partial C}{\partial\lambda}(t,\lambda) =$$
$$= \frac{K_0e^{-\lambda t} - \lambda t K_0 e^{-\lambda t} - aK_0^\alpha \alpha t e^{-\alpha\lambda t}}{(aK_0^\alpha e^{-\alpha\lambda t} + \lambda K_0 e^{-\lambda t})^\theta} = \frac{1 - \lambda t - aK_0^{\alpha-1}\alpha t e^{(1-\alpha)\lambda t}}{K_0^{\theta-1}e^{\lambda t}(aK_0^{\alpha-1}e^{-\alpha\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t})^\theta}.$$

Воспользовавшись обозначениями

$$\varepsilon = aK_0^{\alpha-1}\rho^{-1}, \quad \beta = 1-\alpha,$$

окончательно получаем

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}U_\theta(C(t,\lambda)) = K_0^{1-\theta}\frac{1 - \lambda t - \alpha\varepsilon\rho t e^{\lambda\beta t}}{(\lambda + \varepsilon\rho e^{\lambda\beta t})^\theta} \cdot e^{-\lambda(1-\theta)t}. \tag{12}$$

Ниже понадобится еще одна форма записи частной производной по λ функции $U_\theta(C(t,\lambda))$, получающаяся тождественным преобразованием правой части (12):

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}U_\theta(C(t,\lambda)) = K_0^{1-\theta}(A_1(t,\lambda) - A_2(t,\lambda)) \cdot e^{-\lambda(1-\theta)t}, \tag{13}$$

где

$$A_1(t,\lambda) = \frac{1 + \beta\varepsilon\rho t e^{\lambda\beta t}}{(\lambda + \varepsilon\rho e^{\lambda\beta t})^\theta}, \quad A_2(t,\lambda) = t(\lambda + \varepsilon\rho e^{\lambda\beta t})^{1-\theta}. \tag{14}$$

Поскольку

$$\frac{1+\beta\varepsilon\rho t e^{\lambda\beta t}}{\lambda+\varepsilon\rho e^{\lambda\beta t}} < \frac{1}{\lambda+\varepsilon\rho} + \beta t,$$

то верна оценка сверху

$$A_1(t,\lambda) < \left(\frac{1}{\lambda+\varepsilon\rho} + \beta t\right)(\lambda+\varepsilon\rho e^{\lambda\beta t})^{1-\theta}. \tag{15}$$

Из (13)–(15) выводим двустороннюю оценку

$$-t(\lambda+\varepsilon\rho e^{\lambda\beta t})^{1-\theta} e^{-\lambda(1-\theta)t} < K_0^{\theta-1}\frac{\partial}{\partial\lambda}U_\theta(C(t,\lambda)) < \left(\frac{1}{\lambda+\varepsilon\rho} + \beta t\right)(\lambda+\varepsilon\rho e^{\lambda\beta t})^{1-\theta} e^{-\lambda(1-\theta)t}. \tag{16}$$

Отсюда заключаем, что в доказательстве тождества

$$P_\theta'(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(U_\theta(C(t,\lambda))\right) e^{-\rho t}\,dt \tag{17}$$

достаточно установить равномерную сходимость интеграла (17) на любом отрезке $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0$. Для этого, в свою очередь (вследствие интегрируемости на полуоси $(1+t)e^{-\rho t}$), достаточно проверить ограниченность функции

$$(\lambda+\varepsilon\rho e^{\lambda\beta t})^{1-\theta} e^{-\lambda(1-\theta)t} \tag{18}$$

на множестве (11), каково бы ни было число $\lambda_0 > 0$. Ввиду неравенства $(a+b)^p \leqslant a^p + b^p$ справедливого при любых $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $p \in [0;1]$, функция (18) не превосходит

$$(\lambda^{1-\theta} + (\varepsilon\rho)^{1-\theta} e^{\lambda\beta(1-\theta)t}) e^{-\lambda(1-\theta)t} = \lambda^{1-\theta} e^{-\lambda(1-\theta)t} + (\varepsilon\rho)^{1-\theta} e^{-\lambda\alpha(1-\theta)t} \leqslant$$
$$\leqslant \lambda^{1-\theta} + (\varepsilon\rho)^{1-\theta} < \lambda + \varepsilon\rho \quad \forall\theta \in (0;1).$$

Ограниченность функции (18) на любом множестве вида (11) доказана, а значит, по признаку Вейерштрасса интеграл (17) сходится равномерно на любом отрезке значений λ, лежащем на положительной полуоси. Тем самым, доказана справедливость интегрального представления (17) производной функции полной полезности (9), а частная производная по λ, стоящая под знаком интеграла, может быть записана в одной из двух форм: (12) или (13)–(14). В дальнейшем потребуются леммы, дающие возможность выяснить знак интеграла от произведения двух функций одна из которых положительна и монотонна, а другая один раз меняет знак с плюса на минус.

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{F} \in L(0;+\infty)$, $t_0 > 0$,*

$$\mathcal{F}(t) > 0 \quad \text{при } 0 < t < t_0, \quad \mathcal{F}(t) < 0 \quad \text{при } t > 0. \tag{19}$$

Пусть, затем, функция φ положительна и не возрастает на луче $[0;+\infty)$. Тогда справедливо неравенство

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{F}(t)\varphi(t)\,dt \geqslant \varphi(t_0)\int_0^{+\infty} \mathcal{F}(t)\,dt. \tag{20}$$

Доказательство. В силу (19), а также положительности и невозрастания функции φ верно неравенство $\mathcal{F}(t)\varphi(t) \geqslant \mathcal{F}(t)\varphi(t_0)$ при любом $t \in (0;+\infty)$ (оно проверяется отдельно на интервале $0 < t < t_0$, в точке $t = t_0$ и на луче $t_0 < t < +\infty$). Проинтегрировав это неравенство, получаем (20). $\square$

Лемма 2. *Пусть функция $\mathcal{F}$ удовлетворяет условиям леммы 1, а положительная функция φ, напротив, неубывает на луче $[0;+\infty)$, и произведение $\mathcal{F}\varphi$ интегрируемо на $(0;+\infty)$. Тогда справедливо неравенство*

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{F}(t)\varphi(t)\,dt \leqslant \varphi(t_0)\int_0^{+\infty} \mathcal{F}(t)\,dt. \tag{21}$$

Доказательство. Доказательство проводится так же, как и в лемме 1: здесь верно неравенство $\mathcal{F}(t)\varphi(t) \leqslant \mathcal{F}(t)\varphi(t_0)$, проинтегрировав которое, получаем (21). □

Промежуток возрастания функции полной полезности

Теорема 3. *При условии $\varepsilon \leqslant \alpha$ функция полной полезности (9) возрастает на промежутке $0 \leqslant \lambda \leqslant (1-\varepsilon/\alpha)\rho/\theta$, имея на нём всюду положительную производную.*

Доказательство. Согласно (12), (17) имеем

$$K_0^{\theta-1}P'_\theta(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\lambda t - \alpha\varepsilon\rho t e^{\lambda\beta t}}{(\lambda+\varepsilon\rho e^{\lambda\beta t})^\theta}\cdot e^{-(\rho+\lambda(1-\theta))t}\,dt. \tag{22}$$

Положим

$$\varphi(t) = (\lambda+\varepsilon\rho e^{\lambda\beta t})^\theta, \quad \mathcal{F}(t) = (1-\lambda t-\alpha\varepsilon\rho t e^{\lambda\beta t})e^{-(\rho+\lambda(1-\theta))t}. \tag{23}$$

Из (22), (23) следует равенство

$$K_0^{\theta-1}P'_\theta(\lambda) = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\mathcal{F}(t)\,dt. \tag{24}$$

Проверим что функции φ и $\mathcal{F}$ удовлетворяют условиям леммы 1. Ввиду возрастания экспоненты и убывания на положительной полуоси степенной функции с отрицательным показателем $(\lambda+\varepsilon\rho e^{\lambda\beta t})^{-\theta}$ является положительной и убывающей функцией на луче $0 \leqslant t < +\infty$. Функция $\mathcal{F}$ интегрируема на этом луче, поскольку является разностью произведений убывающих экспонент на линейные функции (наибольший из показателей этих экспонент, равнен $\lambda\beta-\lambda(1-\theta)-\rho = \lambda(\theta-\alpha)-\rho < -\lambda\alpha \leqslant 0$, поскольку $\lambda\theta-\rho<0$). С помощью формул $\int_0^{+\infty} e^{-\mu t}\,dt = \mu^{-1}$, $\int_0^{+\infty} te^{-\mu t}\,dt = \mu^{-2}$ (для $\mu>0$) интеграл $\int_0^{+\infty}\mathcal{F}(t)\,dt$ вычисляется:

$$\int_0^{+\infty}\mathcal{F}(t)\,dt = \frac{1}{\rho+\lambda(1-\theta)} - \frac{\lambda}{(\rho+\lambda(1-\theta))^2} - \frac{\alpha\rho\varepsilon}{(\rho+\lambda(1-\theta)-\lambda\beta)^2} = \\ = \frac{\rho-\lambda\theta}{(\rho+\lambda(1-\theta))^2} - \frac{\alpha\rho\varepsilon}{(\rho+\lambda(1-\theta)-\lambda\beta)^2}. \tag{25}$$

Наконец, функция $\mathcal{F}(t)$ действительно меняется знак один раз с плюса на минус, поскольку функция $1-\lambda t-\alpha\varepsilon\rho t e^{\lambda\beta t}$ непрерывна, убывает на луче $0\leqslant t<+\infty$, в точке $t=0$ равна 1, а в точке $t=1/\lambda$ равна $-(\alpha\varepsilon\rho t)e^\beta < 0$ (в частности, отсюда видно, что точка t_0 перемены знака $\mathcal{F}(t)$ меньше $1/\lambda$). В результате применения леммы 1 заключаем, что для доказательства положительности интеграла (24) достаточно проверить положительность интеграла (25), то есть установить справедливость неравенства

$$\frac{\alpha\rho\varepsilon}{(\rho+\lambda(1-\theta)-\lambda\beta)^2} < \frac{\rho-\lambda\theta}{(\rho+\lambda(1-\theta))^2}. \tag{26}$$

Поскольку $\lambda \leqslant \left(1-\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)\frac{\rho}{\theta}$, то $\lambda\theta \leqslant \left(1-\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)\rho$, а значит $\rho-\lambda\theta \geqslant \frac{\varepsilon\rho}{\alpha}$. Отсюда видно, что заменив в числителе правой части (26) величину $\rho-\lambda\theta$ на её оценку снизу $\varepsilon\rho/\alpha$, мы вправе доказать вместо (26) более сильное и одновременно более простое неравенство

$$\frac{\alpha\rho\varepsilon}{(\rho+\lambda(1-\theta)-\lambda\beta)^2} < \frac{\varepsilon\rho}{\alpha(\rho+\lambda(1-\theta))^2},$$

равносильное ввиду положительности всех сомножителей (в том числе выражений, возводимых в квадрат) следующему:

$$\alpha < \frac{\rho + \lambda(1-\theta) - \lambda\beta}{\rho + \lambda(1-\theta)}. \tag{27}$$

Нетрудно убедиться в том, что правая часть неравенства (27) является убывающей функцией переменной λ на луче $0 \leqslant \lambda < +\infty$ и в точке $\lambda = \rho/\theta$ принимает значение, равное α. А так как у нас $\lambda \leqslant (1-\varepsilon/\lambda)\rho/\theta < \rho/\theta$, то правая часть неравенства (27) больше α, что и требуется доказать. Тем самым положительность производной функции полной полезности (9) на отрезке $0 \leqslant \lambda \leqslant (1-\varepsilon/\lambda)\rho/\theta$ доказана, и доказательство теоремы завершено. □

Промежуток убывания функции полной полезности

Теорема 4. *Функция полной полезности* (9) *убывает на луче* $\rho/\theta \leqslant \lambda < +\infty$, *имея на нём всюду отрицательную производную.*

Доказательство. Рассмотрим функцию двух переменных

$$J_\theta(\lambda,\xi) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \lambda t - \alpha\xi\rho t e^{\lambda\beta t}}{(\lambda + \xi\rho e^{\lambda\beta t})^\theta} \cdot e^{-(\rho+\lambda(1-\theta))t}\, dt. \tag{28}$$

Согласно (22) справедливо равенство

$$K_0^{\theta-1} P'_\theta(\lambda) = J_\theta(\lambda,\varepsilon),$$

и, следовательно, мы должны установить справедливость неравенства

$$J_\theta(\lambda,\varepsilon) < 0 \quad \forall\lambda \geqslant \frac{\rho}{\theta} \quad \forall\varepsilon > 0. \tag{29}$$

На первом этапе доказательства мы собираемся применить следующее соображение. Коль скоро справедливо равенство

$$J_\theta(\lambda,0) = \lambda^{-\theta}\int_0^{+\infty} (1-\lambda t) e^{-(\rho+\lambda(1-\theta))t}\, dt =$$
$$= \lambda^{-\theta}\left(\frac{1}{\rho+\lambda(1-\theta)} - \frac{\lambda}{(\rho+\lambda(1-\theta))^2}\right) = \frac{\lambda^{-\theta}(\rho-\lambda\theta)}{(\rho+\lambda(1-\theta))^2},$$

то

$$J_\theta\left(\frac{\rho}{\theta},0\right) = 0, \quad J_\theta(\lambda,0) < 0 \quad \forall\lambda > \frac{\rho}{\theta}. \tag{30}$$

Из (30) видно, что для доказательства неравенства (29) достаточно (проверив непрерывность $J_\theta(\lambda,\xi)$ по переменной ξ на луче $0 \leqslant \xi < +\infty$ и дифференцируемость по ξ на открытом луче $0 < \xi < +\infty$ при любом $\lambda \geqslant \rho/\theta$) вывести неравенство

$$\frac{\partial J_\theta}{\partial \xi}(\lambda,\xi) < 0, \quad \forall\lambda \geqslant \frac{\rho}{\theta} \quad \forall\xi > 0. \tag{31}$$

Нам удастся доказать (31) при $0 < \theta \leqslant \alpha$. А когда параметр θ лежит на интервале $\alpha < \theta < 1$, мы это сможем сделать только для значений λ из полуинтервала

$$\frac{\rho}{\theta} \leqslant \lambda < \frac{\rho\theta}{(\theta-\alpha)(1+\theta)}. \tag{32}$$

Полуинтервал (32) непуст; его непустота, как нетрудно проверить равносильна неравенству $\frac{\theta}{1+\theta} < \alpha$, а оно выполняется, поскольку $\frac{\theta}{1+\theta} < 1/2$ при $\theta \in (0;1)$, а параметр α не меньше $2/3$.

Тем самым окажется, что неравенство (29) будет доказано при всех $\theta \in (0;\alpha]$, а при $\theta \in (\alpha;1)$ только для значений λ из полуинтервала (32). Для значений $\lambda \geqslant \rho\theta(\theta-\alpha)^{-1}(1+\theta)^{-1}$ мы докажем (29) другим способом.

Сначала проверим непрерывность функции $J_\theta(\lambda,\xi)$ по переменной ξ на луче $0 \leqslant \xi < +\infty$ при любом $\lambda > 0$. Поскольку подынтегральная функция в (28) по переменной ξ непрерывна на луче $0 \leqslant \xi < +\infty$ при любом $\lambda > 0$, то достаточно доказать равномерную сходимость по $\xi \in [0;\xi_0]$ несобственного интеграла (28) при любом $\lambda > 0$, каково бы ни было положительное число ξ_0. Разобъём интеграл (28) на две части:

$$J_\theta(\lambda,\xi) = J_{\theta,1}(\lambda,\xi) - \alpha\rho J_{\theta,2}(\lambda,\xi),$$

где

$$J_{\theta,1}(\lambda,\xi) = \int_0^{+\infty} \frac{(1-\lambda t)e^{-(\rho+\lambda(1-\theta))t}}{(\lambda+\xi\rho e^{\lambda\beta t})^\theta}\,dt, \quad J_{\theta,2}(\lambda,\xi) = \int_0^{+\infty} \frac{\xi t e^{\lambda\beta t-\rho t-\lambda(1-\theta)t}}{(\lambda+\xi\rho e^{\lambda\beta t})^\theta}\,dt.$$

Интеграл $J_{\theta,1}(\lambda,\xi)$ сходится равномерно по $\xi \in [0;+\infty)$ при любом $\lambda > 0$, поскольку модуль подынтегральной функции имеет интегрируемую по t на полуоси $0 \leqslant t < +\infty$ и не зависящую от ξ мажоранту $\lambda^{-\theta}(\lambda t+1)e^{-\rho t}$. Оценим подынтегральную функцию в $J_{\theta,2}(\lambda,\xi)$. Она положительна и не превосходит

$$\xi^{1-\theta}\rho^{-\theta}te^{\lambda\beta(1-\theta)t-\rho t-\lambda(1-\theta)t} = \xi^{1-\theta}\rho^{-\theta}te^{-\rho t-\lambda\alpha(1-\theta)t} \leqslant \xi_0^{1-\theta}\rho^{-\theta}te^{-\rho t},$$

то есть снова мажорируется функцией, интегрируемой на полуоси $0 \leqslant t < +\infty$, но уже только на отрезке $0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0$. Требуемая равомерная сходимость интеграла (28) доказана.

Подынтегральная функция в (28) при любых $\lambda > 0$ и $t > 0$ непрерывно дифференцируема по переменной ξ на луче $0 \leqslant \xi < +\infty$. Вычислим её частную производную по ξ. Если A, B, A_1, B_1, θ — постоянные, то верна формула дифференцирования

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{A_1-B_1\xi}{(A+B\xi)^\theta}\right) = -\frac{(1-\theta)BB_1\xi+\theta BA_1+AB_1}{(A+B\xi)^{1+\theta}}.$$

Отсюда заключаем, что частная производная по переменной ξ подынтегральной функции в (28) равна

$$-\frac{(1-\theta)\alpha\rho^2t\xi e^{2\lambda\beta t}+\theta\rho(1-\lambda t)e^{\lambda\beta t}+\lambda\alpha\rho t e^{\lambda\beta t}}{(\lambda+\xi\rho e^{\lambda\beta t})^{1+\theta}}e^{-(\rho+\lambda(1-\theta))t} =$$
$$= -\rho\frac{(1-\theta)\alpha\rho t\xi e^{\lambda\beta t}+\theta+\lambda(\alpha-\theta)t}{(\lambda+\xi\rho e^{\lambda\beta t})^{1+\theta}}e^{-\rho t+\lambda(\beta+\theta-1)t}.$$

Поэтому для доказательства равенства

$$\frac{\partial J_\theta}{\partial\xi}(\lambda,\xi) = -\rho\int_0^{+\infty}\frac{(1-\theta)\alpha\rho t\xi e^{\lambda\beta t}+\theta+\lambda(\alpha-\theta)t}{(\lambda+\xi\rho e^{\lambda\beta t})^{1+\theta}}e^{-\rho t+\lambda(\beta+\theta-1)t}\,dt \tag{33}$$

при любых положительных значениях переменных λ и ξ достаточно проверить равномерную сходимость интеграла (33) по $\xi \in [\xi_1,\xi_0]$ при любых $\lambda > 0$, каковы бы ни были положительные числа ξ_1, ξ_0, $\xi_1 < 1 < \xi_0$. С этой целью оценим сверху модуль подынтегральной функции в (33), учитывая, что θ, α, $\rho \in (0;1)$. При любых $\lambda > 0$, $t > 0$ и $\xi \in [\xi_1,\xi_0]$ имеем

$$\left|\frac{(1-\theta)\alpha\rho t\xi e^{\lambda\beta t}+\theta+\lambda(\alpha-\theta)t}{(\lambda+\xi\rho e^{\lambda\beta t})^{1+\theta}}\right| < \frac{\rho t\xi e^{\lambda\beta t}+1+\lambda t}{(\xi\rho e^{\lambda\beta t})^{1+\theta}} =$$
$$= (\rho\xi)^{-\theta}te^{-\lambda\beta\theta t}+(1+\lambda t)(\xi\rho)^{-1-\theta}e^{-\lambda\beta(1+\theta)t} < (\rho\xi_1)^{-2}(1+(1+\lambda)t)e^{-\lambda\beta\theta t}.$$

Отсюда заключаем, что подынтегральная функция в (33) по абсолютной величине не превосходит

$$(\rho\xi_1)^{-2}(1+(1+\lambda)t)e^{-\rho t}e^{(\lambda\beta-\lambda\beta\theta+\lambda(\theta-1))t} = \\ = (\rho\xi_1)^{-2}(1+(1+\lambda)t)e^{-\rho t}e^{\lambda\alpha(\theta-1)t} < (\rho\xi_1)^{-2}(1+(1+\lambda)t)e^{-\rho t}$$

при любых $\lambda > 0$, $t > 0$ и $\xi \in [\xi_1, \xi_0]$, то есть оценивается сверху интегрируемой на полуоси $0 < t < +\infty$ функцией, не зависящей от ξ, когда ξ пробегает фиксированный отрезок. Требуемая равномерная сходимость интеграла (33), а значит, и его равенство частной производной $\partial J_\theta(\lambda,\xi)/\partial\xi$ при любых $\lambda > 0$ и $\xi > 0$ доказаны.

Перейдём к доказательству отрицательности $\partial J_\theta(\lambda,\xi)/\partial\xi$. Согласно (33) для этого надо доказать положительность умноженного на $(-\rho)$ интеграла. В случае $\theta \in (0;\alpha]$ его положительность очевидна, ввиду положительности всех слагаемых в числителе дроби ($\forall\ t > 0$). Рассмотрим случай $\alpha < \theta$ и обозначим $\gamma = \theta - \alpha$. Тогда $\beta + \theta - 1 = \theta - \alpha = \gamma$. Достаточно доказать положительность интеграла

$$\tilde{J}_\theta(\lambda,\xi) = \int_0^{+\infty} \frac{\theta - \lambda\gamma t}{(\lambda + \xi\rho e^{\lambda\beta t})^{1+\theta}} e^{-\rho t + \lambda\gamma t}\, dt. \tag{34}$$

Мы опустили первое положительное слагаемое $(1-\theta)\alpha\rho t\xi e^{\lambda\beta t}$, которое при малых ξ не вносит существенного вклада.

Положим $\varphi(t) = (\lambda + \xi\rho e^{\lambda\beta t})^{-\theta-1}$, $\mathcal{F}(t) = (\theta - \lambda\gamma t)e^{-\rho t+\lambda\gamma t}$. Нетрудно убедиться в том, что функции φ, $\mathcal{F}$ удовлетворяют условиям леммы 1, интеграл

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{F}\, dt = \frac{\theta}{\rho - \lambda\gamma} - \frac{\lambda\gamma}{(\rho-\lambda\gamma)^2} \tag{35}$$

существует, если $\lambda < \rho/\gamma$. В результате применения леммы 1 получим, что положительность интеграла (34) в случае $\alpha < \theta < 1$ следует из положительности интеграла (35), а она имеет место при

$$\lambda < \frac{\theta\rho}{\gamma(1+\theta)} = \frac{\theta\rho}{(\theta-\alpha)(1+\theta)}.$$

Итак, мы выполнили первую часть намеченной выше программы доказательства неравенства (29), и нам осталось доказать отрицательность интеграла $J_\theta(\lambda,\xi)$ или, что то же самое, отрицательность интеграла (17) только при

$$\theta \in (\alpha;1) \quad \lambda \geqslant \frac{\theta\rho}{(\theta-\alpha)(1+\theta)}. \tag{36}$$

Ввиду оценки сверху (16) подынтегральной функции (17), достаточно доказать отрицательность интеграла

$$\tilde{P}_\theta(\lambda) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\lambda+\varepsilon\rho} - \alpha t\right)\left(\lambda + \xi\rho e^{\lambda\beta t}\right)^{1-\theta} e^{-(\rho+\lambda(1-\theta)t}\, dt \tag{37}$$

при любом $\varepsilon > 0$ и произвольных значениях величин θ и λ, указанных в (36).

Положим

$$\varphi(t) = (\lambda + \varepsilon\rho e^{\lambda\beta t})^{1-\theta}, \quad \mathcal{F}(t) = \left(\frac{1}{\lambda+\xi\rho} - \alpha t\right) e^{-(\rho+\lambda(1-\theta)t}\, dt. \tag{38}$$

Нетрудно проверить, что пара функций (38) удовлетворяет условиям леммы (2), а интеграл (37) равен $\tilde{P}_\theta(\lambda) = \int_0^{+\infty}\varphi(t)\mathcal{F}(t)\, dt$. Применив лемму 2, получим, что отрицательности интеграла (37) следует отрицательности интеграла

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{F}(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\lambda+\varepsilon\rho} - \alpha t\right) e^{-(\rho+\lambda(1-\theta)t}\,dt < \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\lambda} - \alpha t\right) e^{-(\rho+\lambda(1-\theta)t}\,dt =$$
$$= \frac{1}{\lambda(\rho+\lambda(1-\theta))} - \frac{\alpha}{(\rho+\lambda(1-\theta))^2} = \frac{\rho+\lambda(1-\theta)-\lambda\alpha}{\lambda(\rho+\lambda(1-\theta))^2} = \frac{\rho+\lambda(\beta-\theta)}{\lambda(\rho+\lambda(1-\theta))^2}.$$

Отсюда заключаем, что интеграл (37) заведомо отрицателен при

$$\lambda \geqslant \frac{\rho}{\theta-\beta},$$

а вместе с ним отрицателен при этих значениях λ интеграл $J_\theta(\lambda,\varepsilon)$, отрицательность которого осталось доказать при условии (36). Поэтому для завершения доказательство теоремы осталось проверить справедливость неравенства

$$\frac{\rho}{\theta-\beta} \leqslant \frac{\theta\rho}{(\theta-\alpha)(1+\theta)} \quad \text{при} \quad \alpha < \theta < 1.$$

Данное неравенство, ввиду положительности всех содержащихся в нем сомножителей, равносильно следующему:

$$(\theta-\alpha)(1+\theta) \leqslant \theta(\theta-\beta) \Longleftrightarrow \theta+\theta^2-\alpha(1+\theta) \leqslant \theta^2-\beta\theta \Longleftrightarrow \theta+\beta\theta \leqslant \alpha+\alpha\theta.$$

А так как $\alpha+\beta=1$, то последнее неравенство сводится к $2\beta\theta \leqslant \alpha$. Тем самым, ввиду ограничения $\theta < 1$, достаточно убедиться в том, что $2\beta \leqslant \alpha$. Но в нашей работе мы рассматриваем значения $\alpha \in [2/3; 1)$, поэтому $\beta = 1-\alpha \in (0; 1/3]$ и неравенство $2\beta \leqslant \alpha$ выполняется. Теорема полностью доказана. $\square$

Заключение

Главный вывод из приведенного исследования стоит в том, что показатель λ экспоненты $K(t) = K_0 e^{-\lambda t}$, дающий среди всех других таких экспонент максимальное значение интеграла (9), лежит (при достаточно большом значение начального экономического ресурса K_0) очень близко к числу ρ/θ, но немного меньше ρ/θ. Таким образом, в качестве наиболее просто устроенной функции $K(t)$, могущей дать, если не оптимальный, то достаточно хороший результат в задаче (1), (2), когда функции U и f заданы формулами (3), (5), рекомендуем экспоненту

$$K(t) = K_0 \exp\left(-\frac{\rho}{\theta}t\right).$$

Представляется перспективным в дальнейшем исследовать, не даст ли линейная комбинация двух убывающих экспонент

$$K(t) = C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t} \quad \text{при условии} \quad C_1 + C_2 = K_0 \tag{39}$$

лучший результат в задаче Рамсея —Касса —Купманса, нежели одна экспонента (22). Более того, есть надежда, что функция (39) окажется достаточно близкой к оптимальному решению задачи (1), (2). В пользу этого говорит следующее обстоятельство. Действительно, экстремали интегралов (1) удовлетворяют уравнениям Эйлера, которые приводятся (по крайней мере в нашем случае) к нелинейным дифференциальным уравнениям второго порядка. После линеаризации, предложенной нами в [4], получается линейное (правда, неоднородное) уравнение второго порядка, а его решение содержит линейную комбинацию двух экспонент, которая может (по крайней мере при "небольших"значениях t) оказаться "лидирующей" компонентой решения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Acemoglu Daron. The Neoclassical Growth Model. Introduction to Modern Economic Growth // Princeton: Princeton University Press. 2009. pp. 287–326. ISBN 978-0-691-13292-1.

2. Bénassy Jean-Pascal. The Ramsey Model. Macroeconomic Theory // New York: Oxford University Press. 2011. P. 145–160. ISBN 978-0-19-538771-1.

3. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Оптимальная экспонента в задаче Рамсея —Касса —Купманса с логарифмической функцией полезности // Чебышевский сборник. 2019;20(4):197-207. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-197-207.

4. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. О задаче Рамсея —Касса — Купманса для потребительского выбора // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2020. Том 182. С. 39–44. DOI: 10.36535/0233-6723-2020-182-39-44

5. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Модель задачи Рамсея —Касса — Купманса // Издательство: Московский педагогический государственный университет (Москва). Классическая и современная геометрия, материалы международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения В. Т. Базылева. под ред. А. В. Царева. Москва. 2019. С. 87-88.

6. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Оценка необходимого начального экономического ресурса в задаче Рамсея–Касса–Купманса // Чебышевский сборник. 2019. Vol 20(4), С. 188-196. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-188-196.

7. Rahul Giri. Growth Model with Endogenous Savings: Ramsey —Cass —Koopmans Model // http://ciep.itam.mx/~rahul.giri/uploads/1/1/3/6/113608/ramsey-cass-koopmans_model.pdf.

8. Барро Р. Дж., Сала-и-Мартин Х. Экономический рост // М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2010.

9. Groth Christian and Koch Karl-Josef and Steger Thomas Michael. Rethinking the Concept of Long-Run Economic Growth (April 2006) // CESifo Working Paper Series No. 1701. Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=899250.

10. Groth Christian, Koch Karl-Josef, Steger Thomas Michael. When Economic Growth is Less than Exponential // Economic Theory. Vol. 44, No. 2, 2010.

11. Groth C. Chapter 10: The Ramsey Model // Available at: `http://web.econ.ku.dk/okocg/VV/VV-2010/Lecture\%20notes/Ch7-2010-1.pdf`, 2010.

12. Romer D. Advanced Macroeconomics. 3rd ed. // New York: McGraw-Hill/Irwin. 2006. P. 651.

13. Robert J. Barro. Ramsey Meets Laibson in the Neoclassical Growth Model // The Quarterly Journal of Economics, Oxford University Press. 1999. Vol. 114, No 4. P. 1125-1152.

14. Paul H. Douglas. In the Fullness of Time: The Memoirs of Paul H. Douglas // New York, Harcourt Brace Jovanovich. 1972.

15. King Robert G., and Sergio Rebelo. Transitional Dynamics and Economic Growth in the Neoclassical Model // American Economic Review. 1993. Vol. 83, September. P. 908-931.

16. Pierre-Olivier Gourinchas. Notes for Econ202A: The Ramsey —Cass —Koopmans Model // UC Berkeley Fall 2014 https://eml.berkeley.edu/~webfac/gourinchas/e202a_f14/Notes_Ramsey_Cass_Koopmans_pog.pdf

REFERENCES

1. Acemoglu, Daron. 2009, "The Neoclassical Growth Model. Introduction to Modern Economic Growth", *Princeton: Princeton University Press.* pp. 287–326. ISBN 978-0-691-13292-1.

2. Bénassy, Jean-Pascal. 2011, "The Ramsey Model. Macroeconomic Theory", *New York: Oxford University Press.* pp. 145–160. ISBN 978-0-19-538771-1.

3. Kozko A.I., Luzhina L.M., Popov A.Yu., Chirskii V.G. 2019, "Optimal exponent in the Ramsey —Kass —Koopmans problem with logarithmic utility function", *Chebyshevskii Sbornik.* vol. 20(4), September. pp. 197-207. (In Russ.) https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-197-207

4. Kozko, A. I., Luzhina, L. M., Popov, A. Yu., Chirskii, V. G. 2020, "On the Ramsey — Kass —Koopmans problem for consumer choice", *Results of science and technology. Modern mathematics and its applications. Thematic review.* vol. 182, September, pp. 39-44. (In Russ.) DOI: 10.36535/0233-6723-2020-182-39-44.

5. Kozko, A. I., Luzhina, L. M., Popov, A. Yu., Chirskii, V. G. 2019, The model of the problem Ramsey —Kass —Koopmans // *Moscow state pedagogical University (Moscow). Classical and modern geometry, materials of the international conference dedicated to the 100th anniversary of V. T. Bazylev. under the editorship of A. V. Tsarev. Moscow.* pp. 87-88.

6. Kozko A.I., Luzhina L.M., Popov A.Yu., Chirskii V.G. 2019, "Assessment of the necessary initial economic resource in the Ramsey —Kass —Koopmans problem", *Chebyshevskii Sbornik.* vol. 20(4), September, pp. 188-196. (In Russ.) https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-188-196.

7. Rahul, Giri. "Growth Model with Endogenous Savings: Ramsey–Cass–Koopmans Model", 2018, `http://ciep.itam.mx/rahul.giri/uploads/1/1/3/6/113608/ramsey-cass-koopmans_model.pdf`.

8. Barro, Robert J., Sala-i-Martin, Xavier. 2003, "Economic growth (2nd ed.)", *Massachusetts: MIT Press*, ISBN 9780262025539.

9. Groth, Christian and Koch, Karl-Josef and Steger, Thomas Michael. 2006, "Rethinking the Concept of Long-Run Economic Growth (April 2006)", *CESifo Working Paper Series*, no. 1701. Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=899250.

10. Groth, Christian and Koch, Karl-Josef and Steger, Thomas Michael. 2010, "When Economic Growth is Less than Exponential", *Economic Theory*, vol. 44, no. 2, pp. 213-242.

11. Groth, C. 2010, "Chapter 10: The Ramsey Model", Available at: `http://web.econ.ku.dk/okocg/VV/VV-2010/Lecture\%20notes/Ch7-2010-1.pdf`.

12. Romer, D. 2006, "Advanced Macroeconomics. 3rd ed", *New York: McGraw-Hill/Irwin*, pp. 651.

13. Robert J. Barro. 1999, "Ramsey Meets Laibson in the Neoclassical Growth Model", *The Quarterly Journal of Economics, Oxford University Press*, vol. 114, no. 4, pp. 1125-1152.

14. Douglas, Paul H. 1972, "In the Fullness of Time: The Memoirs of Paul H. Douglas", *New York, Harcourt Brace Jovanovich.*

15. King Robert, G., and Sergio Rebelo. 1993, "Transitional Dynamics and Economic Growth in the Neoclassical Model", *American Economic Review.* vol. 83, September, pp. 908-931.

16. Pierre-Olivier, Gourinchas. 2014, “Notes for Econ202A: The Ramsey–Cass–Koopmans Model“, *UC Berkeley Fall*, `https://eml.berkeley.edu/webfac/gourinchas/e202a\_f14/Notes\_Ram\-sey\_Cass\_Koop\-mans\_pog.pdf`.