УДК 517.988.68 : 517.977

О. А. ЛИСКОВЕЦ

ДИСКРЕТНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НА НЕКОРРЕКТНЫХ МОНОТОННЫХ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВАХ

Рассматривается задача минимизации абстрактного функционала, зависящего от управления и от решения некорректного вариационного неравенства (в. н.) с ограниченным монотонным точным оператором с μ-свойством (от приближённых операторов эти свойства не требуются, как и μ-свойство в псевдомонотонном случае). Задача дискретизируется по схеме Штуммеля — Вайникко. Показана разрешимость задачи. Для её регуляризации исходное в. н. регуляризуется при помощи в. н. с малой **уступкой. Указан ряд обобщений.**

1. Введение. В современной прикладной и вычислительной математике широко представлены уравнения и вариационные неравенства (в. н.) с монотонными или близкими к ним операторами (см., например, монографии [1—7]). Поэтому неудивительно, что в последнее время внимание исследователей всё больше привлекают задачи оптимального управления решениями таких уравнений и в. н.; укажем в связи с этим лишь работы, относящиеся к случаю стационарных задач: [8—17]. При этом обычно упускается из вида то, что подобные задачи могут оказаться некорректными (неустойчивыми) либо из-за свойств оптимизируемого функционала, либо из-за свойств оператора в уравнении или в. н. Мы рассматриваем здесь именно этот последний случай задачи оптимального управления на множестве решений некорректных стационарных в. н. с монотонными или псевдомонотонными операторами. Для того чтобы придать решениям в. н. устойчивость, мы пользуемся традиционным для в. н. операторным методом регуляризации [18—23], а в интересах использования ЭВМ для решения таких задач одновременно предлагаем её дискретизацию на основе схемы Штуммеля — Вайникко [22—28].

2. Постановка задачи. Рассматривается следующая задача оптимального управления. Пусть задано банахово рефлексивное пространство W, в нём взято замкнутое выпуклое подмножество допустимых управлений U, на котором требуется решить оптимизационную задачу

$$J(u)\to\min_{U},\quad J(u)=f(u)+l(z(u)), \tag{1}$$

где $f\colon U\to R^1$ есть ограниченный снизу и слабо полунепрерывный снизу вещественный функционал с H-свойством, по которому из слабой сходимости $u_n\rightharpoonup u$ и сходимости по функционалу $f(u_n)\to f(u)$ всегда следует сильная сходимость $u_n\to u$; вещественный функционал $l\colon D\subset X\to R^1$ сильно непрерывен и ограничен на всяком ограниченном подмножестве, $z=z(u)\in D\subset X$ — решение в. н.

$$[A(u,\ z(u))-y,\ x-z(u)]\geqslant 0\quad \forall x\in D, \tag{2}$$

X — вещественное банахово рефлексивное пространство со строго выпуклым сопряжённым X^*, множество $D \subset X$ замкнуто и выпукло, элемент $y \in X^*$ фиксирован, а символом $[\cdot, \cdot]$ обозначена двойственность (каноническая билинейная форма) на произведении пространств $X^* \times X$.

Относительно оператора A: $U \times D \mapsto X^*$ предполагается, что он

а) ограничен, т. е. принимает ограниченное множество значений на любом ограниченном подмножестве из области определения $U \times D$;

б) при неограниченном множестве D коэрцитивен по $x \in D$ равномерно по управлениям $u \in U$, т. е. существует такая вещественная функция γ: $R^1 \to R^1$, $\gamma(t) \to +\infty$, $t \to +\infty$, что

$$\forall u \in U \quad \exists x_u \in D, \quad \|x_u\| \leqslant K, \quad \forall x \in D\colon \ [A(u, x), x - x_u] \geqslant \gamma(\|x\|)\|x\|;$$

в) слабо непрерывен по $u \in U$ при каждом $x \in D$;

г) деминепрерывен по $x \in D$ при каждом $u \in U$, т. е. действует непрерывно из сильной топологии пространства X в слабую топологию пространства X^*;

д) при всяком $u \in U$ монотонен [4—7] по $x \in D$, т. е.

$$[A(u, x) - A(u, v), x - v] \geqslant 0 \quad \forall u \in U, \quad x, v \in D;$$

е) обладает обобщением известного S-свойства [7], которое называют μ-*свойством* [17], т. е. из посылок

$$U \ni u_n \rightharpoonup u, \quad D \ni x_n \rightharpoonup x, \quad \overline{\lim_n}\, [A(u_n, x_n), \ x_n - x] \leqslant 0 \tag{3}$$

вытекает сильная сходимость $x_n \to x$.

В п. 6 работы вместо свойства е) будет предполагаться псевдомонотонность оператора A, под которой понимается [6] его ограниченность а) и свойство ж), по которому из посылок (3) вытекает более слабое заключение

$$\underline{\lim_n}\, [A(u_n, x_n), x_n - v] \geqslant [A(u, x), x - v] \quad \forall u \in D.$$

Будем, кроме того, предполагать, что либо множество U ограничено, либо функционал f коэрцитивен, т. е. $f(u) \to +\infty$ при $\|u\| \to \infty$. Ниже, в лемме 4, будет показано, что поставленная задача оптимизации имеет непустое множество решений U_0, т. е. таких элементов $u_0 \in U$, для которых на каком-либо из решений $z(u_0)$ в. н. (2) выполняется равенство

$$J(u_0) = f(u_0) + l(z(u_0)) = \min_U J(u) = m.$$

Ввиду возможного отсутствия у оператора $A(u, x)$ равномерных свойств монотонности сформулированная задача, вообще говоря, относится к числу некорректно поставленных, так как её решение не обязано быть сильно устойчивым к изменениям исходных данных. Тем не менее предположим, что, как это обычно бывает на практике, вместо точных данных y и $A(u, x)$ заданы их приближения $y^\delta \in X^*$, $\|y^\delta - y\| \leqslant \delta$, и операторы A^h: $U \times D \to X^*$, для которых

$$\|A^h(u, x) - A(u, x)\| \leqslant hG(\|u\|, \|x\|) \quad \forall u \in U, \quad x \in D,$$

где функция G: $R^2 \to R^1$ ограничена (переводит ограниченные множества в ограниченные), и, зная функцию G и уровни погрешностей (δ, h), требуется устойчивым образом аппроксимировать какие-либо точные решения исходной задачи (1), (2). Очевидно, что решение этой задачи требует регуляризации, а поскольку решать регуляризованную задачу предпочтительнее на ЭВМ, то желательно, чтобы регуляризация была конечномерной. Ниже мы строим схему конечномерной регуляризации, основанной на операторной регуляризации в. н. при помощи дуального отображения [5—7] и на дискретной аппроксимации пространств и операторов по Штуммелю — Вайникко [24—28].

3. Свойства дискретной аппроксимации и исходные предположения. Пусть для бесконечного числа натуральных индексов $n \in N$, $n \to \infty$, построены банаховы пространства W_n с сопряжёнными W_n^* и система линейных связывающих операторов (проекторов) $P = \{P_n: W \to W_n\}$ такая, что $\|P_n u\| \to \|u\|$ для любого управления u из плотного подмножества $W' \subset W$, $\overline{W'} = W$ (индекс n у знаков нормы, а ниже — и у знаков отношения двойственности, всюду будем опускать, как и указание $n \to \infty$). Проекторы системы P_n и её аналогов не обязаны быть линейными, но иные системы рассматриваться не будут. Последовательность (сеть) $\{u_n\}$, $u_n \in W_n$, называют *дискретно* (сокращенно — д.) *сильно сходящейся* или просто *д. сходящейся* к элементу $u \in W$, если $\|P_n u - u_n\| \to 0$ (сокращённо будем записывать это обычным образом в виде $u_n \to u$). Тем самым определена д. аппроксимация пространства W [24—27]. Для того чтобы определить д. слабую сходимость $u_n \rightharpoonup u$, считаем, что задана аналогичная P система линейных проекторов $Q = \{Q_n: W^* \to W_n^*\}$, для которых $\|Q_n w^*\| \to \|w^*\|$ $\forall w^* \in W_*$, $\overline{W_*} = W^*$. Тогда д. слабая сходимость $u_n \rightharpoonup u$ означает, что для любого $w^* \in W^*$ из д. сильной сходимости $W_n^* \ni w_n^* \to w^*$ вытекает сходимость отношений двойственности («скалярных произведений») $[w_n^*, u_n] \to [w^*, u]$ в произведениях пространств $W_n^* \times W_n$ и $W^* \times W$.

Очевидно, что операции д. сильного и д. слабого предельного переходов обладают обычными свойствами линейности, д. сходимости к тому же предельному элементу всякой бесконечной подсети и т. д. Из д. сильной сходимости следует д. слабая сходимость к тому же пределу и сходимость норм, а из д. слабой сходимости — ограниченность сети и д. полунепрерывность норм снизу, т. е. $u_n \rightharpoonup u$ влечёт неравенство $\|u\| \leqslant \underline{\lim} \|u_n\|$. Поскольку пространство W рефлексивно, то из ограниченности сети $\{u_n\}$, $u_n \in W_n$, вытекает наличие у неё д. слабо предельных точек (свойство д. слабой компактности): $\varnothing \neq \{u_n\}^* \subset W$.

Будем считать, что сеть замкнутых выпуклых подмножеств $\{U_n\}$, $U_n \subset W_n$, д. Моско-аппроксимирует [23, 28, 29] заданное выпуклое замкнутое множество $U \subset W$, т. е. выполнены такие два условия:

1) всякая д. слабо предельная точка любой сети $\{u_n\}$, $u_n \in U_n$, непременно принадлежит множеству U;

2) каждое управление $u \in U$ является д. сильным пределом некоторой сети $\{u_n\}$, $u_n \in U_n$.

Пусть функционал $f: U \to R^1$ аппроксимируется сетью ограниченных снизу функционалов $\{f_n: U_n \to R^1\}$. Предположим, что пара f, $\{f_n\}$ д. слабо полунепрерывна снизу, т. е. из д. слабой сходимости $U_n \ni u_n \rightharpoonup u \in U$ всегда следует неравенство $f(u) \leqslant \underline{\lim} f_n(u_n)$. Будем считать эту пару также д. сильно сходящейся, т. е. д. сильная сходимость $U_n \ni u_n \to u \in U$ влечёт сходимость $f_n(u_n) \to f(u)$. Наконец, будем эту пару считать обладающей д. H-свойством: из сходимостей $u_n \rightharpoonup u$ и $f_n(u_n) \to f(u)$ вытекает д. сильная сходимость $u_n \to u$. Предположим, что этим же д. H-свойством обладает и пара $\|\cdot\|$, $\{\|\cdot\|_n\}$ (здесь имеются в виду нормы пространств

W и $\{W_n\}$). В этом случае говорят, что аппроксимация $\{W_n\}$ пространства W обладает д. свойством Радона — Рисса [22—23].

Пусть для пространств X и X^* определена совместная д. аппроксимация. Это означает [28], что построены банаховы пространства X_n со строго выпуклыми сопряжёнными X_n^* и такие системы линейных проекторов $p=\{p_n\colon X\to X_n\}$ и $q=\{q_n\colon X^*\to X_n^*\}$, что

$$\|p_nx\|\to\|x\|, \qquad \|q_ny\|\to\|y\|, \qquad [q_ny,\,p_nx]\to[y,\,x]$$

для всех x и y из плотных подмножеств $X'\subset X$, $\overline{X'}=X$ и $Y'\subset X^*$, $\overline{Y'}=X^*$. Д. сильная и д. слабая сходимости определяются при этом, как выше. Если $x_n\to x$ и $y_n\to y$ или $x_n\rightharpoonup x$ и $y_n\to y$, то в обоих случаях, очевидно, $[y_n,\,x_n]\to[y,\,x]$.

Считаем, что в пространствах X_n выбраны замкнутые выпуклые подмножества $D_n\subset X_n$, система которых в указанном ранее смысле д. Моско-аппроксимирует заданное выпуклое замкнутое подмножество $D\subset X$. Пусть на множествах $\{D_n\}$ определена такая система равномерно по n ограниченных снизу функционалов $\{l_n\colon D_n\to R^1\}$, что пара l, $\{l_n\}$ д. сильно сходится (см. выше).

Займёмся теперь д. аппроксимацией оператора $A\colon U\times D\to X^*$. Пусть имеются такие операторы $\{A_n\colon U_n\times D_n\to X_n^*\}$, каждый из которых слабо непрерывен по $u_n\in U_n$ при любом $x_n\in D_n$, а при всяком $u_n\in U_n$ деминепрерывен и монотонен по $x_n\in D_n$, причём сеть $\{A_n\}$ равномерно ограничена (т. е. для любого числа $a>0$ существует такое значение $c>0$, что из соотношений $u_n\in U_n$, $x_n\in D_n$, $\|u_n\|\leqslant a$, $\|x_n\|\leqslant a$ следует неравенство $\|A_n(u_n,\,x_n)\|\leqslant c$ при всяком n) и равномерно коэрцитивна (т. е. найдется такая вещественная функция $\gamma\colon R^1\to R^1$, $\gamma(t)\to+\infty$, $t\to+\infty$, что

$$\begin{gathered}\forall n\forall u_n\in U_n\quad \exists x^n\in D_n,\quad \|x^n\|\leqslant K,\ \forall x_n\in D_n\colon\\ [A_n(u_n,\,x_n),\,x_n-x^n]\geqslant\gamma(\|x_n\|)\,\|x_n\|\,),\end{gathered}\tag{4}$$

а пара A, $\{A_n\}$ д. деминепрерывна (т. е. из д. сходимостей $u_n\rightharpoonup u$ и $x_n\to x$ вытекает д. слабая сходимость $A_n(u_n,\,x_n)\rightharpoonup A(u,\,x)$ для любых $u\in U$, $x\in D$) и обладает д. μ-свойством, по которому из посылок

$$\begin{gathered}U_n\ni u_n\rightharpoonup u\in U,\ D_n\ni x_n\rightharpoonup x\in D,\ D_n\ni x_n'\to x,\\ \overline{\lim}\,[A_n(u_n,\,x_n),\,x_n-\dot{x}_n]\leqslant 0\end{gathered}\tag{5}$$

следует д. сильная сходимость $x_n\to x$ для любого $x\in D$.

Наконец, сделаем ещё два предположения. Будем считать совокупность проекторов $\{q_n\}$ равномерно ограниченной: $\|q_n\|\leqslant T$ $\forall n$ (для этого достаточно [27], чтобы был ограничен каждый оператор q_n); этим обеспечивается [27] ограниченность сети $\{q_ny^\delta\}$ и её д. сильная сходимость к элементу $y\in X^*$ при δ, $1/n\to 0$. Ещё будем предполагать, что либо вся сеть подмножеств $\{U_n\}$ совокупно ограничена, т. е. нормы их элементов не превосходят некоторой абсолютной константы, либо д. аппроксимирующая сеть функционалов $\{f_n\}$ коэрцитивна, т. е. если $u_n\in U_n$ и $\|u_n\|\to\infty$, то $f_n(u_n)\to+\infty$.

З а м е ч а н и е 1. На практике аппроксимирующие пространства систем $\{W_n\}$, $\{X_n\}$ предпочитают выбирать конечномерными, что и отражается в названии «дискретная аппроксимация». Однако конечномерность аппроксимирующих пространств не обязательна, поскольку она нигде не используется в теории, хотя весьма полезна для приложений. Ниже мы воспользуемся этим обстоятельством.

Как и в п. 2, предположим, что сами аппроксимирующие операторы $\{A_n(u_n, x_n)\}$ нам не известны, а вместо них заданы приближённые операторы $\{A_n^h: U_n\times D_n\to X_n^*\}$ такие, что

$$\|A_n^h(u_n, x_n)-A_n(u_n, x_n)\|\leqslant hG_n(\|u_n\|, \|x_n\|)\quad \forall\, u_n\in U_n,\ x_n\in D_n, \tag{6}$$

с ограниченными функциями G_n: $R^2\to R^1$ $\forall n$. Эти функции чаще всего отличаются от функции G зависящим от n ограниченным сомножителем.

4. Первоначальные результаты. В приведённых условиях заменим теперь исходную задачу (1), (2) следующей аппроксимирующей оптимизационной задачей:

$$\tilde{J}_n(u_n)\to\inf_{U_n},\quad \tilde{J}_n(u_n)=f_n(u_n)+l_n(\hat{z}_n(u_n)), \tag{7}$$

где $\tilde{z}_n=\tilde{z}_n(u_n)\in D_n$ есть какое-либо решение д. регуляризованного в. н. с малой уступкой [21—23]

$$\begin{gathered}[A_n^h(u_n, \tilde{z}_n)+\alpha I_n\tilde{z}_n-q_ny^\delta, x_n-\tilde{z}_n]\geqslant\\ \geqslant-\omega G_n(\|u_n\|, \|\tilde{z}_n\|)\|x_n-\tilde{z}_n\|\quad \forall\, x_n\in D_n.\end{gathered} \tag{8}$$

Здесь I_n: $X_n\to X_n^*$ — нормализованный дуальный оператор [5—7], однозначный в силу строгой выпуклости пространства X_n^*, монотонный, деминепрерывный и коэрцитивный; параметр регуляризации $\alpha>0$, а величина уступки ω всегда будет подчинена требованию $\omega\geqslant h$, что гарантирует разрешимость [21—23] в. н. (8).

Однако задача (7), (8) может оказаться неразрешимой (инфимум не обязан достигаться), поскольку на функционалы f_n и l_n при фиксированном n не были наложены никакие структурные требования. Поэтому рассмотрим заведомо разрешимую задачу ε-минимизации функционала $\tilde{J}_n$ на множестве U_n, т. е. задачу отыскания такого элемента $u_n^\Delta\in U_n$, для которого

$$\tilde{J}_n(u_n^\Delta)\leqslant\inf_{U_n}\tilde{J}_n(u_n)+\varepsilon,\quad \varepsilon\to+0,\quad \Delta=(\delta, h, \omega, \varepsilon, \alpha). \tag{9}$$

Непустое множество соответствующих элементов u_n^Δ обозначим через U_n^Δ. Множество решений в. н. (8) при $u_n=u_n^\Delta$ обозначим через $Z_n^\Delta=Z_n(u_n^\Delta)$, а множество решений в. н. (2) при $u=u^0$, u_0 и т. д. будем обозначать через $Z(u^0)$, $Z(u_0)$ и т. д.

Будем предполагать выполненным по крайней мере одно из следующих требований:

$$\overline{\lim_{n,t\to\infty}}\ G_n(s, t)/\gamma(t)\leqslant r<\infty\quad \forall\, s, \tag{10}$$

$$\overline{\lim_{n,t\to\infty}}\ G_n(s, t)/t\leqslant R<\infty\quad \forall s,\quad \overline{\lim_{h,\omega,\alpha\to 0}}\ R(h+\omega)/\alpha<1. \tag{11}$$

Поскольку константы r и R считаются абсолютными и не зависят от s, то из соотношения (10), как и из первого соотношения (11), следует, что функции $\{G_n(s, t)\}$ образуют семейство, ограниченное равномерно по n. Перейдём к изучению свойств регуляризованной дискретизированной задачи (9), (8).

ЛЕММА 1. *Если сеть* $\{u_n\}$, $u_n \in U_n$, *ограничена и выполнено требование* (10) *или* (11), *то в предположениях п.* 3 *при* δ, h, ω, α, $1/n \to 0$ *сеть множеств решений* $\{\tilde{Z}_n(u_n)\}$ *в. н.* (8) *совокупно ограничена.*

Доказательство. Всякий элемент $\tilde{z}_n \in \tilde{Z}_n(u_n)$ есть решение в. н. (8), откуда, пользуясь неравенством (6) и заменяя x_n элементами x^n из определения (4) равномерной коэрцитивности, имеем

$$[A_n(u_n, \tilde{z}_n) + \alpha I_n \tilde{z}_n - q_n y^\delta, x^n - \hat{z}_n] \geqslant -(\omega + h) G^n(\|u_n\|, \|\tilde{z}_n\|) \|x^n - \tilde{z}_n\|.$$

Используя теперь равномерную коэрцитивность (4) и свойства дуального оператора [5—7], получаем, что

$$\gamma(\|\tilde{z}_n\|)\|\hat{z}_n\| + \alpha\|\hat{z}_n\|^2 \leqslant \alpha\|x^n\| \cdot \|\tilde{z}_n\| + \\ + ((\omega + h) G_n(\|u_n\|, \|\tilde{z}_n\|) + \|q_n y^\delta\|)\|x^n - \tilde{z}_n\|. \qquad (12)$$

Предположим, что $\|\tilde{z}_n\| \to \infty$ при δ, h, ω, α, $1/n \to 0$.

Если справедливо условие (10), то разделим неравенство (12) на его первый член слева и перейдём в обеих частях к пределу при δ, h, ω, α, $1/n \to 0$. Предел левой части неравенства не меньше единицы, предел же правой части ввиду ограниченности сетей $\{u_n\}$, $\{x^n\}$, $\{q_n y^\delta\}$ и равномерной ограниченности семейства функций $\{G_n\}$, а также бесконечного роста функции $\gamma(t)$ при $t \to +\infty$ равен нулю, что ведёт к невозможному неравенству $1 \leqslant 0$.

Если выполняются соотношения (11), то воспользуемся очевидным при достаточно больших значениях $\|\tilde{z}_n\|$ неравенством

$$\gamma(\|\tilde{z}_n\|)\|\tilde{z}_n\| \geqslant \alpha\|x^n\| \cdot \|\tilde{z}_n\| + \|q_n y^\delta\| \cdot \|x^n - \tilde{z}_n\|,$$

вычитая которое из (12), приходим к неравенству

$$\alpha\|\tilde{z}_n\|^2 \leqslant (\omega + h) G_n(\|u_n\|, \|\tilde{z}_n\|)\|x^n - \tilde{z}_n\|.$$

Деля его на левую часть и переходя к пределу при δ, h, ω, α, $1/n \to 0$, получаем при помощи соотношений (11) тоже невозможное неравенство

$$1 \leqslant \varlimsup_{h,\omega,\alpha \to 0} \frac{\omega + h}{\alpha} \cdot \varlimsup_{n, \|\tilde{z}_n\| \to \infty} \frac{G_n(\|u_n\|, \|\tilde{z}_n\|)}{\|\tilde{z}_n\|} \cdot \varlimsup_{\|\tilde{z}_n\| \to \infty} \frac{\|x^n - \tilde{z}_n\|}{\|\tilde{z}_n\|} < 1.$$

Следовательно, ни при условии (10), ни при требованиях (11) никакая подсеть значений $\{\|\tilde{z}_n\|\}$ не может быть бесконечно большой, что и доказывает лемму.

ЛЕММА 2. *Если* $U_n \ni u_n \rightharpoonup u^0 \in U$, *то в условиях леммы* 1 *множество д. слабых предельных точек* $\{\tilde{z}_n\}^*$ *сети* $\{\tilde{z}_n(u_n)\}$ *при любом выборе* $\tilde{z}_n \in \tilde{Z}_n(u_n)$ *непусто, совпадает с множеством д. сильных предельных точек* $\{\tilde{z}_n\}'$ *и принадлежит множеству решений* $Z(u^0)$ *в. н.* (2): $\varnothing \neq \{\tilde{z}_n\}^* = \{\tilde{z}_n\}' \subset Z(u^0)$.

Доказательство. Д. слабая сходимость сети $u_n \rightharpoonup u^0$ влечёт её ограниченность, так что по лемме 1 ограничена любая сеть $\{\tilde{z}_n\}$ при любом выборе $\tilde{z}_n \in \tilde{Z}_n(u_n)$. Ввиду рефлексивности пространства X из этого следует д. слабая компактность взятой сети $\{\tilde{z}_n\}$, т. е. непустота множества д. слабых предельных точек $\{\tilde{z}_n\}^*$. Выберем любую из них $z^0 \in \{\tilde{z}_n\}^*$ и покажем непременное включение $z^0 \in Z(u^0)$. Произвольность нашего выбора точки z^0 будет означать включение $\{\tilde{z}_n\}^* \subset Z(u^0)$. Рассмотрим д. слабо сходящуюся к z^0 подсеть сети $\{\tilde{z}_n\}$ и ради упрощения записи сохраним за подсетью прежнее обозначение: $\tilde{z}_n \rightharpoonup z^0$. Из д. Моско-аппроксимации множества D множествами $\{D_n\}$ заключаем, что $z^0 \in D$ и что поэтому найдётся д. сильно сходящаяся к z^0 сеть $D_n \ni z_n' \to z^0$. Теперь по определению решений $\tilde{z}_n$ в. н. (8) с учётом (6) имеем

$$[A_n(u_n, \tilde{z}_n) + \alpha I_n \tilde{z}_n - q_n y^\delta, z_n' - \tilde{z}_n] \geqslant -(\omega + h) G_n(\|u_n\|, \|\tilde{z}_n\|) \|z_n' - \tilde{z}_n\|. \quad (13)$$

Поскольку сети $\{u_n\}$, $\{\tilde{z}_n\}$, $\{z_n'\}$ ограничены, система функций $\{G_n\}$ равномерно ограничена и имеют место сходимости $q_n y^\delta \to y$, $z_n' - \tilde{z}_n \rightharpoonup 0$, δ, h, ω, α, $1/n \to 0$, то из (13) следует, что

$$\varlimsup_{\delta, h, \omega, \alpha, 1/n \to 0} [A_n(u_n, \tilde{z}_n), \tilde{z}_n - z_n'] \leqslant 0. \quad (14)$$

Согласно д. μ-свойству это влечёт д. сильную сходимость $\tilde{z}_n \to z^0$, так что всякая д. слабая предельная точка сети $\{\tilde{z}_n\}$ является и её д. сильной предельной точкой: $\{\tilde{z}_n\}^* = \{\tilde{z}_n\}'$.

Возьмём, далее, произвольный $x \in D$ и д. сильно сходящуюся к нему сеть: $D_n \ni x_n \to x$. Тогда с учётом (8) и (6) получим неравенство типа (13), но с заменой z_n' на выбранные x_n, которое назовём «неравенство (13) с x_n». Перейдём в указанном неравенстве к пределу при δ, h, ω, α, $1/n \to 0$. Правая его часть бесконечно мала так же, как и в (13). То же верно и для члена с параметром $\alpha \to 0$. Наконец, имеют место д. сильные сходимости $q_n y^\delta \to y$ и $x_n - \tilde{z}_n \to x - z^0$, а также вытекающая из д. деминепрерывности пары A, $\{A_n\}$ д. слабая сходимость $A_n(u_n, \tilde{z}_n) \rightharpoonup A(u^0, z^0)$. Поэтому предельный переход в неравенстве (13) с x_n ведёт к неравенству $[A(u^0, z^0) - y, x - z^0] \geqslant 0$ для произвольного в силу нашего выбора $x \in D$, а это есть не что иное, как в. н. (2) при $u = u^0$, так что элемент $z^0 \in D$ есть решение этого в. н. при $u = u^0$, т. е. $z^0 \in Z(u^0)$, и лемма доказана.

Леммы 1, 2 никак не зависят от ε и от того, стремится ли ε к нулю. Вернёмся к ε-минимизирующим элементам u_n^Δ из неравенства (9) при $\varepsilon \to 0$ и покажем их ограниченность при любом выборе $u_n^\Delta \in U_n^\Delta$.

ЛЕММА 3. *В условиях леммы* 1 *и при* Δ, $1/n \to 0$ *любая сеть* $\{u_n^\Delta\}$, $u_n^\Delta \in U_n^\Delta$, *ограничена.*

Доказательство. Если множества $\{U_n\}$ совокупно ограничены (см. п. 3), то наше утверждение очевидно. Если имеет место противоположный случай, то воспользуемся коэрцитивностью системы функционалов $\{f_n\}$ и покажем равномерную по n ограниченность сверху нижних граней $\inf \mathcal{J}_n(u_n)$, $u_n \in U_n$. Возьмём произвольное управление $u \in U$ и соответствующую ему в силу д. Моско-аппроксимации д. сильно сходящуюся сеть: $U_n \ni u_n' \to u$. Тогда по лемме 2 сеть решений в. н. (8) $\{\tilde{z}_n(u_n')\}$ имеет д. сильные предельные точки в множестве $Z(u)$. Ради сокращения записи для д. сходящейся подсети сохраним прежнее обозначение: $\tilde{z}_n(u_n') \to z(u) \in Z(u)$. Из д. сильной сходимости пар f, $\{f_n\}$ и l, $\{l_n\}$ вытекают сходимости $f_n(u_n') \to f(u)$, $l_n(\tilde{z}_n(u_n')) \to l(z(u))$ и, следовательно, сходимость $\mathcal{J}_n(u_n') \to J(u)$. Это влечёт ограниченность множества значений $\{\mathcal{J}_n(u_n')\}$, а поскольку $\mathcal{J}_n(u_n') \geqslant \inf \mathcal{J}_n(u_n)$, $u_n \in U_n$, то и ограниченность сверху множества указанных инфимумов.

Перепишем теперь определение (9) для элементов u_n^Δ:

$$f_n(u_n^\Delta) + l_n(\tilde{z}_n(u_n^\Delta)) \leqslant \inf_{U_n} \tilde{\mathcal{J}}_n(u_n) + \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon \to 0$, то по доказанному правая часть ограничена сверху, а поскольку функционалы $\{l_n\}$ равномерно по n ограничены снизу (см. п. 3), то и значения $\{f_n(u_n^\Delta)\}$ тоже ограничены сверху. Из этого вытекает ограниченность сети $\{u_n^\Delta\}$, иначе в силу коэрцитивности семейства функционалов $\{f_n\}$ не могла бы оказаться ограниченной сверху и сеть значений $\{f_n(u_n^\Delta)\}$. Лемма доказана.

5. Основные результаты. Воспользуемся теперь замечанием 1 о том, что конечномерность аппроксимирующих пространств $\{W_n\}$ и $\{X_n\}$ не требуется, так что можно для всех $n\in\mathbf{N}$ положить

$$W_n=W,\quad W_n^*=W^*,\quad X_n=X,\quad X_n^*=X^*,\quad U_n=U,\quad D_n=D,$$
$$A_n=A,\quad A_n^h=A^h,\quad f_n=f,\quad l_n=l,\quad \widetilde{J}_n=\widetilde{J},\quad G_n=G,$$

а системы проекторов P, Q, p, q считать состоящими из тождественных операторов соответствующих пространств. Тогда предположенные нами свойства д. аппроксимации исходной задачи в п. 3 очевидным образом переходят в предположения п. 2 об исходной задаче (проверку этого опускаем). Из этого следует, что результаты п. 4 сохраняют силу и для первоначальной задачи (1), (2). Используем это, полагая $\delta=h=\omega=\alpha=0$, $G(s,t)\equiv0$, но по-прежнему считая $\varepsilon>0$, $\varepsilon\to0$. При этом в качестве простого следствия лемм 1—3 докажем разрешимость исходной задачи.

ЛЕММА 4. *В предположениях п.* 2 *задача* (1), (2) *разрешима и множество её решений* U_0 *слабо замкнуто.*

Доказательство. Поскольку параметр дискретизации n можно опустить, вместо u_n^Δ будем писать u^ε, помня, что только $\varepsilon>0$. При всяком $u\in U$ ввиду наших предположений регуляризованное в. н. (8) разрешимо, а так как $G\equiv0$, то выполняется условие (10). Теперь по лемме 3 сеть ε-минимизирующих управлений $\{u^\varepsilon\}$ при $\varepsilon\to0$ ограничена, и ввиду рефлексивности пространства W она имеет слабо предельные точки: $\{u^\varepsilon\}^*\neq\varnothing$. Возьмём любую из этих точек $u^0\in\{u^\varepsilon\}^*$ и покажем её оптимальность: $u^0\in U_0$. Для сокращения записи за слабо сходящейся к u^0 подсетью сохраним прежнее обозначение: $u^\varepsilon\rightharpoonup u^0$, $\varepsilon\to0$. По лемме 2 у сети $\{z^\varepsilon\}$, $z^\varepsilon\in Z(u^\varepsilon)$ (множества $\widetilde{Z}(u)$ и $Z(u)$ совпадают, так как $\alpha\equiv0$; поэтому и функционалы $\widetilde{J}$ и J тоже совпадают), имеются сильные предельные точки, причём все они принадлежат множеству $Z(u^0)$. Возьмём любую из этих сильно предельных точек $z^0\in\{z^\varepsilon\}'$ и за сходящейся к ней подсетью сохраним такое же обозначение: $z^\varepsilon\to z^0\in Z(u^0)$, $\varepsilon\to0$. Таким образом, имеем соотношения

$$u^\varepsilon\rightharpoonup u^0,\quad z^\varepsilon\to z^0\in Z(u^0),\quad J(u^\varepsilon)\to m=\inf_U J(u).$$

Поэтому слабая полунепрерывность снизу функционала f и сильная непрерывность функционала l дают неравенство

$$m=\varliminf_{\varepsilon\to0} J(u^\varepsilon)=\varliminf_{\varepsilon\to0}(f(u^\varepsilon)+l(z^\varepsilon))\geqslant f(u^0)+l(z^0).$$

Но значение, меньшее инфимума, невозможно, так что $f(u^0)+l(z^0)=m$, и, следовательно, управление u^0 действительно оптимально: $u^0\in U_0\neq\varnothing$. Слабую замкнутость множества U_0 нетрудно теперь проверить, повторив предыдущую часть доказательства для сети $\{u_k\}$, $u_k\in U_0$. Лемма доказана.

Замечание 2. Нетрудно проверить в наших условиях также непустоту и слабую замкнутость множества нормальных точных решений исходной задачи, т. е. решений с минимальной нормой. Однако этот факт нигде нами не используется, поэтому опускаем и его проверку.

Вернёмся к общему случаю д. аппроксимации пп. 3 и 4 и докажем наш основной результат о д. регуляризации исходной задачи.

ТЕОРЕМА 1. *В условиях пп. 2 и 3 с любым из требований* (10) *или* (11) *всякая сеть* $\{u_n^\Delta\}$ *при произвольном выборе* $u_n^\Delta \in U_n^\Delta$ *имеет при* Δ, $1/n \to 0$ *д. сильные предельные точки, причём* $\varnothing \neq \{u_n^\Delta\}^* = \{u_n^\Delta\}' \subset U_0$.

Доказательство. Возьмём произвольное точное решение $u_* \in U_0$ и д. сильно сходящуюся к ней по свойству д. Моско-аппроксимации сеть $\{u_*^n\}$, $u_*^n \in U_n$, $u_*^n \to u_*$. Тогда по определению (9) элементов u_n^Δ имеем

$$f_n(u_n^\Delta) + l_n(\tilde{z}_n^\Delta) \leqslant \inf_{U_n} \tilde{J}_n(u_n) + \varepsilon \leqslant f_n(u_*^n) + l_n(\tilde{z}_*^n) + \varepsilon. \tag{15}$$

Согласно лемме 2 для некоторой подсети, которой мы и ограничимся, имеет место д. сильная сходимость $\tilde{z}_*^n \to z(u_*) = z_* \in Z(u_*)$, так что из д. сильной сходимости пар f, $\{f_n\}$ и l, $\{l_n\}$ получаем, что

$$f_n(u_*^n) + l_n(\tilde{z}_*^n) \to f(u_*) + l(z_*) = m. \tag{16}$$

По лемме 3 сеть $\{u_n^\Delta\}$ ограничена, и ввиду рефлексивности пространства W имеем $\{u_n^\Delta\}^* \neq \varnothing$. Возьмём произвольную точку $u^0 \in \{u_n^\Delta\}^*$ и покажем, что она принадлежит, во-первых, множеству $\{u_n^\Delta\}'$, а во-вторых, и множеству точных решений U_0, чем и исчерпывается содержание нашей теоремы.

К выбранному u^0 д. слабо сходится некоторая подсеть, которой мы и ограничимся: $u_n^\Delta \rightharpoonup u^0$. По лемме 2 для соответствующей подсети $\{\tilde{z}_n^\Delta\}$, $\tilde{z}_n^\Delta \in \tilde{Z}_n^\Delta$, справедливы соотношения $\varnothing \neq \{\tilde{z}_n^\Delta\}' \subset Z(u^0)$. Выбирая произвольно $z^0 \in \{\tilde{z}_n^\Delta\}'$, получаем, что для некоторой подсети, которой и ограничимся, будет $\tilde{z}_n^\Delta \to z^0 \in Z(u^0)$ и $u_n^\Delta \rightharpoonup u^0$. Отсюда, пользуясь д. слабой полунепрерывностью снизу пары f, $\{f_n\}$, д. сильной непрерывностью пары l, $\{l_n\}$, включением $u^0 \in U$, минимальностью значения m и соотношениями (15), (16), получаем, что

$$\begin{gathered} m \leqslant f(u^0) + l(z^0) \leqslant \underline{\lim}\,(f_n(u_n^\Delta) + l_n(\tilde{z}_n^\Delta)) \leqslant \\ \leqslant \overline{\lim}\,(f_n(u_n^\Delta) + l_n(\tilde{z}_n^\Delta)) \leqslant \lim\,(f_n(u_*^n) + l_n(\tilde{z}_*^n) + \varepsilon) = m. \end{gathered} \tag{17}$$

Поскольку и справа, и слева стоит одна и та же величина m, то в соотношениях (17) на самом деле всюду должны стоять знаки равенства. В частности, $m = f(u^0) + l(z^0)$, откуда $u^0 \in U_0$. Далее, из (17) следует существование предела

$$\lim\,(f_n(u_n^\Delta) + l_n(\tilde{z}_n^\Delta)) = f(u^0) + l(z^0) = m,$$

а поскольку $l_n(\tilde{z}_n^\Delta) \to l(z^0)$, то $f_n(u_n^\Delta) \to m - l(z^0) = f(u^0)$. На основании д. H-свойства пары f, $\{f_n\}$ и д. слабой сходимости $u_n^\Delta \rightharpoonup u^0$ выводим отсюда д. сильную сходимость $u_n^\Delta \to u^0$.

Теорема доказана. Она означает, что в наших условиях приближённая минимизация д. функционалов $\tilde{J}_n$ на решениях регуляризованных д. в. н. (8) даёт д. сильный регуляризатор (точнее, д. сильный [30, 22, 23] B-регуляризатор) исходной задачи (1), (2).

Замечание 3. Д. сильная регуляризация теоремы 1 означает д. сходимость регуляризованных управлений u_n^Δ к множеству точных решений задачи U_0 в том смысле, что $\inf \|u_n^\Delta - P_n u_0\|$, $u_0 \in U_0$, стремится к нулю при Δ, $1/n \to 0$. Однако часто бывает нужна не д. аппроксимация множеств P_nU_0 в пространствах W_n, а приближение к множеству U_0 в исходном пространстве W. В некоторых случаях такие приближения можно обеспечить следующим образом. Пусть операторы системы $P=\{P_n\}$ совокупно ограничены и построены линейные операторы восполнения $\{R_n\colon W_n\to W\}$ с такими тремя свойствами:

1) операторы $\{R_n\}$ совокупно ограничены,

2) выполняются равенства $P_nR_n=E_n$ $\forall n$, где E_n — тождественный оператор пространства W_n,

3) при $n\to\infty$ имеет место поточечная операторная сходимость $R_nP_n\to E$ к тождественному оператору пространства W.

Тогда по теореме 11.2 работы [26] д. сильная сходимость $u_n\to u$ эквивалентна сильной сходимости $\|R_nu_n-u\|\to 0$ в пространстве W. Поэтому если элементы $\{u_n^\Delta\}$ обеспечивают д. сильную регуляризацию исходной задачи, то восполненные элементы $\{R_nu_n^\Delta\}$ сильно регуляризуют её в первоначальном пространстве W. То же самое относится и к решениям в. н. (2) и (8): если при совокупно ограниченных операторах $\{p_n\}$ имеются линейные операторы восполнения $\{r_n\colon X_n\to X\}$, удовлетворяющие аналогичным трём требованиям, то д. сильная сходимость $\tilde{z}_n^\Delta\to z_0\in Z(u_0)$ к оптимальному решению в. н. (2) эквивалентна сильной сходимости к нему восполненных элементов $\{r_n\tilde{z}_n^\Delta\}$ в пространстве X. К сожалению, автору не известны условия, при которых д. слабая сходимость дискретизированных элементов давала бы слабую сходимость их восполнений в исходном пространстве.

Замечание 4. Как видно из приведённых доказательств, д. H-свойство пары f, $\{f_n\}$ используется только в теореме 1 при проверке д. сильной сходимости регуляризованных элементов u_n^Δ. Если достаточно одной лишь д. слабой регуляризации задачи, это свойство излишне, но тогда задача не требует регуляризации, и можно положить $\alpha=0$.

6. Псевдомонотонный случай. Свойство μ) точного оператора A, как и д. μ-свойство пары A, $\{A_n\}$, являются весьма жёсткими и трудно проверяемыми ограничениями, которые желательно либо вовсе исключить, либо хотя бы несколько смягчить. Более слабым является свойство ж) псевдомонотонности оператора A (см. п. 2) и соответственно д. псевдомонотонность пары A, $\{A_n\}$, под которой понимается равномерная ограниченность сети операторов $\{A_n\}$ и следующая импликация: при любых x, $v\in D$, $u\in U$ из соотношений $D_n\ni v_n\to v\in D$ и посылок (5) следует заключение

$$\underline{\lim}\,[A_n(u_n, x_n), x_n - v_n] \geqslant [A(u, x), x - v]. \tag{18}$$

Покажем, что в нашем случае псевдомонотонность оператора A (д. псевдомонотонность пары A, $\{A_n\}$) действительно слабее μ-свойства (д. μ-свойства). Попутно укажем ещё одно достаточное для псевдомонотонности (д. псевдомонотонности) свойство. Формулировку и доказательство приведём лишь для случая д. аппроксимации оператора, для точного же оператора A имеется полная аналогия, которую легко установить.

ЛЕММА 5. *Пара A, $\{A_n\}$ с равномерно ограниченной сетью операторов $\{A_n\}$ д. псевдомонотонна, если она д. деминепрерывна, каждый оператор A_n монотонен по $x_n\in D_n$ и либо эта пара д. усиленно непрерывна, т. е. $u_n\rightharpoonup u$, $x_n\to x\Rightarrow A_n(u_n, x_n)\to A(u, x)$, либо она обладает д. μ-свойством.*

Доказательство. Возьмём произвольные элементы $u \in U$, x, $v \in D$ и соответствующие сети $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, $\{x_n\}$, $\{x_n'\}$, указанные в определении д. псевдомонотонности и удовлетворяющие, в частности, соотношениям (5). В силу монотонности каждого оператора $A_n(u_n, x_n)$ по x_n справедливо неравенство

$$[A_n(u_n, x_n), x_n - x_n'] \geqslant [A_n(u_n, x_n'), x_n - x_n']. \tag{19}$$

Если пара A, $\{A_n\}$ д. усиленно непрерывна (случай 1), то $A_n(u_n, x_n') \to A(u, x)$. Поскольку $x_n - x_n' \rightharpoonup 0$, то в правой части неравенства (19) можно перейти к пределу:

$$[A_n(u_n, x_n'), x_n - x_n'] \to [A(u, x), 0] = 0. \tag{20}$$

Если же пара A, $\{A_n\}$ обладает д. μ-свойством (случай 2), то из соотношений (5) следует д. сильная сходимость $x_n \to x$, так что $x_n - x_n' \to 0$ и $A_n(u_n, x_n') \rightharpoonup A(u, x)$ в силу д. деминепрерывности пары A, $\{A_n\}$. Это тоже делает законным предельный переход в правой части неравенства (19) и даёт соотношение (20).

Из соотношений (5), (19), (20) заключаем, что

$$0 \geqslant \overline{\lim} [A_n(u_n, x_n), x_n - x_n'] \geqslant$$
$$\geqslant \underline{\lim} [A_n(u_n, x_n), x_n - x_n'] \geqslant \lim [A_n(u_n, x_n'), x_n - x_n'] = 0,$$

откуда следует существование предела

$$\lim [A_n(u_n, x_n), x_n - x_n'] = 0. \tag{21}$$

Положим теперь $z_n^t = (1-t)x_n' + tv_n$, $z^t = (1-t)x + tv$, $t \in (0, 1)$, и снова воспользуемся монотонностью каждого оператора A_n по x_n:

$$[A_n(u_n, x_n), x_n - x_n'] + [A_n(u_n, x_n), x_n' - z_n^t] \geqslant$$
$$\geqslant [A_n(u_n, z_n^t), x_n - x_n'] + [A_n(u_n, z_n^t), x_n' - z_n^t].$$

Первый член левой части согласно (21) стремится к нулю. То же самое справедливо и для первого члена справа, поскольку либо $x_n - x_n' \rightharpoonup 0$ и $A_n(u_n, z_n^t)$ д. сильно сходятся в случае 1, либо $x_n - x_n' \to 0$ и $A_n(u_n, z_n^t)$ сходятся д. слабо в случае 2; так что

$$t \, \underline{\lim} [A_n(u_n, x_n), x_n' - v_n] \geqslant t \, \underline{\lim} [A_n(u_n, z_n^t), x_n' - v_n] = t [A(u, z^t), x - v],$$

где последний предельный переход вытекает из д. сильных сходимостей $x_n' \to x$, $v_n \to v$ и д. деминепрерывности пары A, $\{A_n\}$. Поскольку $t \neq 0$, получаем, что

$$\underline{\lim} [A_n(u_n, x_n), x_n' - v_n] \geqslant [A(u, z^t), x - v].$$

Переходим здесь к пределу при $t \to +0$ с учётом деминепрерывности точного оператора $A(u, x)$ по x:

$$\underline{\lim} [A_n(u_n, x_n), x_n' - v_n] \geqslant [A(u, x), x - v];$$

так что

$$\underline{\lim} ([A_n(u_n, x_n), x_n' - x_n] + [A_n(u_n, x_n), x_n - v_n]) \geqslant [A(u, x), x -].$$

Первое слагаемое в круглых скобках слева согласно (21) стремится к нулю, и, таким образом, оказывается справедливым доказываемое неравенство (18). Лемма доказана.

Рассмотрим нашу задачу (1), (2) в несколько изменённых условиях. Вместо μ-свойства оператора A (соответственно д. μ-свойства пары A, $\{A_n\}$) будем предполагать его псевдомонотонность (соответственно д. псевдомонотонность указанной пары), при этом функционал l (соответственно пару l, $\{l_n\}$) будем считать не сильно непрерывным (соответственно не д. сильно непрерывной), а слабо непрерывным, т. е. $D \ni x_n \rightharpoonup x \in D \Rightarrow l(x_n) \to l(x)$ (соответственно д. слабо непрерывной, т. е. $D_n \ni x_n \rightharpoonup x \in D \Rightarrow l_n(x_n) \to l(x)$). В этих новых условиях, которые назовём *псевдомонотонным случаем*, лемма 1 сохраняет силу, а лемму 2 заменяет

ЛЕММА 2а. *Для псевдомонотонного случая в условиях леммы 2 будет* $\varnothing \neq \{\tilde{z}_n\}^* \subset Z(u^0)$.

Доказательство. Часть доказательства леммы 2 вплоть до соотношения (14) сохраняет силу. Из (14) и предшествующих соотношений в силу д. псевдомонотонности заключаем, что

$$\varlimsup_{\delta, h, \omega, \alpha, 1/n \to 0} [A_n(u_n, \tilde{z}_n), v_n - \tilde{z}_n] \leqslant [A(u^0, z^0), v - z^0] \quad \forall v \in D$$

(напоминаем, что $\tilde{z}_n \rightharpoonup z^0$, $v_n \to v$). Складывая это со следующими четырьмя очевидными ввиду ограниченности сетей $\{u_n\}$, $\{\tilde{z}_n\}$, $\{v_n\}$ и равномерной ограниченности семейства функций $\{G_n\}$ предельными при δ, h, ω, α, $1/n \to 0$ соотношениями

$$[-q_n y^\delta, v_n - \tilde{z}_n] \to [-y, v - z^0], \quad \alpha[I_n \tilde{z}_n, v_n - \tilde{z}_n] \to 0,$$

$$[A_n^h(u_n, \tilde{z}_n) - A_n(u_n, \tilde{z}_n), v_n - \tilde{z}_n] \to 0, \quad \omega G_n(\|u_n\|, \|\tilde{z}_n\|)\|v_n - \tilde{z}_n\| \to 0,$$

получаем неравенство

$$\varlimsup_{\delta, h, \omega, \alpha, 1/n \to 0} ([A_n^h(u_n, \tilde{z}_n) + \alpha I_n \tilde{z}_n - q_n y^\delta, v_n - \tilde{z}_n] +$$
$$+ \omega G_n(\|u_n\|, \|\tilde{z}_n\|)\|v_n - \tilde{z}_n\|) \leqslant [A(u^0, z^0), v - z^0] \quad \forall v \in D.$$

Указанный верхний предел по определению (8) регуляризованных элементов $\tilde{z}_n$ неотрицателен, значит, такова же и правая часть последнего неравенства, что совпадает с в. н. (2) при $u = u^0$. Поэтому $z^0 \in Z(u^0)$, и лемма доказана. Она отличается от леммы 2 лишь возможным отсутствием д. сильных предельных точек $\{\tilde{z}_n\}'$.

В условиях леммы 2а для псевдомонотонного случая сохраняет силу лемма 3: действительно, в её доказательстве использовалась сходимость $l_n(\tilde{z}_n(u_n)) \to l(z(u))$, основанная на д. сильной непрерывности пары l, $\{l_n\}$ и д. сильной сходимости $\tilde{z}_n(u_n) \to z(u)$, теперь та же сходимость функционалов будет следовать из д. слабой непрерывности названной пары и д. слабой по лемме 2а сходимости $\tilde{z}_n(u_n) \rightharpoonup z(u)$. В точности такие же изменения в доказательствах леммы 4 и теоремы 1 показывают их справедливость в условиях данного пункта. Следовательно, справедлива

ТЕОРЕМА 1а. *В псевдомонотонном случае тоже справедливо заключение основной теоремы*: $\varnothing \neq \{u_n^\Delta\}^* = \{u_n^\Delta\}' \subset U_0$.

Таким образом, псевдомонотонный случай отличается от прежнего только возможным отсутствием д. сильной сходимости регуляризованных решений $\tilde{z}_n^\Delta \to z^0$, которая заменяется д. слабой сходимостью. Д. сильная аппроксимация оптимальных управлений $u_n^\Delta \to u_0 \in U_0$ исходной задачи (1), (2) остаётся при этом в силе. Замечание 3 верно лишь в той части, которая относится к восполнениям д. управлений $\{R_n u_n^\Delta\}$, замечание 4 переносится на этот случай полностью.

7. Обобщения, комментарии. Первое из условий (11), предписывающее семейству функций $\{G_n(s, t)\}$ не более чем линейный рост по t, равномерный по n и ограниченным s, можно существенно ослабить, а именно можно допустить любой равномерный по n и ограниченным s рост по t: если для некоторой монотонной непрерывной функции φ: $R^+ \to R^+$, $\varphi(0)=0$, $\varphi(t) \to +\infty$, $t \to +\infty$, справедливо предельное соотношение

$$\varlimsup_{n,t\to\infty} G_n(s, t)/\varphi(t) \leqslant R < \infty \quad \forall s,$$

то все полученные выше результаты сохраняют силу при замене в регуляризованном в. н. (8) нормализованного дуального оператора I_n дуальным оператором I_n^φ с масштабной [5, 6] функцией φ.

Если допускать к рассмотрению также и многозначные дуальные отображения, то не нужна строгая выпуклость сопряжённых пространств X^* и $\{X_n^*\}$. Вообще же условия (10), (11) не нужны в случае равномерной ограниченности множеств D, $\{D_n\}$, поскольку этим будет обеспечена совокупная ограниченность множеств решений в. н. (8).

Заметим здесь же, что условия д. Моско-аппроксимации множества D множествами $\{D_n\}$ не препятствуют тому, чтобы при ограниченном множестве D множества сети $\{D_n\}$ были неограниченными или наоборот. Последнее имеет практическое значение, так как решать регуляризованное в. н. (8) на ограниченном множестве D_n обычно проще, чем на неограниченном.

В исходной задаче (1), (2) множество D не зависит от управления $u \in U$, что иногда оказывается недостаточным. Более общий класс образуют задачи с замкнутыми выпуклыми множествами фазовых переменных $D=D(u)$, зависящими от управления так, что при слабой сходимости $U \ni u_n \rightharpoonup u$ они Моско-устойчивы, т. е. всякая слабая предельная точка сети $\{x_n\}$, $x_n \in D(u_n)$, непременно принадлежит множеству $D(u)$, а всякая точка $x \in D(u)$ есть сильный предел некоторой сети $\{x_n\}$, $x_n \in D(u_n)$. В таком случае от д. аппроксимации $\{D_n(u_n)\}$ множеств $D(u)$, $u \in U$, достаточно потребовать аналогичной д. Моско-устойчивости относительно д. слабой сходимости управлений (т. е. чтобы при д. слабой сходимости $U_n \ni u_n \rightharpoonup u$ любая д. слабая предельная точка сети $\{x_n\}$, $x_n \in D_n(u_n)$, принадлежала множеству $D(u)$ и всякая точка $x \in D(u)$ являлась д. сильным пределом некоторой сети $\{x_n\}$, $x_n \in D_n(u_n)$), и тогда все наши результаты остаются в силе. В этом нетрудно убедиться, переделывая для новых условий наши прежние доказательства.

Указанное свойство Моско-устойчивости относительно слабой сходимости управлений будет обеспечено, например, в тех случаях, если $D(u)=D+c(u)$, где $D \subset X$ — замкнутое выпуклое подмножество, а c: $U \to X$ — усиленно непрерывный оператор, или если $D(u)=V(c(u), r(u))$, где c: $U \to X$ — усиленно непрерывный оператор, r: $U \to R^+$ — положительный слабо непрерывный функционал, а $V(x, r) \subset X$ означает шар радиуса r с центром в точке $x \in X$.

Обращаем внимание на то, что к приближённым операторам A^h и $\{A_n^h\}$ мы не предъявляем никаких структурных требований: ни монотонными, ни деминепрерывными и т. д. они быть не должны, от них требуется лишь близость к соответствующим точным операторам (см., например, неравенство (6)). Это отражает потребности практики вычислений на ЭВМ, поскольку машинная арифметика является приближённой и, как правило, не обладает даже коммутативностью и ассоциативностью сложения и умножения. Однако использование таких «бесструктурных» приближений оператора потребовало усложнения регуляризующей задачи. В результате в качестве регуляризованной задачи используется не стандартное в. н. (оно могло бы оказаться неразрешимым), а в. н. с малой уступкой разработанного автором типа [21—23]: ограничения, наложенные на точные операторы $\{A_n\}$, обеспечивают разрешимость регуляризованных в. н. (8) с приближёнными операторами, знать же сами точные операторы $\{A_n\}$ не обязательно. Здесь полезно отметить, что в силу особенностей метода д. аппроксимации на индивидуальные функционалы f_n, l_n не накладывается никаких требований, кроме ограниченности снизу: основные требования относятся к их совокупности, к парам f, $\{f_n\}$ и l, $\{l_n\}$. Часть требований к точным д. аппроксимирующим операторам тоже перенесена с индивидуальных операторов A_n на пару A, $\{A_n\}$.

Нетрудно видеть, что при $D=X$ в. н. (2) эквивалентно уравнению 1 рода $A(u, z)=y$, так что полученные результаты справедливы и в случае связей, задаваемых уравнениями. При этом можно (хотя и не обязательно) брать $D_n=X_n$ для каждого n; тогда регуляризованное в. н. (8) равносильно неравенству

$$\|A_n^h(u_n, \tilde{z}_n)+\alpha I_n\tilde{z}_n-q_ny^\delta\|\leqslant\omega G_n(\|u_n\|, \|\tilde{z}_n\|),$$

решать которое значительно легче, чем (даже в случае разрешимости) регуляризованное уравнение $A_n^h(u_n, \tilde{z}_n)+\alpha I_n\tilde{z}_n=q_ny^\delta$.

Без особого труда полученные результаты могут быть перенесены на задачи с аккретивными операторами A: $U\times X\to X$ или с полукоэрцитивными операторами, имеющими общее для всех управлений $u\in U$ ядро [31]. Допустим различная дискретизация для оптимизационной задачи (1) и для в. н. (2), например, указанная в данной работе д. аппроксимация для одной из них и проекционная или разностная аппроксимация для другой. Мы ограничились единой схемой д. аппроксимации ради сокращения объёма статьи.

Напомним ещё одно важное на практике свойство д. аппроксимации пространств: одну и ту же д. аппроксимацию дают многие наборы связывающих операторов [24—28]. Поэтому требования к таким наборам означают, что найдётся по крайней мере один из эквивалентных наборов, обладающий нужными свойствами. Использовать же реально именно этот набор совсем не обязательно, можно пользоваться любым более удобным эквивалентным набором.

Список литературы

1. *Михлин С. Г.* Численная реализация вариационных методов. М.: Наука, 1966.
2. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.
3. *Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979.
4. *Киндерлерер Д., Стампаккья Г.* Введение в вариационные неравенства и их приложения. М.: Мир, 1983.
5. *Вайберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов. М.: Наука, 1972.
6. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.

7. *Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
8. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.
9. *Литвинов В. Г.* Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике. М.: Наука, 1987.
10. *Mignot F.* Contrôle dans les inéquations variationnelles//C. R. Acad. Sci. 1975. Ser. A. V. 280, № 4. P. 197—200.
11. *Mignot F., Puel J. P.* Optimal control in some variational inequalities//SIAM J. Control Optimiz. 1984. V. 22, № 3. P. 466—476.
12. *Hlaváček I., Bock I., Lovišek J.* Optimal control of a variational inequality with applications to structural analysis. I//Appl. Math. and Optimiz. 1984. V. 11. № 2. P. 111—143.
13. *Saquez C., Bermudez A.* Optimal control of variational inequalities//Proc. 23rd IEEE Conf. Decis. and Control. Las Vegas: 1984. V. 1. P. 249—251.
14. *Friedman A.* Optimal control for variational inequalities//SIAM J. Control Optimiz. 1986. V. 24, № 3. P. 439—451.
15. *Bermudez A., Saguez C.* Optimal control of a Signorini problem//SIAM J. Control. Optimiz. 1987. V. 25, № 3. P. 576—582.
16. *Bock I., Lovišek J.* Optimal control problems for variational inequalities with controls in coefficients and in unilateral constraints//Apl. Mat. 1987. V. 32, № 4. P. 301—314.
17. *Мельник В. С.* Метод монотонных операторов в теории оптимальных систем с ограничениями//ДАН УССР. Сер. А. 1984. № 7. С. 71—73.
18. *Альбер Я. И.* О решении линейных уравнений с монотонными операторами в банаховом пространстве.//Сиб. матем. журн. 1975. Т. 16, № 1. С. 3—11.
19. *Альбер Я. И., Рязанцева И. П.* Вариационные неравенства с разрывными монотонными отображениями//ДАН СССР. 1982. Т. 262, № 6. С. 1289—1293.
20. *Бакушинский А. Б., Поляк Б. Т.* О решении вариационных неравенств//ДАН СССР. 1974. Т. 219, № 5. С. 1038—1041.
21. *Лисковец О. А.* Регуляризация задач с разрывными монотонными немонотонно возмущаемыми операторами//ДАН СССР. 1983. Т. 272, № 1. С. 30—34.
22. *Лисковец О. А.* Дискретная регуляризация задач с произвольно возмущаемыми монотонными операторами//ДАН СССР. 1986. Т. 289, № 5. С. 1056—1059.
23. *Лисковец О. А.* Регуляризация задач с монотонными операторами при дискретной аппроксимации пространств и операторов//ЖВМиМФ. 1987. Т. 27, № 1. С. 3—15.
24. *Stummel F.* Diskrete Konvergenz linearer Operatoren. I//Math. Ann. 1970. B. 190, № 1. S. 45—92.
25. *Grigorieff R. D.* Über die diskrete Approximation nichtlinearer Gleichungen erster Art//Math. Nachr. 1975. B. 69. S. 253—272.
26. *Anselone P. M., Ansorge R.* A unified framework for the discretization of nonlinear operator equations//Numer. Funct. Anal. Optimiz. 1981. V. 4, № 1. P. 61—99.
27. *Вайникко Г. М.* Регулярная сходимость операторов и приближенное решение уравнений//Итоги науки и техники. Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1978. Т. 16. С. 5—53.
28. *Панков А. А.* Дискретные аппроксимации выпуклых множеств и сходимость решений вариационных неравенств//Math. Nachr. 1979. B. 91. S. 7—22.
29. *Mosco U.* Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities//Advances Math. 1969. V. 3, № 4. P. 510—585.
30. *Лисковец О. А.* Вариационные методы решения неустойчивых задач. Минск: Наука и техника, 1981.
31. *Лапин А. В.* Решение вариационных неравенств с нелинейными полукоэрцитивными операторами//Вычислительные процессы и системы. № 4. М.: Наука, 1986. С. 219—264.

Институт математики
АН БССР, Минск

Поступила в редакцию
6.VI.1988