Р. С. Хайруллин, Задачи Трикоми для уравнения смешанного типа второго рода в случае неограниченной области, *Дифференц. уравнения*, 1994, том 30, номер 11, 2010–2017

https://www.mathnet.ru/de8499

НОЯБРЬ 1994 г., ТОМ 30, № 11

УДК 517.95

Р. С. ХАЙРУЛЛИН

ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА В СЛУЧАЕ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

1°. Рассмотрим уравнение

$$u_{xx}+yu_{yy}+\alpha u_y=0,\ \alpha\leqslant-1/2, \tag{1}$$

в области D, состоящей из верхней полуплоскости D_1 и бесконечного треугольника D_2, ограниченного характеристиками AB: $x-2\sqrt{-y}=0$ и AC: $y=0$.

Краевые задачи для уравнения (1) исследованы в работах [1—7]. В отличие от названных работ в настоящей статье рассмотрен случай неограниченной гиперболической подобласти.

Введем обозначения: m и n — такие натуральные числа, что $1<2\alpha+m\leqslant2$, $-1/2<\alpha+n\leqslant1/2$; $\delta=2\alpha+m-1$, $\alpha_0=\alpha+n$. Очевидно, что $m=2n+1$, $\delta=2\alpha_0$ при $0<\alpha_0\leqslant1/2$ и $m=2n+2$, $\delta=2\alpha_0+1$ при $-1/2<\alpha_0\leqslant0$.

Задача T. В области D найти функцию $u(x,y)$ со свойствами:

1) $u(x,y)\in C(D\cup\{y=0\}\cup AB)$;

2) $u(x,y)=o(R^{2-2\alpha})$, $u_x(x,y)=o(R^{1-2\alpha})$, $u_y(x,y)=o(R^{-2\alpha})$ при $R\to+\infty$, $R^2=x^2+4y$;

3) $u(x,y)\in C^2(D_1\cup D_2)$ и удовлетворяет уравнению (1) в $D_1\cup D_2$;

4) существуют пределы

$$\nu_i(x)=\lim_{\substack{y\to0\\(x,y)\in D_i}}|y|^{\alpha}[u(x,y)-B_{\alpha}(x,y,\tau)]_y,\ 0<x<+\infty, \tag{2}$$

$i=1,2$, и выполняется условие склеивания

$$\nu_1(x)=(-1)^n\nu_2(x),\ 0<x<+\infty; \tag{3}$$

5) удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,0)=\varphi(x),\ -\infty<x\leqslant0, \tag{4}$$

$$u(x,y)|_{AB}=\psi(x),\ 0\leqslant x<+\infty, \tag{5}$$

где

$$\tau(x)=u(x,0),\ 0\leqslant x<+\infty; \tag{6}$$

$\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — заданные функции со свойствами: $\varphi(x)\in C(-\infty,0]$ и имеет представления

$$\varphi(x)=\varphi_{\infty}(x)|x|^{\omega}\ \text{при}\ x\to-\infty, \tag{7}$$

$$\varphi(x)=\sum_{s=0}^{n}\varphi^{(s)}(o)x^s/s!+\varphi_0(x)|x|^{\varepsilon}\ \text{при}\ x\to0, \tag{8}$$

где $\omega<n+(1-3\alpha_0)/2$, $\varepsilon>1/2-\alpha$, если $-1/2<\alpha_0<0$; $\omega<n+1$, $\varepsilon>1/2+n$, если $\alpha_0=0$; и $\omega<n+(3-3\alpha_0)/2$, $\varepsilon>1-2\alpha-n$, если $0<\alpha_0\leqslant 1/2$; $\varphi^{\{s\}}(0)$ — разностные производные порядка s в точке 0; $\psi(x)\in C^n[0,+\infty)\cap C^{n+1,\lambda}(0,+\infty)$, $\lambda>1/2-\alpha_0$, $\psi^{(n+1)}(x)$ имеет представления $\psi^{(n+1)}(x)=\psi_0(x)x^{-\varkappa}$ при $x\to 0$, $\psi^{(n+1)}(x)=\psi_\infty(x)x^{\beta}$ при $x\to+\infty$, где $\varkappa<2\alpha_0$, $\beta<(1-3\alpha_0)/2$, если $0<\alpha_0\leqslant 1/2$; $\varkappa<1/2$, $\beta<0$, если $\alpha_0=0$; и $\varkappa<\alpha_0+1/2$, $\beta<-(1+3\alpha_0)/2$, если $-1/2<\alpha_0<0$; $\varphi_0(x)$, $\varphi_\infty(x)$, $\psi_0(x)$, $\psi_\infty(x)$ — ограниченные функции; выполняются условия сопряжения $\varphi^{\{s\}}(0)=\psi^{(s)}(0)\cdot 2^{-s}(2\alpha-1)_s/(\alpha-1/2)_s$, $s=\overline{0,n}$;

$$B_\alpha(x,y,\tau)=\sum_{s=0}^{n}\frac{\tau^{(2s)}(x)(-1)^s}{s!(\alpha)_s}y^s-$$

$$-\frac{\tau^{(2n+2)}(x)}{n!(n+1)!}y^{n+1}\left(\ln|y|-\sum_{s=1}^{n+1}\frac{1}{s}\right),\ \alpha=-n,$$

$$B_\alpha(x,y,\tau)=\sum_{s=0}^{[m/2]}\frac{\tau^{(2s)}(x)(-1)^s}{s!(\alpha)_s}y^s,\ \alpha\neq-n,$$

$[\cdot]$ — целая часть числа, $(\alpha)_0=1$, $(\alpha)_s=\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+s-1)$.

Обе части равенства (3) обозначим через $\nu(x)$ и на функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$ наложим следующие условия.

Условия А. $\tau(x)\in C^n[0,+\infty)\cap C^{m,\gamma}(0,+\infty)$, $\gamma>1-\delta$, $\tau^{(n+1)}(x)$ может иметь особенность при $x=0$ порядка ниже $\alpha_0+1/2$, если $-1/2<\alpha_0\leqslant 0$, и ниже $2\alpha_0$, если $0<\alpha_0\leqslant 1/2$, и должна иметь представление $\tau^{(n+1)}(x)=\tau_\infty(x)x^{-\theta}$ при $x\to+\infty$, где $\theta>(1+3\alpha_0)/2$, если $-1/2<\alpha_0<0$; $\theta>0$, если $\alpha_0=0$; и $\theta>(-1+3\alpha_0)/2$, если $0<\alpha_0\leqslant 1/2$; $\nu(x)\in C(0,+\infty)$ и может иметь особенность при $x=0$ порядка ниже $3/2-\alpha$.

2°. Задачу будем решать методом интегральных уравнений. Соотношения между τ и ν из гиперболической подобласти с учетом условия (5) имеют вид [7]

$$(-1)^n\Gamma(\alpha)\frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}}D_{0x}^{-\delta}\tau^{(n+1)}(x)-\Gamma(1-\alpha)\nu(x)=\Psi_\alpha(x,\psi^{(n+1)}),$$

$$\alpha\neq-n, \tag{9}$$

$$\frac{2}{n!}\frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}}\int_0^x\tau^{(n+1)}(\sigma)\ln(x-\sigma)d\sigma-n!\nu(x)=\Psi_\alpha(x,\psi^{(n+1)}),\ \alpha=-n, \tag{10}$$

и при всех α

$$\tau^{(s)}(0)=\psi^{(s)}(0)\cdot 2^{-s}(2\alpha-1)_s/(\alpha-1/2)_s,\ s=\overline{0,n}, \tag{11}$$

где D_{0x}^{l} — оператор дробного дифференцирования по Риману—Лиувиллю при $l\geqslant 0$ и дробного интегрирования при $l<0$ (см., например, [8]);

$$\Psi_\alpha(x,\psi^{(n+1)})=(-1)^n\sqrt{\pi}\cdot 2^{1-2\alpha-n}x^{\alpha-1/2}D_{0x}^{1/2-\alpha_0}\psi^{(n+1)}(x/2).$$

Из свойств функции $\psi(x)$ следует, что $\Psi_\alpha(x,\psi^{(n+1)})$ может иметь особенность при $x=0$ порядка ниже $3/2-\alpha$, если $-1/2<\alpha_0\leqslant 0$, и ниже $n+1$, если $0<\alpha_0\leqslant 1/2$, а при $x\to+\infty$ имеет нуль порядка выше $n+(3-\alpha_0)/2$, если $-1/2<\alpha_0<0$; выше $n+1$, если $\alpha_0=0$, и выше $n+(1-\alpha_0)/2$, если $0<\alpha_0\leqslant 1/2$.

3°. Перейдем к исследованию задачи в D_1. Здесь рассмотрим задачу Дирихле с краевым условием (4), (6). Ее явное решение записывается формулой [9]

$$u(x,y)=\frac{ky^{1-\alpha}}{1-\alpha}\int_{-\infty}^{0}\varphi(\xi)\,[(x-\xi)^2+4y]^{\alpha-3/2}d\xi+$$

$$+\frac{ky^{1-\alpha}}{1-\alpha}\int_{0}^{+\infty}\tau(\xi)\,[(x-\xi)^2+4y]^{\alpha-3/2}d\xi, \tag{12}$$

где $k=\Gamma(3/2-\alpha)\,(1-\alpha)/\sqrt{\pi}\Gamma(1-\alpha)4^{\alpha-1}$.

Приступим к выводу соотношения из эллиптической подобласти, для этого подставим функцию (12) в предел (2) и распишем его так:

$$\nu(x)=\lim_{y\to 0}y^{\alpha}\left[\frac{ky^{1-\alpha}}{1-\alpha}\int_{-\infty}^{0}\varphi(\xi)\,[(x-\xi)^2+4y]^{\alpha-3/2}d\xi\right]_y+ \tag{13}$$

$$+\lim_{y\to 0}y^{\alpha}\left[\frac{ky^{1-\alpha}}{1-\alpha}\int_{0}^{+\infty}\tau(\xi)\,[(x-\xi)^2+4y]^{\alpha-3/2}d\xi-B_{\alpha}(x,y,\tau)\right]_y=J_1+J_2.$$

Нетрудно получить

$$J_1=k\int_{-\infty}^{0}\varphi(\xi)\,(x-\xi)^{2\alpha-3}d\xi.$$

Выделим особенности функции J_1, для этого разобьем линию интегрирования на две части и во втором интеграле воспользуемся представлением (8)

$$J_1=k\int_{-\infty}^{-c}\varphi(\xi)\,(x-\xi)^{2\alpha-3}d\xi+\sum_{s=0}^{n}\frac{k\varphi^{(s)}(0)}{s!}\int_{-c}^{0}\xi^{s}(x-\xi)^{2\alpha-3}d\xi+$$

$$+k\int_{-c}^{0}\varphi_0(\xi)\,|\xi|^{\varepsilon}(x-\xi)^{2\alpha-3}d\xi=J_{11}+J_{12}+J_{13}.$$

Очевидно, что слагаемое J_{11} ограничено при $x=0$. Для преобразования других слагаемых произведем замену переменной интегрирования $\xi=$ $=-ct$, предварительно воспользовавшись теоремой о среднем в J_{13}, и на основании формул (15.3.1), (15.5.9), (6.6.8), (6.6.2), (6.6.3) из [10] получим

$$J_{12}=\sum_{s=0}^{n}\frac{k(-1)^{s}\Gamma(2-2\alpha-s)}{\Gamma(3-2\alpha)}\varphi^{(s)}(0)x^{2\alpha+s-2}-$$

$$-\sum_{s=0}^{n}\frac{k(-1)^{s}\varphi^{(s)}(0)}{s!(2-2\alpha-s)}(c+x)^{2\alpha+s-2}F(2-2\alpha-s,\,-s,\,3-2\alpha-$$

$$-s,\,x/(x+c))=J_{121}+J_{122},$$

$$J_{13}=(kc^{\varepsilon+1}/(\varepsilon+1))\varphi_0(\bar{x})x^{2\alpha-2+\varepsilon}(x+c)^{-\varepsilon-1}F(\varepsilon+1,\,\varepsilon+2\alpha-1,\,\varepsilon+$$

$$+2,\,c/(c+x)).$$

Функция J_{13} имеет при $x=0$ особенность порядка ниже $3/2-\alpha$, если $-1/2<\alpha_0\leqslant 0$, и ниже $n+1$, если $0<\alpha_0\leqslant 1/2$. Обозначим $\Phi_{\alpha}(x,\varphi)=$ $=J_{11}+J_{122}+J_{13}$. Нетрудно видеть, что при $x=0$ особенность функции $\Phi_{\alpha}(x,\varphi)$ совпадает с особенностью функции J_{13}. С другой стороны, каждое слагаемое функции J_{121} имеет при $x=0$ особенность порядка не ниже $2-2\alpha-n\geqslant 3/2-\alpha$. Таким образом, мы выделили особенности функции J_1, которая приняла вид

$$J_1=\Phi_\alpha(x,\varphi)-\sum_{s=0}^{n}\frac{k\varphi^{(s)}(0)}{(2\alpha-2)_{s+1}}x^{2\alpha+s-2}. \tag{14}$$

Исследуем поведение функции $\Phi_\alpha(x,\varphi)$ при $x\to+\infty$, для этого перепишем формулу (14) так:

$$\Phi_\alpha(x,\varphi)=J_1-J_{121}. \tag{15}$$

Функция J_{121} имеет при $x\to+\infty$ нуль порядка не ниже $2-2\alpha-n$. Рассмотрим J_1. С учетом представления (7) имеем

$$J_1=k\int_0^N\varphi(-\xi)(x+\xi)^{2\alpha-3}d\xi+k\int_N^{+\infty}\varphi_\infty(-\xi)\xi^\omega(x+\xi)^{2\alpha-3}d\xi=J'_{11}+J'_{12}. \tag{16}$$

Очевидно

$$J'_{11}=O(x^{2\alpha-3})\ \text{при}\ x\to+\infty. \tag{17}$$

Для вычисления J'_{12} вначале опять воспользуемся теоремой о среднем, затем после подстановки $\xi=N/(1-\sigma)$ используем формулы (15.3.1), (15.3.3) из [10]. В результате получим

$$J'_{12}=\frac{k\varphi_\infty(-\bar{x})}{2-2\alpha-\omega}(x+N)^{2\alpha-2+\omega}F\left(2-2\alpha-\omega,\ -\omega,3-2\alpha-\omega,\frac{x}{x+N}\right). \tag{18}$$

Из соотношений (15)—(18) и значений ω следует, что функция $\Phi_\alpha(x,\varphi)$ при $x\to+\infty$ имеет нуль порядка выше $n+(3-\alpha_0)/2$, если $-1/2<\alpha_0<0$; выше $n+1$, если $\alpha_0=0$, и выше $n+(1-\alpha_0)/2$, если $0<\alpha_0\leqslant 1/2$.

Перейдем к исследованию J_2. Интеграл, входящий в J_2, обозначим через J'_2 и займемся его преобразованием. Зафиксируем x и выберем $a>x$, тогда можно записать

$$J'_2=\sum_{s=0}^{m}\tau^{(s)}(x)/s!\int_0^a(\xi-x)^s[(x-\xi)^2+4y]^{\alpha-3/2}d\xi+$$
$$+\int_0^a\left[\tau(\xi)-\sum_{s=0}^{m}\tau^{(s)}(x)(\xi-x)^s/s!\right][(x-\xi)^2+4y]^{\alpha-3/2}d\xi+$$
$$+\int_a^{+\infty}\tau(\xi)[(x-\xi)^2+4y]^{\alpha-3/2}d\xi=J'_{21}+J'_{22}+J'_{23}. \tag{19}$$

Линию интегрирования в J'_{21} разобьем на две части: от 0 до x и от x до a, и после замены $\sigma=(x-\xi)^2$ имеем

$$J'_{21}=\sum_{s=0}^{m}\frac{\tau^{(s)}(x)}{(s+1)!}(4y)^{\alpha-1+s/2}\left[\left(\frac{x^2}{x^2+4y}\right)^{(s+1)/2}(-1)^sF\left(\frac{s}{2}+\right.\right.$$
$$\left.+\alpha,\frac{s+1}{2},\frac{s+3}{2},\frac{x^2}{x^2+4y}\right)+\left(\frac{(a-x)^2}{(a-x)^2+4y}\right)^{(s+1)/2}F\left(\frac{s}{2}+\right.$$
$$\left.\left.+\alpha,\frac{s+1}{2},\frac{s+3}{2},\frac{(a-x)^2}{(a-x)^2+4y}\right)\right].$$

Отсюда получим

$$J_{21}=\lim_{y\to 0}y^\alpha\left[\frac{ky^{1-\alpha}}{1-\alpha}J'_{21}-B_\alpha(x,y,\tau)\right]_y=$$

$$= \sum_{s=0}^{m} \frac{k\tau^{(s)}(x)}{s+2\alpha-2} \left[(-1)^s x^{2\alpha+s-2} + (a-x)^{2\alpha+s-2} \right], \ \delta<1, \tag{20}$$

$$J_{21} = \sum_{s=0}^{m-1} \frac{k\tau^{(s)}(x)}{s+2\alpha-2} \left[(-1)^s x^{2\alpha+s-2} + (a-x)^{2\alpha+s-2} \right] +$$

$$+ \frac{k\tau^{(m)}(x)}{m!} \left[(-1)^m \ln x + \ln(a-x) - (1+(-1)^m) \sum_{s=1}^{m} \frac{1}{s} \right], \ \delta=1. \tag{21}$$

Рассмотрим J_{22}. Выполняя дифференцирование и переходя к пределу, имеем

$$J_{22} = \lim_{y\to 0} y^{\alpha} \left[\frac{ky^{1-\alpha}}{1-\alpha} J'_{22} \right]_y = k \int_0^a \left[\tau(\xi) - \right.$$

$$\left. - \sum_{s=0}^{m} \tau^{(s)}(x) (\xi-x)^s/s! \right] |x-\xi|^{2\alpha-3} d\xi. \tag{22}$$

Для дальнейших преобразований введем следующие функционалы:

$$E_{p,\gamma}(f) = \int_0^x \left[f(\sigma) - \sum_{s=0}^{p-1} f^{(s)}(x) (\sigma-x)^s/s! \right] (x-\sigma)^{-\gamma-p} d\sigma,$$

$$E^*_{p,\gamma}(f) = \int_x^a \left[f(\sigma) - \sum_{s=0}^{p-1} f^{(s)}(x) (\sigma-x)^s/s! \right] (\sigma-x)^{-\gamma-p} d\sigma,$$

$0<\gamma<1$, $p=0, 1, 2, \ldots$ или $\gamma=0$, $p=1, 2, 3, \ldots$,

$$E_{0,0}(f) = \int_0^x f(\sigma) \ln(x-\sigma) d\sigma, \ E^*_{0,0}(f) = \int_x^a f(\sigma) \ln(\sigma-x) d\sigma,$$

$$f(x) \in L(0, a) \cap C(0, a) \cap C^{p-1,\lambda}(0, a), \ \lambda > \gamma.$$

Справедлива

Лемма 1. *Верны соотношения*

$$E_{p+1,\gamma}(f) = -\frac{1}{\gamma+p} \frac{d}{dx} E_{p,\gamma}(f) + \frac{1}{\gamma+p} \frac{(-1)^p}{p!} \frac{f^{(p)}(x)}{x^{\gamma}},$$

$$E^*_{p+1,\gamma}(f) = \frac{1}{\gamma+p} \frac{d}{dx} E^*_{p,\gamma}(f) + \frac{1}{\gamma+p} \frac{1}{p!} \frac{f^{(p)}(x)}{(a-x)^{\gamma}},$$

$0<\gamma<1$, $p=0, 1, 2, \ldots$ *или* $\gamma=0$, $p=1, 2, 3, \ldots$, *и*

$$E_{1,0}(f) = \frac{d}{dx} E_{0,0}(f) - f(x) \ln x, \ E^*_{1,0}(f) = -\frac{d}{dx} E^*_{0,0}(f) - f(x) \ln(a-x).$$

Лемма 2. *Верны соотношения*

$$E_{p,\gamma}(f) = \frac{(-1)^p}{(\gamma)_p} \frac{d^p}{dx^p} E_{0,\gamma}(f) + \sum_{l=0}^{p-1} \frac{f^{(l)}(x) (-1)^l x^{l-\gamma-p+1}}{l!(p+\gamma-l-1)}, \ 0<\gamma<1, \tag{23}$$

$$E_{p,0}(f) = -\frac{(-1)^p}{(p-1)!} \frac{d^p}{dx^p} E_{0,0}(f) + \sum_{l=0}^{p-2} \frac{f^{(l)}(x) (-1)^l}{l!(p-l-1)} x^{l-p+1} +$$

$$+ \frac{(-1)^p}{(p-1)!} f^{(p-1)}(x) \left[\ln x - \sum_{s=1}^{p-1} \frac{1}{s} \right], \tag{24}$$

$$E^*_{p,\gamma}(f)=\frac{1}{(\gamma)_p}\frac{d^p}{dx^p}E^*_{0,\gamma}(f)+\sum_{l=0}^{p-1}\frac{f^{(l)}(x)(a-x)^{l-\gamma-p+1}}{l!(p+\gamma-l-1)},\quad 0<\gamma<1, \tag{25}$$

$$E^*_{p,0}(f)=-\frac{1}{(p-1)!}\frac{d^p}{dx^p}E^*_{0,0}(f)+\sum_{l=0}^{p-2}\frac{f^{(l)}(x)(a-x)^{l-p+1}}{l!(p-l-1)}-$$
$$-\frac{1}{(p-1)!}f^{(p-1)}(x)\left[\ln(a-x)-\sum_{s=1}^{p-1}\frac{1}{s}\right]. \tag{26}$$

Лемма доказывается методом математической индукции с использованием леммы 1.

Теперь разобьем линию интегрирования в J_{22} на две части: от 0 до x и от x до a, и на основании формул (13), (14), (19)—(26) получим основное соотношение между τ и ν из эллиптической подобласти

$$\nu(x)=k\left[\frac{(-1)^{m+1}}{(1-\delta)_{m+1}}\frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}}\int_0^x\tau^{(n+1)}(\sigma)(x-\sigma)^{\delta-1}d\sigma+\right.$$
$$+\frac{1}{(1-\delta)_{m+1}}\frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}}\int_x^a\tau^{(n+1)}(\sigma)(\sigma-x)^{\delta-1}d\sigma+$$
$$\left.+\frac{1}{(2-\delta)_m}\frac{d^{m-n-1}}{dx^{m-n-1}}\int_a^{+\infty}\frac{\tau^{(n+1)}(\sigma)d\sigma}{(\delta-x)^{2-\delta}}\right]+\Phi_\alpha(x,\varphi),\quad \delta<1, \tag{27}$$

$$\nu(x)=k\left[\frac{(-1)^m}{m!}\frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}}\int_0^x\tau^{(n+1)}(\sigma)\ln(x-\sigma)d\sigma-\right.$$
$$-\frac{1}{m!}\frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}}\int_x^a\tau^{(n+1)}(\sigma)\ln(\sigma-x)d\sigma+$$
$$\left.+\frac{1}{m!}\frac{d^{m-n-1}}{dx^{m-n-1}}\int_a^{+\infty}\frac{\tau^{(n+1)}(\sigma)d\sigma}{\sigma-x}\right]+\Phi_\alpha(x,\varphi),\quad \delta=1, \tag{28}$$

и при всех α $\tau^{(s)}(0)=\varphi^{(s)}(0)$, $s=\overline{0,n}$.

4°. Приступим к выводу интегрального уравнения. Будем различать следующие случаи.

Пусть $\delta<1$. В этом случае соотношения между τ и ν имеют вид (9) и (27). Исключая из них $\nu(x)$, получим уравнение

$$\frac{d^{m-n-1}}{dx^{m-n-1}}\left[\left(1-\frac{1}{2\cos\pi\alpha_0}\right)D_{0x}^{1-\delta}\tau^{(n+1)}(x)-\frac{(-1)^m}{2\cos\pi\alpha_0}D_{xa}^{1-\delta}\tau^{(n+1)}(x)+\right.$$
$$\left.+\frac{(-1)^m(1-\delta)}{2\Gamma(\delta)\cos\pi\alpha_0}\int_a^{+\infty}\tau^{(n+1)}(\sigma)(\sigma-x)^{\delta-2}d\sigma\right]=2f_\alpha(x)\sin\frac{\pi\alpha_0}{2},$$

где $f_\alpha(x)=[\Psi_\alpha(x,\psi^{(n+1)})+\Gamma(1-\alpha)\Phi_\alpha(x,\varphi)]\cos(\pi\alpha_0/2)\Gamma(1-\alpha)/\pi$. Очевидно, $f_\alpha(x)$ при $x=0$ имеет особенность порядка ниже $3/2-\alpha$, если $-1/2<\alpha_0\leqslant 0$, и ниже $n+1$, если $0<\alpha_0\leqslant 1/2$, а при $x\to+\infty$ имеет нуль порядка выше $n+(3-\alpha_0)/2$, если $-1/2<\alpha_0<0$; выше $n+1$, если $\alpha_0=0$, и выше $n+(1-\alpha_0)/2$, если $0<\alpha_0\leqslant 1/2$.

Далее, уравнение перепишем так:

$$\left(1-\frac{1}{2\cos\pi\alpha_0}\right)D_{0x}^{1-\delta}\tau^{(n+1)}(x)-\frac{(-1)^m}{2\cos\pi\alpha_0}D_{xa}^{1-\delta}\tau^{(n+1)}(x)+$$

$$+\frac{(-1)^m(1-\delta)}{2\Gamma(\delta)\cos\pi\alpha_0}\int\limits_a^{+\infty}\tau^{(n+1)}(\sigma)(\sigma-x)^{\delta-2}d\sigma=$$

$$=2F_\alpha(x)\sin\frac{\pi\alpha_0}{2}+\sum_{s=0}^{m-n-1}c_sx^s, \tag{29}$$

где

$$F_\alpha(x)=\frac{(-1)^{m-n-1}}{(m-n-2)!}\int\limits_x^{+\infty}f_\alpha(\sigma)(\sigma-x)^{m-n-2}d\sigma, \tag{30}$$

c_s — произвольные постоянные. Из свойств $f_\alpha(x)$ следует, что интеграл (30) сходится, и функция $F_\alpha(x)$ имеет при $x\to+\infty$ нуль, если $\alpha_0=0$, и нуль порядка выше $(1-\alpha_0)/2$, если $\alpha_0\neq0$, а при $x=0$ может иметь особенность порядка ниже $1/2-\alpha_0$, если $-1/2<\alpha_0\leqslant0$, и ниже 1, если $0<\alpha_0\leqslant1/2$.

Применим к обеим частям уравнения (29) оператор $D_{0x}^{\delta-1}$ и с учетом формул композиции дробных производных и интегралов (4.8), (4.26) из [8] после приведения подобных членов получим

$$\mu(x)\sin\frac{\pi\alpha_0}{2}-\cos\frac{\pi\alpha_0}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\mu(\sigma)d\sigma}{\sigma-x}=$$

$$=F'_\alpha(x)+\sum_{s=0}^{m-n-1}c'_sx^s, \tag{31}$$

$$\mu(x)=\tau^{(n+1)}(x)x^{\delta-1}, \tag{32}$$

$$F'_\alpha(x)=x^{\delta-1}D_{0x}^{\delta-1}F_\alpha(x), \tag{33}$$

$$c'_s=c_ss!/2\Gamma(s+2-\delta)\sin(\pi\alpha_0/2).$$

Из соотношения (33) имеем, что у функций $F_\alpha(x)$ и $F'_\alpha(x)$ порядки особенности при $x=0$ и нуля при $x\to+\infty$ совпадают, а из условия А и формулы (32) следует, что и у функции $\mu(x)$ допускаются особенности и требуются нули тех же порядков в соответствующих точках.

Пока оставим уравнение (31) и рассмотрим оставшиеся случаи. Пусть $\alpha_0=1/2$. В этом случае $\delta=1$, $m=2n+1$ и соотношения между τ и ν имеют вид (9), (28). Из них получим уравнение

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\tau^{(n+1)}(x)\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\tau^{(n+1)}(\sigma)d\sigma}{\sigma-x}\right)=f_\alpha(x),$$

равносильное (31), причем соотношения (32), (33) в этом случае запишутся так:

$$\mu(x)=\tau^{(n+1)}(x),\ F'_\alpha(x)=F_\alpha(x). \tag{34}$$

Пусть $\alpha_0=0$. Теперь $\delta=1$, $m=2n+2$, основные соотношения имеют вид (10), (28), с учетом которых получим

$$-\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\tau^{(n+1)}(\sigma)d\sigma}{\sigma-x}=f_\alpha(x).$$

Отсюда опять следует уравнение (31) при равенствах (34).

Таким образом, уравнение (31) справедливо при всех α. Уравнения такого вида имеют решения, когда правая часть обращается в нуль при $x\to+\infty$ [11]. Отсюда следуют равенства $c'_s=0$, $s=\overline{0, m-n-1}$.

Выполним замену переменных [11]

$$\sigma=\xi/(1-\xi),\ x=\eta/(1-\eta),\ \mu(x)=\rho(\eta)(1-\eta),$$
$$F'_\alpha(x)=g(\eta)(1-\eta), \tag{35}$$

тогда уравнение (31) примет вид

$$\rho(\eta)\sin\frac{\pi\alpha_0}{2}-\cos\frac{\pi\alpha_0}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\rho(\xi)d\xi}{\xi-\eta}=g(\eta). \tag{36}$$

Из соотношений (35) следует, что функция $g(\eta)$ имеет особенности при $\eta=0$ порядка ниже $1/2-\alpha_0$, если $-1/2<\alpha_0\leqslant 0$, и ниже 1, если $0<\alpha_0\leqslant 1/2$, при $\eta=1$ порядка ниже 1, если $\alpha_0=0$, и ниже $(1+\alpha_0)/2$, если $\alpha_0\neq 0$. Такие же особенности возможны у $\rho(\eta)$. Поэтому надо использовать формулу решения, ограниченного при $\eta=0$ в случае $\alpha_0=0$ и ограниченного при $\eta=1$ в случае $\alpha_0\neq 0$. Эти формулы можно выписать в явном виде [11]. Каждая из них дает единственное решение уравнения (36) из соответствующего класса.

Далее, по найденному $\rho(\eta)$ определяем $\mu(x)$ и $\tau^{(n+1)}(x)$. По формулам (9) или (10) вычисляем $\nu(x)$. С учетом соотношений (11) восстанавливаем $\tau(x)$, а зная $\tau(x)$ и $\nu(x)$, записываем искомую функцию в областях D_1 и D_2 по формулам решений соответственно задачи Дирихле и задачи типа Коши [12, 7]. Единственность искомой функции следует из однозначности определения функций $\tau(x)$ и $\nu(x)$ и единственности решений вспомогательных задач.

В результате доказана

Теорема. *Задача T имеет единственное решение.*

Литература

1. Исамухамедов С. С. // Краевые задачи для дифференциальных уравнений. Ташкент, 1975. № 5. С. 28—37.
2. Крикунов Ю. М. // Изв. вузов. Математика. 1979. № 9. С. 21—28.
3. Крикунов Ю. М. // Изв. вузов. Математика. 1979. № 10. С. 57—63.
4. Крикунов Ю. М. // Изв. вузов. Математика. 1982. № 1. С. 26—32.
5. Салтыкова Н. М., Смирнов М. М. // Вестн. Ленингр. гос. ун-та. 1985. № 1. С. 43—49.
6. Хайруллин Р. С. О задаче Трикоми для уравнения второго рода. Казань, 1986. Деп. в ВИНИТИ 08.04.86, № 2481.
7. Хайруллин Р. С. // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 8. С. 1396—1407.
8. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа: Учеб. пособие. М., 1985.
9. Джаиани Г. В. Уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу: Учеб. пособие / Тбил. гос. ун-т. Тбилиси, 1984.
10. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М., 1979.
11. Гахов Ф. Д., Краевые задачи. 3-е изд. М., 1977.
12. Елеев В. А. // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 1. С. 46—58.

Казанский инженерно-строительный институт

Поступила в редакцию 28 декабря 1992 г.