S. I. Repin, A posteriori estimates for the accuracy of variational methods for problems with nonconvex functionals, *Algebra i Analiz*, 1999, Volume 11, Issue 4, 151–182

Алгебра и анализ
Том 11 (1999), вып. 4

АПОСТЕРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ ЗАДАЧ С НЕВЫПУКЛЫМИ ФУНКЦИОНАЛАМИ

© С. И. Репин

В работе даны оценки разности точного и приближенного решений для невыпуклых вариационных задач, в которых полунепрерывная снизу регуляризация функционала может быть получена заменой интегранда его выпуклой оболочкой. Метод их получения основан на использовании теории двойственности вариационного исчисления. В статье показано, что апостериорную оценку целесообразно строить не для исходной вариационной постановки или соответствующей релаксированной задачи, а для двойственной вариационной проблемы. Полученная мажоранта погрешности M^* определяется двумя величинами, которые характеризуют отклонение приближенного решения двойственной задачи от двух замкнутых подмножеств основного функционального пространства этой задачи. Последние состоят из функций, удовлетворяющих соответственно соотношениям двойственности и дифференциальному уравнению, которое вытекает из необходимых условий экстремума двойственной задачи. Доказано, что M^* стремится к нулю на любой последовательности функций, сходящихся к точному решению. Это позволяет обосновать конструктивный способ построения аппроксимации решения с любой заранее заданной точностью.

§1. Введение

1.1. Постановка задачи. Рассматриваются вариационные задачи для интегральных функционалов

$$I(v) = \int_\Omega (g(\nabla v) - fv)dx, \tag{1.1}$$

где интегранд $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является невыпуклой функцией и задается в виде

$$g(\xi) = \min_{i=1,2}\{g_i(\xi)\}, \quad g_i(\xi) = \frac{1}{2}A_i(\xi - a_i)\cdot(\xi - a_i) + \beta_i. \tag{1.2}$$

Ключевые слова: вариационные методы, невыпуклые функционалы, апостериорные оценки.

Данная работа выполнена при поддержке INTAS, грант № 96-0835.

В (1.2) A_1, A_2 принадлежат пространству $M_s^{n\times n}$ симметричных $n \times n$-матриц, a_1, $a_2 \in \mathbb{R}^n$, а β_1, β_2 — некоторые вещественные числа. Здесь и далее $\xi \cdot \eta$ обозначает скалярное произведение векторов ξ и η. Евклидова норма вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$ и норма матрицы A обозначаются соответственно $|\xi|$ и $\|A\|$.

Предполагается, что a_1, a_2, β_1 и β_2 заданы так, что функция g не может полностью совпадать с g_1 или g_2 и что матрицы A_i подчинены условиям

$$\nu_i|\xi|^2 \leqslant A_i\xi \cdot \xi \leqslant \mu_i|\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \ i = 1, 2, \tag{1.3}$$

с некоторыми положительными постоянными ν_i, μ_i.

Вариационные проблемы с интеграндами типа (1.2) возникают в теории фазовых переходов твердых тел, когда удельная энергия задается невыпуклой функцией, соответствующей минимуму выпуклых энергий отдельных фаз (в этом случае аргументом g является тензор малых деформаций $\varepsilon(v) = \frac{1}{2}(\nabla v + (\nabla v)^T)$), а также в некоторых задачах оптимального управления (см., например, [11, 12, 20, 21, 24]).

Перейдем к формальной постановке исходной вариационной проблемы. Будем считать, что

$$f \in L_2(\Omega) \tag{1.4}$$

и что множеством допустимых функций является аффинное многообразие

$$V_0(\Omega) + u_0 = \Big\{ v \in V(\Omega) := W_2^1(\Omega) \mid v = u_0 + w, w \in V_0(\Omega) \Big\},$$

где $V_0(\Omega) := \{v \in V(\Omega) \mid v = 0$ на $\partial\Omega\}$, а функция u_0, определяющая граничное условие, задана так, что

$$u_0 \in V(\Omega). \tag{1.5}$$

Задачу минимизации функционала I на множестве $V_0(\Omega) + u_0$ будем далее называть *задачей* $\mathcal{P}$. Так как функция g невыпукла, то функционал I не является секвенциально слабо полунепрерывным снизу на пространстве $V(\Omega)$ и, следовательно, в $V_0(\Omega) + u_0$ может не существовать функции u, реализующей точную нижнюю грань в задаче $\mathcal{P}$. Поэтому для получения математически корректной вариационной постановки, сохраняющей точную нижнюю грань задачи $\mathcal{P}$, необходимо и достаточно построить соответствующую полунепрерывную снизу регуляризацию функционала I. Это приводит к так называемой релаксированной вариационной задаче.

Задача $\mathcal{P}^{**}$. Найти функцию $u^{**} \in V_0(\Omega) + u_0$ такую, что

$$I^{**}(u^{**}) = \inf_{v \in V_0(\Omega)+u_0} I^{**}(v) := \inf \mathcal{P}^{**}, \tag{1.6}$$

где

$$I^{**}(v) := \int_\Omega (g^{**}(\nabla v) - fv)dx.$$

Для задач (1.1), (1.2) со скалярной функцией v и для некоторых векторных задач g^{**} совпадает с выпуклой оболочкой функции g. Если

$$A_1 = A_2 = A,$$

то функция g^{**} может быть записана в явном виде (см., например, [24, 26, 27])

$$g^{**}(\xi) = \begin{cases} g_1(\xi), & \text{если } g_1(\xi) - g_2(\xi) + t_*/2 < 0; \\ g_2(\xi), & \text{если } g_1(\xi) - g_2(\xi) - t_*/2 > 0; \\ g_2(\xi) - \dfrac{1}{2t_*}(g_2(\xi) - g_1(\xi) + t_*/2)^2, \\ & \text{если } |g_1(\xi) - g_2(\xi)| \leqslant t_*/2. \end{cases} \tag{1.7}$$

Постоянная t_* в этом равенстве равна

$$t_* = A(a_1 - a_2) \cdot (a_1 - a_2).$$

Функция g^{**}, заданная в (1.7), непрерывно дифференцируема, и ее производная

$$\Lambda\xi = \begin{cases} A(\xi - a_1), & \text{если } g_1(\xi) - g_2(\xi) + t_*/2 < 0; \\ A(\xi - a_2), & \text{если } g_1(\xi) - g_2(\xi) - t_*/2 > 0; \\ A(\xi - a_2) - t_*^{-1}A(a_1 - a_2)(g_2(\xi) - g_1(\xi) + t_*/2), \\ & \text{если } |g_1(\xi) - g_2(\xi)| \leqslant t_*/2. \end{cases}$$

В теории двойственности вариационного исчисления (см., например, [17]) каждой выпуклой вариационной задаче сопоставляется ее двойственная. Для задачи $\mathcal{P}^{**}$ эта *двойственная* вариационная проблема имеет следующий вид.

Задача $\mathcal{P}^*$. Найти вектор-функцию $p^* \in Y^*(\Omega)$ такую, что

$$I^*(p^*) = \sup_{q^* \in Y^*(\Omega)} I^*(q^*) := \sup \mathcal{P}^*. \tag{1.8}$$

В (1.8) $Y^*(\Omega)$ совпадает с гильбертовым пространством $L_2(\Omega; \mathbb{R}^n)$, состоящим из суммируемых с квадратом векторных функций. Норма в $Y^*(\Omega)$ определяется обычным образом и обозначается $\|\cdot\|_*$. Функционал $I^*(q^*)$ в (1.8) конечен и равен

$$\int_\Omega (\nabla u_0 \cdot q^* - g^*(q^*) - f u_0) dx$$

на тех функциях $q^* \in Y^*(\Omega)$, которые в обобщенном смысле удовлетворяют уравнению

$$\operatorname{div} q^* + f = 0.$$

В остальных случаях $I^*(q^*) = -\infty$. Функция g^* является сопряженной к g^{**}, т.е.

$$g^*(\xi^*) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \{\xi \cdot \xi^* - g^{**}(\xi)\},$$

и определяется равенством

$$g^*(\xi) = \max\{g_1^*(\xi), g_2^*(\xi)\}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{1.9}$$

где

$$g_i^*(\xi) = \frac{1}{2} B_i^* \xi \cdot \xi + \xi \cdot a_i - \beta_i, \tag{1.10}$$

а матрица B_i^* является обратной к A_i и удовлетворяет неравенствам, аналогичным (1.3):

$$\mu_i^{-1} |\xi|^2 \leqslant B_i^* \xi \cdot \xi \leqslant \nu_i^{-1} |\xi|^2, \quad i = 1, 2. \tag{1.11}$$

Используя (1.3) и (1.11), нетрудно установить, что для определенных таким образом функций g^* и g^{**} выполняются неравенства

$$\frac{1}{2\mu_+} |\xi|^2 - \gamma_1 \leqslant g^*(\xi) \leqslant \frac{2}{\nu_-} |\xi|^2 + \gamma_2, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{1.12}$$

$$\frac{\nu_-}{4} |\xi|^2 - \gamma_2 \leqslant g^{**}(\xi) \leqslant \frac{\mu_+}{2} |\xi|^2 + \gamma_1, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{1.13}$$

в которых

$$\mu_+ = \max\{\mu_1, \mu_2\}, \qquad \mu_- = \min\{\mu_1, \mu_2\},$$
$$\nu_+ = \max\{\nu_1, \nu_2\}, \qquad \nu_- = \min\{\nu_1, \nu_2\},$$
$$\gamma_1 = \max_{i=1,2}\left\{\frac{\mu_i}{2}|a_i|^2 + \beta_i\right\}, \quad \gamma_2 = \max_{i=1,2}\left\{\frac{\nu_i}{4}|a_i|^2 - \beta_i\right\}.$$

При помощи (1.12) и (1.13) устанавливается коэрцитивность функционалов $-I^*$ и I^{**} на $Y^*(\Omega)$ и V соответственно. Поэтому, используя известные теоремы вариационного исчисления (см. [17]), можно доказать следующее утверждение:

Теорема 1.1. *Задачи $\mathcal{P}^*$ и $\mathcal{P}^{**}$ имеют решения p^* и u^{**} соответственно. Решение задачи $\mathcal{P}^*$ единственно и при любых $v \in V_0(\Omega)+u_0$ и любых $q^* \in Y^*$ выполняются соотношения*

$$I^*(q^*) \leqslant \sup \mathcal{P}^* = I^*(p^*) = I^{**}(u^{**}) = \inf \mathcal{P} \leqslant I^{**}(v) \leqslant I(v), \tag{1.14}$$
$$p^*(x) = \Lambda \nabla u^{**}(x) \quad \text{для п.в. } x \in \Omega, \tag{1.15}$$

где $\Lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ обозначает производную Гато функции g^{**}.

1.2. Аппроксимация решений невыпуклых задач. Перейдем к рассмотрению проблем, с которыми приходится сталкиваться при аппроксимации решений рассматриваемого класса задач. Пусть u — решение краевой задачи в вариационной форме

$$I(u) = \inf_{v \in U} I(v), \tag{1.16}$$

где U — выпуклое замкнутое множество рефлексивного банахова пространства V, а I — слабо полунепрерывный снизу и коэрцитивный на V функционал. В теории аппроксимации изучаются способы приближения u последовательностью простых (например, кусочно-полиномиальных) функций. При этом необходимо решить две основные проблемы:

1. Построить последовательность $\{v_m\} \in U$, сходящуюся к u в V. $(\mathcal{A})$
2. Получить вычисляемую оценку для $\|v_m - u\|_V$. $(\mathcal{B})$

Решение проблемы $(\mathcal{A})$ связано с применением некоторого численного метода, а проблемы $(\mathcal{B})$ с получением *апостериорных* оценок погрешности. В общем случае такая оценка задается функционалом $\mathbb{M}$, который должен удовлетворять трем основным условиям:

$$\|v-u\|_V \leqslant \mathbb{M}(v), \quad v \in U, \tag{1.17}$$

$$\mathbb{M}(v)=0 \iff v=u, \tag{1.18}$$

$$\mathbb{M}(v_m) \to 0, \quad \text{если } v_m \to u \text{ в } V. \tag{1.19}$$

Значение функционала $\mathbb{M}$ (мажоранты погрешности) определяется приближенным решением и данными задачи и должно давать практически вычислимые и реалистические оценки погрешности.

Проблема получения апостериорных оценок для эллиптических уравнений рассматривалась многими авторами (см. [3, 8–10, 22, 23, 25, 28, 31–33] и цитированную в этих работах литературу). В настоящее время для этой цели используется несколько методов, среди которых выделяется „метод невязок" (residual method), опирающийся на вычисление слабой нормы невязки дифференциального уравнения. В [5, 29, 30] был предложен метод получения апостериорных оценок для вариационных задач с так называемыми сильно выпуклыми функционалами, который основан на использовании теории двойственности вариационного исчисления. Для этого класса задач было получено представление апостериорной оценки в виде суммы ошибок в соотношении двойственности и в уравнении для двойственной переменной и показано, что многие методы (включая метод невязок) являются частными случаями двойственных апостериорных оценок.

Проблема получения апостериорных оценок для наиболее сложных классов вариационных задач, к которым, в частности, относятся задачи с невыпуклыми интеграндами, изучена мало (среди небольшого числа публикаций на эту тему упомянем работу [13]). Такое положение связано с принципиальными трудностями, которые возникают при аппроксимации решений невыпуклых вариационных задач. Дело в том, что ни одна из возможных вариационных формулировок ($\mathcal{P}$, $\mathcal{P}^{**}$ или $\mathcal{P}^*$) не обладает свойствами, необходимыми для эффективного решения задач $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ одновременно. Действительно, задача $\mathcal{P}$ математически некорректна. Задача $\mathcal{P}^{**}$, которая обычно используется для построения аппроксимаций (см., например, [14, 16, 18]), имеет решение, а соответствующая минимизирующая последовательность может быть построена известными методами путем минимизации I^{**} на последовательности конечномерных подмножеств множества $V_0(\Omega)+u_0$. Однако функционал задачи $\mathcal{P}^{**}$ не является строго выпуклым, что не позволяет гарантировать существование единственного предела у минимизирующей последовательности и получать апостериорные оценки погрешности.

Функционал $-I^*$ является строго выпуклым, а решение p^* задачи $\mathcal{P}^*$ существует и единственно (отметим, что в [6] установлена локальная W_2^1 — регулярность этого решения). Как показано далее, функционал $-I^*$ является также и сильно выпуклым, что позволяет применить подход, развитый в [5, 29, 30], и получить апостериорную оценку для двойственной задачи. Недостатком задачи $\mathcal{P}^*$ является сложная структура множества, на котором функционал конечен. При построении аппроксимирующей последовательности здесь могут возникнуть большие трудности, связанные с необходимостью разыскивать экстремум недифференциального функционала I^* на множестве функций, *точно* удовлетворяющих уравнениям $\operatorname{div} y^* + f = 0$.

Подытожим вышесказанное. Релаксированная задача $\mathcal{P}^{**}$ удобна для построения минимизирующей последовательности $\{u_m\}$, но отсутствие сильной выпуклости препятствует получению апостериорных оценок. Задача $\mathcal{P}^*$ обладает прямо противоположными свойствами. Она весьма неудобна для построения аппроксимаций, но позволяет получить соответствующие апостериорные оценки.

Предлагаемый в статье подход естественным образом вытекает из такого положения вещей. Он основан на *одновременном* использовании сильных сторон релаксированной и двойственной задач. При этом задача $\mathcal{P}^{**}$ используется для построения аппроксимаций, а задача $\mathcal{P}^*$ — для получения апостериорной оценки погрешности.

1.3. Основные результаты. Главная идея данной работы состоит в том, что при аппроксимации минимайзеров невыпуклых функционалов две основные проблемы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ целесообразно решать не в пространстве $V(\Omega)$, а в пространстве $Y^*(\Omega)$. При этом $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ заменяются на следующие проблемы:

1. Построить последовательность $\{y_m^*\}$, сходящуюся к p^* в $Y^*(\Omega)$. $(\mathcal{A}^*)$
2. Построить вычислительную оценку для $\|y_m^* - p^*\|_*$. $(\mathcal{B}^*)$

Перейдем к формулировке основных результатов по этим двум направлениям.

1.3.1. Получение апостериорной оценки. В §2 для $y^* \in Y^*(\Omega)$ получена мажоранта нормы $\|y^* - p^*\|_*$, которая обозначается $\mathbb{M}^*$. Величина $\mathbb{M}^*(y^*)$ определяется расстояниями от элемента y^* до двух множеств $Y_f^*(\Omega)$ и $Y_\Lambda^*(\Omega)$ (см. 2.2). Первое состоит из функций $y^* \in Y^*(\Omega)$ таких, что $\operatorname{div} y^* + f = 0$, а второе из тех функций $y^* \in Y^*(\Omega)$, для которых существует функция $v \in V_0(\Omega) + u_0$ такая, что ∇v и y^*, связаны соотношением двойственности

$$y^* = \Lambda \nabla v.$$

Теорема 2.1 утверждает, что пересечение множества $Y^*_\Lambda(\Omega)$ и $Y^*_f(\Omega)$ состоит из единственного элемента — решения задачи $\mathcal{P}^*$ и что для любого $y^* \in Y^*(\Omega)$ имеется единственное представление в виде $y^* = y^*_\Lambda + y^*_f$, где $y^*_f \in Y^*_f(\Omega)$ и $y^*_\Lambda \in Y^*_\Lambda(\Omega)$.

Для любого $y^* \in Y^*(\Omega)$ можно определить две неотрицательные величины $\mathfrak{R}_f(y^*)$ и $\mathfrak{R}_\Lambda(y^*)$ (см. (2.25), (2.26)). Первая из них является расстоянием между y^* и его проекцией на множество Y^*_f, а вторая характеризует отклонение y^* от множества $Y^*_\Lambda(\Omega)$. Общая форма апостериорной оценки для рассматриваемого класса задач дается в теореме 2.2, которая показывает, что мажоранта $\mathbb{M}^*$ определяется величинами $\mathfrak{R}_f(y^*)$ и $\mathfrak{R}_\Lambda(y^*)$, а именно

$$\mathbb{M}^*(y^*) := \left[\sqrt{\mathfrak{R}^2_\Lambda(y^*) + \alpha_1 \mathfrak{R}^2_f(y^*) + \alpha_2 \mathfrak{R}_f(y^*)} + \alpha_3 \mathfrak{R}_f(y^*)\right]^2.$$

Постоянные α_1, $i = 1,2,3$, в этом выражении определяются данными задачи. При этом $\mathbb{M}^*$ удовлетворяет требованиям (1.17)–(1.19) в пространстве $Y^*(\Omega)$:

$$\Psi^*(y^* - p^*) \leqslant \mathbb{M}^*(y^*), \quad y^* \in Y^*(\Omega), \tag{1.20}$$

$$\mathbb{M}^*(y^*) = 0 \iff y^* = p^*, \tag{1.21}$$

$$\mathbb{M}^*(y^*_m) \to 0, \quad \text{если } y^*_m \to p^* \text{ в } Y^*(\Omega), \tag{1.22}$$

где Ψ^* — неотрицательный функционал (см. 2.3).

В §3 получены вычисляемые оценки сверху для величин $\mathfrak{R}_\Lambda(y^*)$ и $\mathfrak{R}_f(y^*)$. В общем случае для функции $y^* \in Y^*(\Omega)$ величина $\mathfrak{R}_f(y^*)$ оценивается нормой невязки уравнения $\operatorname{div} y^* + f$ в пространстве H^{-1}, топологически сопряженном к пространству V_0 (см. (3.7)). Вычисление такой нормы обычно сопряжено со значительными трудностями. Однако если функция $y^* \in Q^*(\Omega)$, где $Q^*(\Omega)$ содержит функции из $Y^*(\Omega)$, обладающее суммируемой с квадратом дивергенцией, то для $\mathfrak{R}_f(y^*)$ можно получить оценку сверху через L_2-норму невязки (см. (3.9)). Таким образом, некоторое сужение класса $Y^*(\Omega)$ приводит к существенному выигрышу при вычислении $\mathbb{M}^*$. Поэтому элементы y^*_m, аппроксимирующие p^* с заданной точностью, оказывается целесообразным разыскивать именно в этом функциональном классе. Метод построения соответствующей последовательности y^*_m предлагается в следующем параграфе.

1.3.2. Построение сходящихся аппроксимаций. Так как вычисление апостериорной оценки наиболее просто для элементов множества $Q^*(\Omega)$, то при аппроксимации решения p^* с заранее заданной точностью целесообразно было бы использовать функции из этого класса. Это по существу означает, что необходимо указать способ построения последовательности $\{y^*_m\} \in Q^*(\Omega)$, сходящейся к p^* в $Q^*(\Omega)$. Для этой цели предлагается использовать минимизирующую последовательность $\{u_m\}$ задачи $\mathcal{P}^{**}$, которая вследствие выпуклости и дифференцируемости функционала I^{**} может быть получена при помощи хорошо известных методов. В §4 обосновывается следующий простой способ построения $\{y^*_m\}$. Пусть $\{Q^*_m(\Omega)\}$ — последовательность конечномерных подпространств, вложенных в $Q^*(\Omega)$ и обладающих в $Q^*(\Omega)$ свойством предельной плотности. Для каждой функции u_m единственным образом определяется функция $y^*_{\lambda m}$ такая, что

$$G^*(\lambda, u_m; y^*_{\lambda m}) = \inf_{q^* \in Q^*_m(\Omega)} G^*(\lambda, u_m; q^*), \tag{1.23}$$

где λ — число из интервала $(0, 1)$, а

$$\begin{aligned} G^*(\lambda, v; y^*) \\ := \lambda \int_\Omega (g^{**}(\nabla v) + g^*(y^*) - \nabla v \cdot y^*) dx \\ + (1 - \lambda) \int_\Omega |\operatorname{div} y^* + f|^2 dx. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Отметим, что функционал G^* представляет собой взвешенную сумму двух величин, которые отвечают двум составляющим погрешности $\mathfrak{R}_\Lambda(y^*)$ и $\mathfrak{R}_f(y^*)$, а задача (1.24) связана с минимизацией функционала квадратичного роста на конечномерном подпространстве $Q^*_m(\Omega)$, не содержащем никаких дифференциальных связей. Эта задача значительно проще задачи $\mathcal{P}^*$.

Теорема 4.1 утверждает, что последовательность $\{y^*_{\lambda m}\}$ сходится к p^* и что по u_m, $y^*_{\lambda m}$ можно определить числовую последовательность M^*_m такую, что

$$\|y^*_{\lambda m} - p^*\|_* \leqslant M^*_m,$$

причем M^*_m стремится к нулю при стремлении m к бесконечности. Таким образом, эта теорема указывает конструктивный путь построения аппроксимаций решения p^*, для которых погрешность контролируется величиной M^*_m.

§2. Общая форма апостериорной оценки для задачи $\mathcal{P}^*$

2.1. Свойства функционалов I^* и I^{**}. Прежде всего мы установим, что функционал двойственной задачи $\mathcal{P}^*$ принадлежит к особому классу так называемых *сильно выпуклых* функционалов, и установим некоторые его свойства.

Определение 1. Пусть Y — банахово пространство. Выпуклый собственный функционал $J : Y \to \mathbb{R}$ называется сильно выпуклым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует неотрицательный коэрцитивный функционал $\Phi_\varepsilon : Y \to \mathbb{R}$ такой, что для любых двух элементов y_1, y_2, принадлежащих шару $B_\varepsilon := \{y \in Y \mid \|y\|_Y < \varepsilon\}$, выполняется неравенство

$$J\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) + \Phi_\varepsilon(y_1 - y_2) \leqslant \frac{1}{2}(J(y_1) + J(y_2)). \tag{2.1}$$

Замечание 2.1. Для некоторых классов выпуклых функционалов неравенства (2.1) с Φ_ε вида $\phi_\varepsilon(\|y_1 - y_2\|_Y)$, где ϕ_ε — вещественная строго монотонная функция, установлены в [4, 7].

Замечание 2.2. Если дополнительно предполагается дифференцируемость по Гато функционала J, то из (2.1) следует, что для любых y_1, $y_2 \in B_\varepsilon$ имеют место неравенства

$$J(y_2) \geqslant J(y_1) + \langle J'(y_1), y_2 - y_1\rangle + 2\Phi_\varepsilon(y_2 - y_1), \tag{2.2}$$

$$\langle J'(y_2) - J'(y_1), y_2 - y_1\rangle \geqslant 2\Phi_\varepsilon(y_2 - y_1). \tag{2.3}$$

Функционал J, удовлетворяющий (2.2) или (2.3), иногда называют *равномерно выпуклым* (см., например, [19]).

Нетрудно проверить, что для функций g_i^*, $i = 1, 2$, определенных в (1.10), выполняются неравенства

$$g_i^*\left(\frac{\xi_1 + \xi_2}{2}\right) + \psi_i^*(\xi_2 - \xi_1) \leqslant \frac{1}{2}(g_i^*(\xi_1) + g_i^*(\xi_2)), \quad \xi_1\xi_2 \in \mathbb{R}^n, \tag{2.4}$$

где

$$\psi_i^*(\xi) = \frac{1}{8}B_i^*\xi \cdot \xi, \quad i = 1, 2.$$

Поэтому каждая из этих функций является сильно выпуклой. Сильная выпуклость функции максимума конечного числа равномерно выпуклых функций вытекает из следующего утверждения.

Утверждение 2.1. *Пусть*

$$g^*(\xi) = \max_{i=1,2,\dots,N}\{g_i^*(\xi)\}$$

и для каждой функции g_i^* *имеет место неравенство* (2.4) *с функцией* ψ_i^*. *Тогда*

$$g^*\left(\frac{\xi_1+\xi_2}{2}\right) + \psi^*(\xi_2-\xi_1) \leqslant \frac{1}{2}(g^*(\xi_1)+g^*(\xi_2)), \quad \xi_1,\xi_2 \in \mathbb{R}^n, \tag{2.5}$$

где $\psi^*(\xi) = \min_{i=1,2,\dots,N}\{\psi_i^*(\xi)\}$.

Доказательство. Неравенство (2.5) следует из (2.4) и определения функции g^*:

$$\begin{aligned} g^*\left(\frac{\xi_1+\xi_2}{2}\right) &= \max_{i=1,2,\dots,N}\left\{g_i^*\left(\frac{\xi_1+\xi_2}{2}\right)\right\} \\ &\leqslant \max_{i=1,2,\dots,N}\left\{\frac{1}{2}g_i^*(\xi_1)+\frac{1}{2}g_i^*(\xi_2)-\psi_i^*(\xi_1-\xi_2)\right\} \\ &\leqslant \frac{1}{2}\big(\max_{i=1,2,\dots,N}\{g_i^*(\xi_1)\}+\max_{i=1,2,\dots,N}\{g_i^*(\xi_2)\}\big) \\ &\quad + \max_{i=1,2,\dots,N}\{-\psi_i^*(\xi_1-\xi_2)\} \\ &= \frac{1}{2}(g^*(\xi_1)+g^*(\xi_2)) - \min_{i=1,2,\dots,N}\{\psi_i^*(\xi_1-\xi_2)\}. \quad \bullet \end{aligned}$$

Утверждение 2.1 показывает, что функционал $-I^*$ строго выпуклый в любом шаре.

Докажем некоторые утверждения, которые окажутся необходимыми в дальнейшем.

На множестве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ определим *составной* функционал

$$D(\xi,\xi^*) := g^{**}(\xi) + g^*(\xi^*) - \xi\cdot\xi^*. \tag{$*$}$$

Так как

$$g^{**}(\xi) = \sup_{\xi^*\in\mathbb{R}}\{\xi\cdot\xi^* - g^*(\xi^*)\} \geqslant \xi\cdot\xi^* - g^*(\xi^*), \quad \xi\in\mathbb{R}^n,$$

то функционал D неотрицателен: $D(\xi,\xi^*) \geqslant 0$ для любых ξ, $\xi^* \in \mathbb{R}^n$. Отметим, что, как следует из известных результатов выпуклого анализа, $D(\xi,\xi^*)=0$ тогда и только тогда, когда ξ принадлежит субдифференциалу $\partial g^*(\xi^*)$ (или $\xi^* \in \partial g^{**}(\xi)$).

Утверждение 2.2. *Для любых η, τ, η^*, $\tau^* \in \mathbb{R}^n$ и любых положительных λ_1, λ_2 таких, что $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, справедливо неравенство*

$$(\eta - \tau)\cdot(\eta^* - \tau^*) \leqslant \frac{1}{\lambda_1} D(\tau, \eta^*) + \frac{1}{\lambda_2} D(\eta, \eta^*) + (\kappa_1 - \kappa_2)\cdot(\eta^* - \tau^*), \tag{2.6}$$

где $\kappa_1 \in \partial g^*(\lambda_1 \tau^* + \lambda_2 \eta^* + (\eta^* - \tau^*))$, а $\kappa_2 \in \partial g^*(\lambda_1 \tau^* + \lambda_2 \eta^*)$.

Доказательство. Согласно определению функционала D, для любых ξ_1, ξ_2, ξ_1^*, $\xi_2^* \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 D(\xi_1, \lambda_1\xi_1^* + \lambda_2\xi_2^*) + \lambda_2 D(\xi_2, \lambda_1\xi_1^* + \lambda_2\xi_2^*)\\
&\quad = \lambda_1 g^{**}(\xi_1) + \lambda_2 g^{**}(\xi_2)\\
&\qquad + g^*(\lambda_1\xi_1^* + \lambda_2\xi_2^*) - (\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2)\cdot(\lambda_1\xi_1^* + \lambda_2\xi_2^*)\\
&\quad \geqslant \lambda_1(\xi_1\cdot\xi_1^* - g^*(\xi_1^*)) + \lambda_2(\xi_2\cdot\xi_2^* - g^*(\xi_2^*))\\
&\qquad + g^*(\lambda_1\xi_1^* + \lambda_2\xi_2^*) - (\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2)\cdot(\lambda_1\xi_1^* + \lambda_2\xi_2^*)\\
&\quad = \lambda_1\lambda_2(\xi_1 - \xi_2)\cdot(\xi_1^* - \xi_2^*) + \lambda_1(g^*(\lambda_1\xi_1^* + \lambda_2\xi_2^*) - g^*(\xi_1^*))\\
&\qquad + \lambda_2(g^*(\lambda_1\xi_1^* + \lambda_2\xi_2^*) - g^*(\xi_2^*)).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Положим здесь $\xi_1 = \eta$, $\xi_2 = \tau$, $\xi_1^* = \eta^* + \lambda_2(\eta^* - \tau^*)$, $\xi_2^* = \lambda_1\tau^* + \lambda_2\eta^*$. Тогда

$$\lambda_1\xi_1^* + \lambda_2\xi_2^* = \eta^*, \quad \xi_1^* - \xi_2^* = \eta^* - \tau^*,$$

и, переходя к новым переменным, получаем

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 D(\eta, \eta^*) + \lambda_2 D(\tau, \eta^*)\\
&\quad \geqslant \lambda_1\lambda_2(\eta - \tau)\cdot(\eta^* - \tau^*)\\
&\qquad + \lambda_1(g^*(\eta^*) - g^*(\eta^* + \lambda_2(\eta^* - \tau^*))) + \lambda_2(g^*(\eta^*) - g^*(\lambda_1\tau^* + \lambda_2\eta^*))\\
&\quad \geqslant \lambda_1\lambda_2(\eta - \tau)\cdot(\eta^* - \tau^*) - \lambda_1\lambda_2(\kappa_1 - \kappa_2)\cdot(\eta^* - \tau^*).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Поделив обе части (2.8) на λ_1, λ_2, получаем (2.6). •

Следствие 2.1. *Если* g^* *соответствует* (1.9), *то для любых* η, τ, η^*, $\tau^* \in \mathbb{R}^n$ *верно неравенство*

$$\begin{aligned}(\eta - \tau) \cdot (\eta^* - \tau^*)&\\ &\leqslant \frac{1}{\lambda_2} D(\eta, \eta^*) + \frac{1}{\lambda_1} D(\tau, \eta^*)\\ &+ (\| B^*_\oplus \| + \| B^*_\ominus \|)|\eta^* - \tau^*|^2 + 2\| B^*_\ominus \| \, |\eta^*| \, |\eta^* - \tau^*|\\ &+ 2\lambda_1 \| B^*_\ominus \| \, |\eta^* - \tau^*|^2 + |a_1 - a_2| \, |\eta^* - \tau^*|, \end{aligned} \tag{2.9}$$

где

$$B^*_\oplus = \frac{1}{2}(B^*_1 + B^*_2), \quad B^*_\ominus = \frac{1}{2}(B^*_1 - B^*_2).$$

Доказательство. Для $i, j = 1, 2$ и любых ξ^*_1, $\xi^*_2 \in \mathbb{R}^n$ верна оценка

$$\begin{aligned}|g^{*'}_i(\xi^*_1) - g^{*'}_j(\xi^*_2)|&\\ &\leqslant (\| B^*_\oplus \| + \| B^*_\ominus \|)|\xi^*_1 - \xi^*_2| + 2\| B^*_\ominus \| \, |\xi^*_2| + |a_1 - a_1|. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}(\kappa_1 - \kappa_2) \cdot (\eta^* - \tau^*)&\\ &\leqslant (\| B^*_\oplus \| + \| B^*_\ominus \|)|\eta^* - \tau^*|^2\\ &+ 2\| B^*_\ominus \| \, |\lambda_1 \tau^* + \lambda_2 \eta^*| \, |\eta^* - \tau^*| + |a_1 - a_2| \, |\eta^* - \tau^*|, \end{aligned}$$

где κ_1 и κ_2 определены также, как в неравенстве (2.6). Так как $|\lambda_1 \tau^* + \lambda_2 \eta^*| \leqslant |\eta^*| + \lambda_1 |\eta^* - \tau^*|$, то

$$\begin{aligned}(\kappa_1 - \kappa_2) \cdot (\eta^* - \tau^*)&\\ &\leqslant (\| B^*_\oplus \| + \| B^*_\ominus \|)|\eta^* - \tau^*|^2 + 2\| B^*_\ominus \| \, |\eta^*| \, |\eta^* - \tau^*|\\ &+ 2\lambda_1 \| B^*_\ominus \| \, |\eta^* - \tau^*|^2 + |a_1 - a_2| \, |\eta^* - \tau^*|. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Теперь (2.9) следует из (2.6) и (2.11). •

Утверждение 2.3. *При любых* ξ^*, ξ_1^*, $\xi_2^* \in \mathbb{R}^n$ *и* $\delta \in \mathbb{R}$ *выполняется неравенство*

$$\psi^*(\xi_1^* - \xi^*) \leqslant (1+\delta^2)\psi^*(\xi_1^* - \xi_2^*) + (1+\delta^{-2})\theta^2|\xi_2^* - \xi^*|^2, \tag{2.12}$$

где $\theta = (2\sqrt{2\nu_-})^{-1}$.

Доказательство. Так как для ξ, $\eta \in \mathbb{R}^n$ и $\delta \in \mathbb{R}$

$$B_i^*(\delta\xi - \eta/\delta)\cdot(\delta\xi - \eta/\delta) = \delta^2 B_i^*\xi\cdot\xi + \frac{1}{\delta^2}B_i^*\eta\cdot\eta - 2B_i^*\xi\cdot\eta \geqslant 0, \quad i = 1,2,$$

то

$$\begin{aligned} &B_i^*(\xi_1^* - \xi^*)\cdot(\xi_1^* - \xi^*) \\ &\quad\leqslant (1+\delta^2)B_i^*(\xi_1^* - \xi_2^*)\cdot(\xi_1^* - \xi_2^*) + (1+\delta^{-2})B_i^*(\xi_2^* - \xi^*)\cdot(\xi_2^* - \xi^*) \\ &\quad\leqslant (1+\delta^2)B_i^*(\xi_1^* - \xi_2^*)\cdot(\xi_1^* - \xi_2^*) + \frac{1+\delta^{-2}}{\nu_-}|\xi_2^* - \xi^*|^2. \end{aligned}$$

Теперь для $\psi^*(\xi_1^* - \xi^*)$ получаем оценку

$$\begin{aligned} \psi^*(\xi_1^* - \xi^*) &= \min_{i=1,2}\left\{\frac{1}{8}B_i^*(\xi_1^* - \xi^*)\cdot(\xi_1^* - \xi^*)\right\} \\ &\leqslant (1+\delta^2)\psi^*(\xi_1^* - \xi_2^*) + \frac{1+\delta^{-2}}{8\nu_-}|\xi_2^* - \xi^*|^2, \end{aligned} \tag{2.13}$$

которая приводит к (2.12). •

2.2. Представление функций пространства $Y^*(\Omega)$. В пространстве $Y^*(\Omega)$ определим множество

$$Y_\Lambda^*(\Omega) := \left\{y^* \in Y^*(\Omega) \mid \exists v \in V_0(\Omega) + u_0\colon \int\limits_\Omega D(\nabla v, y^*)dx = 0\right\},$$

где D — составной функционал (см. (2.6)) и множество

$$Y_f^*(\Omega) := \left\{y^* \in Y^*(\Omega) \mid \forall v \in V_0(\Omega)\colon \int\limits_\Omega (y^*\cdot\nabla v - fv)dx = 0\right\}.$$

Свойства этих множеств устанавливает следующая

Теорема 2.1. *Множества $Y^*_f(\Omega)$ и $Y^*_\Lambda(\Omega)$ представляют собой непустые замкнутые множества в $Y^*(\Omega)$, пересечение которых состоит из единственного элемента — решения задачи $\mathcal{P}^*$. Для любого $y^* \in Y^*(\Omega)$ единственным образом определяются элементы $y^*_f \in Y^*_f(\Omega)$ и $y^*_\Lambda \in Y^*_\Lambda(\Omega)$ такие, что*

$$y^* = y^*_\Lambda + y^*_f. \tag{2.14}$$

Доказательство. Покажем замкнутость $Y^*_\Lambda(\Omega)$. Пусть $\{y^*_m\}$ — последовательность в $Y^*_\Lambda(\Omega)$ такая, что $y^*_m \to y^*$ в $Y^*(\Omega)$. Тогда найдется последовательность $\{v_m\} \in V_0(\Omega) + u_0$, для которой

$$\int_\Omega (g^{**}(\nabla v_m) + g^*(y^*_m) - \nabla v_m \cdot y^*_m)dx = 0. \tag{2.15}$$

Используя (1.12), (1.13) и это равенство, получаем, что последовательность $\{v_m\}$ ограничена в $V(\Omega)$. Следовательно, переходя, если требуется, к подпоследовательности, получаем, что v_m слабо сходится в V к функции $v \in V_0(\Omega) + u_0$. Переходя к пределу в (2.15), с учетом полунепрерывности снизу функционала $\int_\Omega g^{**}(\nabla v_m)dx$ получаем

$$\int_\Omega D(\nabla v, y^*)dx = \int_\Omega (g^{**}(\nabla v) + g^*(y^*) - \nabla v \cdot y^*)dx \leqslant 0. \tag{2.16}$$

Вследствие неотрицательности D неравенство (2.16) означает, что $y^* \in Y^*_\Lambda(\Omega)$.

Замкнутость $Y^*_f(\Omega)$ следует непосредственно из определения этого множества.

Покажем, что $Y^*_\Lambda(\Omega) \cap Y^*_f(\Omega) = \{p^*\}$. Пусть y^* одновременно принадлежит $Y^*_\Lambda(\Omega)$ и $Y^*_f(\Omega)$. Используем следующее тождество

$$\int_\Omega D(\nabla w, y^*) = I^{**}(w) - I^*(y^*) + \int_\Omega (p^* - y^*) \cdot \nabla(w - u_0)dx, \quad w \in V_0(\Omega) + u_0.$$

Так как $y^* \in Y^*_f(\Omega)$, то интеграл в правой части равен нулю и, следовательно,

$$\inf_{w \in V_0(\Omega)+u_0} \int_\Omega D(w, y^*)dx = \inf_{w \in V_0(\Omega)+u_0} I^{**}(w) - I^*(y^*) = \inf \mathcal{P}^{**} - I^*(y^*).$$

С другой стороны, поскольку $y^* \in Y^*_\Lambda(\Omega)$, то величина инфимума в левой части равна нулю. Тогда $I^*(y^*) = \inf \mathcal{P}^{**} = \sup \mathcal{P}^*$, т.е. y^* является решением двойственной задачи.

Покажем, что для любого $y^* \in Y^*(\Omega)$ существует единственное представление в виде $y^*_f + y^*_\Lambda$, где $y^*_f \in Y^*_f(\Omega)$, а $y^*_\Lambda \in Y^*_\Lambda(\Omega)$. Существование y^*_f и y^*_Λ вытекает из существования минимайзера $\overline{v}$ вариационной задачи

$$\inf_{v \in V_0(\Omega)+u_0} \int\limits_\Omega (g^{**}(\nabla v) - y^* \cdot \nabla v + fv)dx,$$

который удовлетворяет соответствующему уравнению Эйлера

$$\int\limits_\Omega (y^* - \Lambda\nabla\overline{v}) \cdot \nabla w dx = \int\limits_\Omega fw\, dx, \quad w \in V_0(\Omega).$$

Последнее означает, что $y^* - \Lambda\nabla\overline{v} \in Y^*_f(\Omega)$. Так как $\Lambda\nabla\overline{v} \in Y^*_\Lambda(\Omega)$, то тем самым существование элементов y^*_f и y^*_Λ доказано. Установим единственность такого разложения y^*. Предположим, что в $Y^*_f(\Omega)$ существуют два различных элемента y^*_{1f} и y^*_{2f} такие, что

$$y^* - y^*_{1f} \in Y^*_\Lambda(\Omega),$$
$$y^* - y^*_{2f} \in Y^*_\Lambda(\Omega).$$

Тогда в $V_0(\Omega) + u_0$ найдутся две функции v_1 и v_2, для которых

$$\int\limits_\Omega (g^{**}(\nabla v_1) + g^*(y^* - y^*_{1f}))dx = \int\limits_\Omega \nabla v_1 \cdot (y^* - y^*_{1f})dx, \tag{2.17}$$

$$\int\limits_\Omega (g^{**}(\nabla v_2) + g^*(y^* - y^*_{2f}))dx = \int\limits_\Omega \nabla v_2 \cdot (y^* - y^*_{2f})dx. \tag{2.18}$$

Заметим, что

$$\int\limits_\Omega \nabla v_i \cdot (y^* - y^*_{if})dx = \int\limits_\Omega (\nabla v_i \cdot y^* - \nabla u_0 \cdot y^*_{if} - y^*_{if} \cdot \nabla(v_i - u_0))dx$$
$$= \int\limits_\Omega (\nabla v_i \cdot y^* - \nabla u_0 \cdot y^*_{if} - f(v_i - u_0))dx, \quad i = 1, 2. \tag{2.19}$$

Пусть λ_1 и λ_2 — два положительных числа таких, что $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Умножая (2.17) на λ_1, (2.18) на λ_2 и учитывая (2.19), получаем

$$\int_\Omega (\lambda_1 g^{**}(\nabla v_1) + \lambda_2 g^{**}(\nabla v_2) + \lambda_1 g^*(y^* - y^*_{1f}) + \lambda_2 g^*(y^* - y^*_{2f}))dx$$
$$+ \int_\Omega (\nabla u_0 \cdot (\lambda_1 y^*_{1f} + \lambda_2 y^*_{2f}))dx + \int_\Omega f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 - u_0)dx$$
$$= \int_\Omega (\lambda_1 \nabla v_1 + \lambda_2 \nabla v_2) \cdot y^* dx. \tag{2.20}$$

Заметим, что $\widehat{v} := \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in V_0(\Omega) + u_0$, а $\widehat{y}^* := \lambda_1 y^*_{1f} + \lambda_2 y^*_{2f} \in Y^*_f(\Omega)$, так что

$$\int_\Omega f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 - u_0)dx$$
$$= \int_\Omega (\lambda_1 y^*_{1f} + \lambda_2 y^*_{2f}) \cdot (\lambda_1 \nabla v_1 + \lambda_2 \nabla v_2 - \nabla u_0)dx. \tag{2.21}$$

Функция g^{**} выпукла, а g^* строго выпукла. Поэтому

$$\lambda_1 g^*(y^* - y^*_{1f}) + \lambda_2 g^*(y^* - y^*_{2f})$$
$$> g^*(y^* - \lambda_1 y^*_{1f} - \lambda_2 y^*_{2f}) = g^*(y^* - \widehat{y}^*), \tag{2.22}$$
$$\lambda_1 g^{**}(\nabla v_1) + \lambda_2 g^{**}(\nabla v_2)$$
$$\geqslant g^{**}(\lambda_1 \nabla v_1 + \lambda_2 \nabla v_2) = g^{**}(\nabla \widehat{v}). \tag{2.23}$$

Теперь из (2.20) — (2.23) следует строгое неравенство

$$\int_\Omega (g^{**}(\nabla \widehat{v}) + g^*(y^* - \widehat{y}^*) - (y^* - \widehat{y}^*) \cdot \nabla \widehat{v})dx < 0. \tag{2.24}$$

Однако подинтегральное выражение (2.24) неотрицательно, и мы приходим к противоречию, которое показывает, что исходное предположение о неединственности y^*_f неверно. Теорема доказана. •

Замечание 2.3. При доказательстве теоремы 2.2 конкретный вид функций g^* и g^{**} нигде не использовался. Поэтому она носит общий характер и применима не только к рассматриваемому классу вариационных задач. В частности, если g и g^* заданы квадратичными положительно определенными формами (при этом g^{**} и g совпадают), то множества $Y^*_f(\Omega)$ и $Y^*_\Lambda(\Omega)$ представляют собой линейные многообразия. Так, например, если $g(\nabla v) = \frac{1}{2}|\nabla v|^2$, $u_0 = 0$ и $f = 0$, то $Y^*_f(\Omega)$ и $Y^*_\Lambda(\Omega)$ соответствуют множеству всех соленоидальных вектор-функций и множеству градиентов всех однозначных функций в Ω, обращающихся в нуль на границе. Как хорошо известно, эти два множества являются взаимно ортогональными подпространствами в $L_2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ (см. [1]).

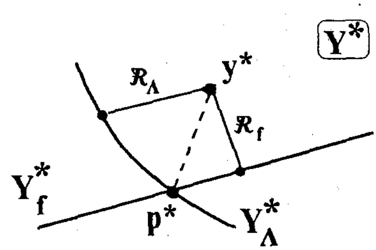
Определим две величины $\mathfrak{R}_f(y^*)$ и $\mathfrak{R}_\Lambda(y^*)$ следующими равенствами:

$$\mathfrak{R}^2_\Lambda(y^*) := \inf_{v \in V_0(\Omega)+u_0} \int_\Omega D(\nabla v, y^*)dx, \tag{2.25}$$

$$\mathfrak{R}^2_f(y^*) := \inf_{q^* \in Y^*_f(\Omega)} \int_\Omega |y^* - q^*|^2 dx. \tag{2.26}$$

Величина $D(\xi, \xi^*)$ неотрицательна, причем $D(\xi, \xi^*) = 0$ тогда и только тогда, когда $\xi^* = \Lambda\xi$. Поэтому $\mathfrak{R}_\Lambda(y^*)$ равно нулю только на функциях множества $Y^*_\Lambda(\Omega)$. Действительно, если $y^*(x) = \Lambda\nabla v(x)$ для п.в. $x \in \Omega$, то $\int_\Omega D(\nabla v, y^*) = 0$. Пусть, наоборот, для некоторого $y^* \in Y^*(\Omega)$ выполнено $\mathfrak{R}_\Lambda(y^*) = 0$. Так как функционал $w \mapsto \int_\Omega D(\nabla w, y^*)$ выпукл, непрерывен и коэрцитивен на $V_0(\Omega) + u_0$, то найдется элемент $v \in V_0(\Omega) + u_0$, реализующий значение инфимума, и, следовательно, $y^* \in Y^*_\Lambda(\Omega)$. Ясно также, что $\mathfrak{R}_f(y^*) = 0$ только для $y^* \in Y^*_f(\Omega)$.

Таким образом, $\mathfrak{R}_\Lambda(y^*)$ и $\mathfrak{R}_f(y^*)$ можно рассматривать как *меры расстояний* от функции $y^* \in Y^*(\Omega)$ до множеств $Y^*_f(\Omega)$ и $Y^*_\Lambda(\Omega)$ соответственно (см. рисунок).



Множества $Y^*_f(\Omega)$ и $Y^*_\Lambda(\Omega)$.

2.3. Апостериорная оценка. Функционал

$$\Psi^*(y^* - p^*) = \int_\Omega \psi^*(y^* - p^*)dx,$$

где $\psi^*(\xi) = \min\limits_{i=1,2}\{\frac{1}{8}B_i^*\xi \cdot \xi\}$, неотрицателен и обращается в нуль при $y^* = p^*$. Величина этого функционала характеризует отклонение y^* от точного решения двойственной задачи. Покажем, что его мажоранта определяется величинами $\mathfrak{R}_\Lambda(y^*)$ и $\mathfrak{R}_f(y^*)$.

Теорема 2.2. *Пусть условия* (1.3), (1.4) *и* (1.5) *выполнены. Тогда для любого* $y^* \in Y^*(\Omega)$ *справедливо неравенство*

$$\Psi^*(y^* - p^*)$$
$$\leqslant \mathbb{M}^*(y^*) := \left[\sqrt{\mathfrak{R}_\Lambda^2(y^*) + \alpha_1\mathfrak{R}_f^2(y^*) + \alpha_2\mathfrak{R}_f(y^*)} + \alpha_3\mathfrak{R}_f(y^*)\right]^2, \quad (2.27)$$

где

$$\alpha_1 = |B_\oplus^*| + |B_\ominus^*|,$$
$$\alpha_2 = 2|B_\ominus^*| \cdot \|y^*\|_* + |a_1 - a_2|,$$
$$\alpha_3 = \theta.$$

Мажоранта $\mathbb{M}^*$ *обладает следующими свойствами:*

$$\mathbb{M}^*(y^*) = 0 \iff y^* = p^*, \quad (2.28)$$
$$\mathbb{M}^*(y_m^*) \to 0, \quad \textit{если } \|y_m^* - p^*\|_* \to 0. \quad (2.29)$$

Доказательство. Пусть $q^* \in Y_f^*(\Omega)$, тогда вследствие (2.5) получаем

$$\int\limits_\Omega \psi^*(q^* - p^*)dx$$
$$\leqslant \int\limits_\Omega \left(\frac{1}{2}g^*(q^*) + \frac{1}{2}g^*(p^*) - g^*\left(\frac{p^* + q^*}{2}\right)\right)dx$$
$$= \int\limits_\Omega \left(\frac{1}{2}(g^*(q^*) - \nabla u_0 \cdot q^*) + \frac{1}{2}(g^*(p^*) - \nabla u_0 \cdot p^*)\right)dx$$
$$+ \int\limits_\Omega \left(\frac{1}{2}\nabla u_0 \cdot (p^* + q^*) - g^*\left(\frac{p^* + q^*}{2}\right)\right)dx$$
$$= I^*\left(\frac{p^* + q^*}{2}\right) - \frac{1}{2}I^*(p^*) - \frac{1}{2}I^*(q^*).$$

Поскольку

$$I^*\left(\frac{p^*+q^*}{2}\right) \leqslant I^*(p^*),$$

это неравенство приводит к оценке

$$\int\limits_\Omega \psi^*(q^*-p^*)dx \leqslant \frac{1}{2}[I^*(p^*)-I^*(q^*)]. \tag{2.30}$$

Для оценки левой части (2.30) используем неравенство (2.12). Из (2.30) следует, что

$$\int\limits_\Omega \psi^*(y^*-p^*)dx \leqslant \frac{1+\delta^2}{2}[I^*(p^*)-I^*(q^*)]+(1+\delta^{-2})\theta^2\|y^*-q^*\|_*^2, \tag{2.31}$$

где $y^* \in Y^*(\Omega)$. Поскольку

$$I^{**}(v) \geqslant I^*(p^*), \quad v \in V_0(\Omega)+u_0,$$

то (2.31) можно переписать в виде

$$\int\limits_\Omega \psi^*(y^*-p^*)dx \leqslant \frac{1+\delta^2}{2}[I^{**}(v)-I^*(q^*)]+(1+\delta^{-2})\theta^2\|y^*-q^*\|_*^2. \tag{2.32}$$

Оценка (2.32) справедлива для любых $v \in V_0(\Omega)+u_0$, $q^* \in Y_f^*(\Omega)$ и $\delta \in \mathbb{R}$.

Преобразуем первое слагаемое в правой части (2.32).

$$\begin{aligned} I^{**}(v) - I^*(q^*) & \\ = \int\limits_\Omega (g^{**}(\nabla v) + g^*(y^*) - f(v-u_0) - y^*\cdot\nabla u_0)dx & \\ + \int\limits_\Omega (g^*(q^*) - g^*(y^*) + \nabla u_0\cdot(y^*-q^*))dx. & \end{aligned} \tag{2.33}$$

Поскольку $q^* \in Y_f^*(\Omega)$, то

$$\int\limits_\Omega q^*\cdot\nabla(v-u_0)dx = \int\limits_\Omega f(v-u_0)dx,$$

и равенство (2.33) можно представить в виде

$$I^{**}(v) - I^*(q^*) = \int\limits_\Omega D(\nabla v, y^*)dx + \int\limits_\Omega \nabla v \cdot (y^* - q^*)dx + \int\limits_\Omega (g^*(q^*) - g^*(y^*))dx. \quad (2.34)$$

Заметим, что

$$\int\limits_\Omega (g^*(q^*) - g^*(y^*))dx \leqslant \int\limits_\Omega \eta \cdot (q^* - y^*)dx = \int\limits_\Omega (\eta - \tau) \cdot (q^* - y^*)dx + \int\limits_\Omega \tau \cdot (q^* - y^*)dx, \quad (2.35)$$

где $\eta \in \partial g^*(q^*)$, а $\tau \in \partial g^*(y^*)$. Теперь (2.34) и (2.35) приводят к оценке

$$I^{**}(v) - I^*(q^*) \leqslant \int\limits_\Omega D(\nabla v, y^*)dx + \int\limits_\Omega (\nabla v - \tau) \cdot (y^* - q^*)dx + \int\limits_\Omega (\eta - \tau) \cdot (q^* - y^*)dx. \quad (2.36)$$

Для оценки второго слагаемого используем (2.9).

$$\int\limits_\Omega (\nabla v - \tau) \cdot (y^* - q^*)dx \leqslant \int\limits_\Omega \left(\frac{1}{\lambda_2} D(\nabla v, y^*) + \frac{1}{\lambda_1} D(\tau, y^*)\right)dx + (|B^*_\oplus| + |B^*_\ominus|)\|y^* - q^*\|^2_* + 2|B^*_\ominus|\,\|y^*\|_*\,\|y^* - q^*\|_{2,\Omega} + 2\lambda_1 |B^*_\ominus|\,\|y^* - q^*\|^2_* + |a_1 - a_2|\,\|y^* - q^*\|_*. \quad (2.37)$$

Используя (2.10) и то, что $\tau \in \partial g^*(y^*)$, получаем

$$I^{**}(v) - I^*(q^*) \leqslant \int\limits_\Omega \left(1 + \frac{1}{\lambda_2}\right) D(\nabla v, y^*)dx + 2(|B^*_\oplus| + |B^*_\ominus|)\|y^* - q^*\|^2_* + 4|B^*_\ominus|\,\|y^*\|_*\,\|y^* - q^*\|_* + 2(1 - \lambda_2)|B^*_\ominus|\,\|y^* - q^*\|^2_* + 2|a_1 - a_2|\,\|y^* - q^*\|_*. \quad (2.38)$$

Теперь из (2.33) и (2.38) при $\lambda_2 \to 1$ следует

$$\begin{aligned}
&\int\limits_\Omega \psi^*(y^* - p^*)dx \\
&\quad \leqslant (1+\delta^2)\Big[\int\limits_\Omega D(\nabla v, y^*)dx + (\|B^*_\oplus\| + \|B^*_\ominus\|)\|y^* - q^*\|^2_* \\
&\qquad\qquad + 2\|B^*_\ominus\|\,\|y^*\|_*\,\|y^* - q^*\|_* + |a_1 - a_2|\,\|y^* - q^*\|_*\Big] \\
&\quad + (1+\delta^{-2})\theta^2\|y^* - q^*\|^2_*.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Неравенство (2.39) верно для любого $v \in V_0(\Omega) + u_0$ и любого $q^* \in Y^*_f$. Поэтому

$$\begin{aligned}
&\int\limits_\Omega \psi^*(y^* - p^*)dx \\
&\quad \leqslant (1+\delta^2) \inf_{v \in V_0(\Omega)+u_0} \int\limits_\Omega D(\nabla v, y^*)dx \\
&\quad + \inf_{q^* \in Y^*_f} \big\{(1+\delta^2)\big[(\|B^*_\oplus\| + \|B^*_\ominus\|)\|y^* - q^*\|^2_* \\
&\qquad\qquad + 2\|B^*_\ominus\| \cdot \|y^*\|_* \cdot \|y^* - q^*\|_* \\
&\qquad\qquad\quad + |a_1 - a_2| \cdot \|y^* - q^*\|_*\big] + (1+\delta^{-2})\theta^2\|y^* - q^*\|^2_*\big\}.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

В результате получаем

$$\begin{aligned}
&\int\limits_\Omega \psi^*(y^* - p^*)dx \\
&\quad \leqslant (1+\delta^2)\big[\mathfrak{R}^2_\Lambda(y^*) + (\|B^*_\oplus\| + \|B^*_\ominus\|)\mathfrak{R}^2_f(y^*) \\
&\qquad\qquad + 2\|B^*_\ominus\| \cdot \|y^*\|_*\mathfrak{R}_f(y^*) + |a_1 - a_2|\mathfrak{R}_f(y^*)\big] \\
&\quad + (1+\delta^{-2})\theta^2\mathfrak{R}^2_f(y^*),
\end{aligned} \tag{2.41}$$

что после вычисления инфимума по δ дает (2.27).

Как следует из теоремы 2.1, $\mathfrak{R}_\Lambda(y^*)$ и $\mathfrak{R}_f(y^*)$ равны нулю тогда и только тогда, когда $y^* = p^*$. Поэтому $\mathbb{M}^*(y^*) = 0$ только, если $y^* = p^*$, и (2.28) выполнено.

Покажем справедливость (2.29). Пусть $\{y_m^*\}$ — последовательность, сходящаяся к p^* в $Y^*(\Omega)$. Так как $\mathfrak{R}_f(y_m^*) \leqslant \|y_m^* - p^*\|_*$, то $\mathfrak{R}_f(y_m^*) \to 0$. Поскольку

$$\mathfrak{R}_\Lambda^2(y_m^*) = \inf_{v \in V_0(\Omega)+u_0} \int_\Omega D(\nabla v, y_m^*)\,dx$$
$$\leqslant \int_\Omega D(\nabla u, y_m^*)\,dx \xrightarrow[m\to+\infty]{} \int_\Omega D(\nabla u, p^*)\,dx = 0, \tag{2.42}$$

то $\mathfrak{R}_\Lambda(y_m^*)$ также стремится к нулю. Таким образом, (2.29) следует из (2.27). •

Замечание 2.4. Если $A_1 = A_2 = A$, то $B_1^* = B_2^* = B^*$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, $B_\oplus^* = B^*$, $B_\ominus^*$ — нулевая матрица и в оценке (2.27) следует положить

$$\alpha_1 = |B^*|, \quad \alpha_2 = |a_1 - a_2|, \quad \alpha_3 = \theta.$$

§3. Мажоранты величин $\mathfrak{R}_\Lambda(y^*)$ и $\mathfrak{R}_f(y^*)$

3.1. Оценка $\mathfrak{R}_\Lambda(y^*)$. Верхняя граница величины $\mathfrak{R}_\Lambda(y^*)$ строится достаточно просто. Согласно определению (см. (2.25)),

$$\mathfrak{R}_\Lambda^2(y^*) \leqslant \int_\Omega D(\nabla v, y^*)dx, \quad v \in V_0(\Omega) + u_0. \tag{3.1}$$

Покажем, что если $\{v_m\}$ — минимизирующая последовательность в задаче $\mathcal{P}^{**}$, а последовательность $\{y_m^*\}$ сходится к p^* в $Y^*(\Omega)$, то

$$\int_\Omega D(v_m, y_m^*)dx \to 0. \tag{3.2}$$

Для этого преобразуем правую часть (3.1).

$$\int_\Omega D(\nabla v, y^*)dx = \int_\Omega (g^{**}(\nabla v) + g^*(y^*) - \nabla v \cdot y^*)dx$$
$$= \int_\Omega (g^{**}(\nabla v) - fv)dx - \int_\Omega (\nabla u_0 \cdot y^* - g^*(y^*) - fu_0)dx$$
$$+ \int_\Omega f(v - u_0)dx - \int_\Omega \nabla(v - u_0) \cdot y^* dx$$
$$= \int_\Omega (g^{**}(\nabla v) - fv)dx - \inf \mathcal{P}^{**} + I^*(p^*)$$
$$+ \int_\Omega (p^* - y^*) \cdot \nabla(v - u_0)dx - \int_\Omega (\nabla u_0 \cdot y^* - g^*(y^*) - fu_0)dx. \tag{3.3}$$

Поэтому для любых $v \in V_0(\Omega) + u_0$ и $y^* \in Y^*(\Omega)$ выполняется тождество

$$\int_\Omega D(\nabla v, y^*)dx = I^{**}(v) - \inf \mathcal{P}^{**} + \int_\Omega (g^*(y^*) - g^*(p^*) + (p^* - y^*) \cdot \nabla v)dx. \quad (3.4)$$

Положим здесь $v = v_m$, $y^* = y^*_m$. При этом $I^{**}(v_m) \to \inf \mathcal{P}^{**}$, последовательности $\{\nabla v_m\}$ и $\{y^*_m\}$ ограничены в $Y^*(\Omega)$. Так как

$$\begin{aligned} g^*(y^*_m) - g^*(p^*) &\leqslant \max_{i=1,2}\{g^*_i(y^*_m) - g^*_i(p^*)\} \\ &= \max_{i=1,2}\left\{\left(\frac{1}{2}B^*_i(y^*_m + p^*) + a_i\right) \cdot (y^*_m - p^*)\right\} \\ &= \max_{i=1,2}\left\{\frac{1}{2}B^*_i(y^*_m - p^*) \cdot (y^*_m - p^*) + (B^*_i p^* + a_i) \cdot (y^*_m - p^*)\right\}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

то разность $g^*(y^*_m) - g^*(p^*)$ может быть оценена через $|y^*_m - p^*|$. Поэтому правая часть (3.4) стремится к нулю, что дает (3.2).

3.2. Оценка $\mathfrak{R}_f(y^*)$ для $y^* \in Y^*(\Omega)$. Определим величину

$$\| \operatorname{div} y^* + f\|_{-1} = \sup_{\substack{w \in V_0(\Omega) \\ w \neq 0}} \frac{\int_\Omega (\nabla w \cdot y^* - fw)dx}{(\int_\Omega |\nabla w|^2 dx)^{1/2}}, \quad (3.6)$$

которая представляет собой норму в пространстве H^{-1}, топологически сопряженном к $V_0(\Omega)$. Покажем, что

$$\mathfrak{R}_f(y^*) \leqslant \| \operatorname{div} y^* + f\|_{-1}. \quad (3.7)$$

Для этого заметим, что

$$\frac{1}{2}\mathfrak{R}^2_f(y^*) = \inf_{q^* \in Y^*_f(\Omega)} \frac{1}{2}\|q^* - y^*\|^2_* = \inf_{q^* \in Y^*(\Omega)} \sup_{w \in V_0(\Omega)} \mathcal{L}(w, q^*),$$

где

$$\mathcal{L}(w, q^*) = \int_\Omega \left(\nabla w \cdot q^* - fw + \frac{1}{2}|q^* - y^*|^2\right)dx.$$

Лагранжиан $\mathcal{L}$ определен на множестве $V_0(\Omega) \times Y^*(\Omega)$, причем функция $w \mapsto \mathcal{L}(w, q^*)$ линейна при любом $q^* \in Y^*(\Omega)$, а функция $q^* \mapsto \mathcal{L}(w, q^*)$ выпукла и непрерывна при любом $w \in V_0(\Omega)$. Кроме того, $\mathcal{L}(0, q^*_k) \to +\infty$ для любой последовательности $\{q^*_k\}$ такой, что $\|q^*_k\|_* \to +\infty$. Поэтому, используя известные в теории минимаксных задач теоремы (см., например, [17]), приходим к равенству

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\mathfrak{R}^2_f(y^*) &= \inf_{q^* \in Y^*(\Omega)} \sup_{w \in V_0(\Omega)} \mathcal{L}(w, q^*) \\
&= \sup_{w \in V_0(\Omega)} \inf_{\eta^* \in Y^*(\Omega)} \int_\Omega \Big(\nabla w \cdot (\eta^* + y^*) - fw + \frac{1}{2}|\eta^*|^2\Big) dx \\
&= \sup_{w \in V_0(\Omega)} \Big[- \sup_{\eta^* \in Y^*(\Omega)} \int_\Omega \Big(-\nabla w \cdot \eta^* - \frac{1}{2}|\eta^*|^2\Big) dx + \int_\Omega (\nabla w \cdot y^* - fw) dx\Big] \\
&= \sup_{w \in V_0(\Omega)} \int_\Omega \Big(-\frac{1}{2}|\nabla w|^2 + \nabla w \cdot y^* - fw\Big) dx.
\end{aligned}$$

Так как

$$\int_\Omega (\nabla w \cdot y^* - fw) dx \leqslant \| \operatorname{div} y^* + f\|_{-1} \|\nabla w\|_*, \quad w \in V_0(\Omega),$$

то

$$\frac{1}{2}\mathfrak{R}^2_f(y^*) \leqslant \sup_{w \in V_0(\Omega)} \Big(\| \operatorname{div} y^* + f\|_{-1} \|\nabla w\|_* - \frac{1}{2}\|\nabla w\|^2_*\Big) \leqslant \frac{1}{2}\| \operatorname{div} y^* + f\|^2_{-1}.$$

Таким образом, если y^* — произвольный элемент $Y^*(\Omega)$, то определение $\mathfrak{R}_f(y^*)$ связано с вычислением нормы невязки уравнения $\operatorname{div} y^* + f$ в пространстве H^{-1}. В общем случае эта задача является весьма сложной, хотя для некоторых типов аппроксимаций соответствующие методы известны (см., например, [32]).

3.3. Оценка $\mathfrak{R}_f(y^*)$ для $y^* \in Q^*(\Omega)$. Пусть

$$y^* \in Q^*(\Omega) := \{y^* \in Y^*(\Omega) \mid \operatorname{div} y^* \in L_2(\Omega)\}.$$

Множество $Q^*(\Omega)$ образует линейное подпространство в $Y^*(\Omega)$. Оно всюду плотно в $Y^*(\Omega)$ и само является банаховым пространством относительно нормы

$$\|y^*\|_{Q^*} := \Big(\int_\Omega (|y^*|^2 + |\operatorname{div} y^*|^2) dx\Big)^{1/2}.$$

Если $y^* \in Q^*(\Omega)$, то

$$\begin{aligned}&\int\limits_\Omega (y^* \cdot \nabla w - fw)dx \\ &\qquad = -\int\limits_\Omega (\operatorname{div} y^* w + fw)dx \leqslant C_\Omega \|\operatorname{div} y^* + f\| \, \|\nabla w\|_*,\end{aligned} \tag{3.8}$$

где C_Ω — постоянная в неравенстве Фридрихса–Пуанкаре, а $\|\cdot\|$ обозначает норму в пространстве $L_2(\Omega)$. В этом случае из (3.7) и (3.8) следует, что

$$\mathfrak{R}_f(y^*) \leqslant C_\Omega \|\operatorname{div} y^* + f\|. \tag{3.9}$$

Таким образом, для $y^* \in Q^*(\Omega)$ величина $\mathfrak{R}_f(y^*)$ пропорциональна L_2-норме невязки уравнения $\operatorname{div} y^* + f = 0$.

Замечание 3.1. Точное значение C_Ω в (3.9) можно заменить на оценку сверху. В ряде случаев, например для задачи с условиями Дирихле, такая оценка C_Ω может быть легко построена (см., например, [5]). Другой способ получения оценок C_Ω следует из мультипликативных неравенств (см. [2]).

§4. Построение последовательности, сходящейся к решению задачи $\mathcal{P}^*$

Задача $\mathcal{P}^{**}$ связана с минимизацией выпуклого дифференцируемого функционала, поэтому последовательность $\{u_m\}$ такая, что

$$I^{**}(u_m) \xrightarrow[m \to +\infty]{} \inf \mathcal{P}^{**}, \tag{4.1}$$

может быть построена при помощи хорошо известных методов. Для этого надо задать последовательность конечномерных аффинных множеств $\{V_m(\Omega)\} \subset V_0(\Omega) + u_0$, размерность которых стремится к $+\infty$ при $m \to +\infty$, и таких, что для любого $v \in V_0(\Omega) + u_0$

$$\inf_{w \in V_m(\Omega)} \|w - v\| \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0. \tag{4.2}$$

Решая на $\{V_m\}$ конечномерные задачи, получим минимизирующую последовательность $\{u_m\}$. Сама эта последовательность может и не сходиться ни к какому элементу $V_0(\Omega) + u_0$, однако, как показано ниже, используя функции u_m, можно построить последовательность $\{y^*_m\} \in Q^*(\Omega)$, сходящуюся к p^* по норме $Q^*(\Omega)$, и оценить норму разности $y^*_m - p^*$.

Пусть λ — вещественное число из интервала $(0,1)$, а v — некоторая функция из множества $V_0(\Omega) + u_0$. На элементах множества $Q^*(\Omega)$ зададим функционал

$$G^*(\lambda, v; y^*) := \lambda \int\limits_\Omega D(\nabla v, y^*)dx + (1-\lambda) \int\limits_\Omega |\operatorname{div} y^* + f|^2 dx. \tag{4.3}$$

Пусть $\{Q^*_m(\Omega)\}$ — последовательность конечномерных подпространств, вложенных в $Q^*(\Omega)$, и таких, что для любой функции $y^* \in Q^*(\Omega)$

$$\inf_{q^* \in Q^*_m(\Omega)} \|q^* - y^*\|_{Q^*} \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0. \tag{4.4}$$

Определим $y^*_{\lambda m}$, как минимайзер следующей вариационной проблемы.

Задача $\mathcal{P}^*_{\lambda m}$. Найти $y^*_{\lambda m} \in Q^*_m(\Omega)$ такой, что

$$G^*(\lambda, u_m; y^*_{\lambda m}) = \inf_{y^* \in Q^*_m(\Omega)} G^*(\lambda, u_m; y^*). \tag{4.5}$$

Теорема 4.1. *Пусть u_m — минимизирующая последовательность в задаче $\mathcal{P}^{**}$, а λ — число из интервала $(0,1)$. Тогда при любом m существует единственное решение $y^*_{\lambda m}$ задачи $\mathcal{P}^*_{\lambda m}$. Для последовательности $y^*_{\lambda m}$ выполняются предельные соотношения*

$$\int\limits_\Omega D(\nabla u_m, y^*_{\lambda m})dx \to 0, \tag{4.6}$$

$$y^*_{\lambda m} \to p^* \quad \text{в } Q^*(\Omega), \tag{4.7}$$

и имеет место оценка

$$\Psi^*(y^*_{\lambda m} - p^*) \leqslant M^*_m, \tag{4.8}$$

где числовая последовательность M^*_m определяется равенствами

$$M^*_m := \left(\sqrt{\rho^2_{\Lambda m} + \alpha_1 \rho^2_{fm} + \alpha_2 \rho_{fm}} + \alpha_3 \rho_{fm}\right)^2, \tag{4.9}$$

$$\rho^2_{\Lambda m} = \int\limits_\Omega D(\nabla u_m, y^*_m)dx, \quad \rho^2_{fm} = C^2_\Omega \int\limits_\Omega |\operatorname{div} y^*_m + f|^2 dx \tag{4.10}$$

и стремится к нулю при $m \to +\infty$.

Доказательство. Используя (1.12), нетрудно установить, что

$$\int_\Omega D(\nabla v, y^*)dx \geqslant \frac{1}{4\mu_+}\|y^*\|_*^2 - \overline{\gamma}_1 + \int_\Omega g^{**}(\nabla v)dx - \mu_+ \int_\Omega |\nabla v|^2 dx.$$

Поэтому

$$G^*(\lambda, v; y^*) \geqslant \frac{\lambda}{4\mu_+}\|y^*\|^2 + \frac{1-\lambda}{2}\int_\Omega |\operatorname{div} y^*|^2 dx + c_0(\lambda, v), \tag{4.11}$$

где

$$c_0(\lambda, v) = \lambda \int_\Omega (g^{**}(\nabla v) - \mu_+|\nabla v|^2)dx - \lambda\overline{\gamma}_1 - (1-\lambda)\int_\Omega |f|^2 dx, \quad \overline{\gamma}_1 = \gamma_1 \operatorname{meas}\Omega.$$

Это неравенство показывает, что функционал $G^*(\lambda, v; \cdot)$ коэрцитивен на пространстве $Q^*(\Omega)$. Кроме того, $G^*(\lambda, v; \cdot)$ является непрерывным и строго выпуклым на $Q^*(\Omega)$. Поэтому при любом $v \in V_0(\Omega) + u_0$ существует единственный минимайзер этого функционала на всяком выпуклом замкнутом подмножестве в $Q^*(\Omega)$.

В силу (3.1) и (3.9)

$$\mathfrak{R}_\lambda(y_m^*) \leqslant \rho_{\Lambda m}, \quad \mathfrak{R}_f(y_m^*) \leqslant \rho_{fm},$$

поэтому при любом m

$$\mathbb{M}^*(y_m^*) \leqslant M_m^*. \tag{4.12}$$

Обозначим $\pi_m : Y^*(\Omega) \to Q_m^*(\Omega)$ — ортогональный проектор на подпространство $Q_m^*(\Omega)$, так что

$$\|\pi_m y^*\|_{Q^*} = \inf_{q^* \in Q_m^*} \|q^* - y^*\|_{Q^*}.$$

Поскольку $y_{\lambda m}^*$ является минимайзером задачи $\mathcal{P}_{\lambda m}^*$, а $\pi_m p^* \in Q_m^*(\Omega)$, то

$$\begin{aligned} G^*(\lambda, u_m; y_{\lambda m}^*) &\leqslant G^*(\lambda, u_m; \pi_m p^*) \\ &= \lambda \int_\Omega D(\nabla u_m, \pi_m p^*)dx + (1-\lambda)\int_\Omega |\operatorname{div}(\pi_m p^*) + f|^2 dx. \end{aligned} \tag{4.13}$$

При помощи тождества (3.4), получаем

$$\begin{aligned} &G^*(\lambda, u_m; y^*_{\lambda m}) \\ &\quad \leqslant \lambda(I^{**}(u_m) - \inf \mathcal{P}^{**}) + \lambda \int\limits_\Omega (g^*(\pi_m p^*) - g^*(p^*) + (p^* - \pi_m p^*) \cdot \nabla u_m) dx \\ &\qquad + (1-\lambda) \int\limits_\Omega |\operatorname{div}(\pi_m p^* - p^*)|^2 dx. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Оценивая разность $g^*(\pi_m p^*) - g^*(p^*)$ тем же способом, что и в (3.5), имеем

$$\begin{aligned} &|g^*(\pi_m p^*) - g^*(p^*)| \\ &\quad \leqslant \left| \max_{i=1,2} \left\{ \left(\frac{1}{2} B_i^*(\pi_m p^* - p^*) \cdot (\pi_m p^* - p^*) + (B_i^* p^* + a_i) \cdot (\pi_m p^* - p^*) \right) \right\} \right| \\ &\quad \leqslant \frac{1}{2\nu_-} |\pi_m p^* - p^*|^2 + |B_i^* p^* + a_i| \cdot |\pi_m p^* - p^*|. \end{aligned}$$

Вследствие (4.4) $\|\pi_m p^* - p^*\|_{Q^*} \to 0$, поэтому правая часть (4.14) стремится к нулю и

$$G^*(\lambda, u_m; y^*_m) = \lambda \int\limits_\Omega D(\nabla u_m, y^*_{\lambda m}) dx + (1-\lambda) \int\limits_\Omega |\operatorname{div} y^*_{\lambda m} + f|^2 dx \to 0. \tag{4.15}$$

Следовательно,

$$\int\limits_\Omega D(\nabla u_m, y^*_{\lambda m}) dx \to 0 \tag{4.16}$$

и

$$\int\limits_\Omega |\operatorname{div}(y^*_{\lambda m} - p^*)|^2 dx \to 0. \tag{4.17}$$

Соотношения (4.16) и (4.17) показывают, что

$$\rho_{\lambda m} \to 0, \quad \rho_{f m} \to 0. \tag{4.18}$$

Теперь из теоремы 2.2 и из (4.9), (4.12), (4.18) вытекает, что

$$\Psi^*(y^*_{\lambda m} - p^*) \leqslant M^*_m \to 0. \tag{4.19}$$

Так как

$$\Psi(y^*_{\lambda m} - p^*) \geqslant \gamma_3 \int\limits_\Omega |y^*_{\lambda m} - p^*|^2 dx, \tag{4.20}$$

где $\gamma_3 = \frac{1}{8}\min\{\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1}\}$, то из этой оценки и (4.17), (4.19) следует (4.7). •

Замечание 4.1. Так как гладкие функции плотны в пространстве $Q^*(\Omega)$, то соответствующую последовательность подпространств $Q^*_m(\Omega)$, удовлетворяющих условию (4.4), легко построить при помощи кусочно-аффинных непрерывных функций.

Теорема 4.1 показывает, что для построения элементов последовательности y^*_m, сходящейся к p^*, надо для каждого m решить задачи минимизации выпуклых функционалов квадратичного роста I^{**} и G^* на конечномерных множествах $\{V_m(\Omega)\} \subset V_0(\Omega) + u_0$ и $\{Q^*_m(\Omega)\} \subset Q^*(\Omega)$. При этом норма разности $y^*_m - p^*$ контролируется мажорантой $\mathbb{M}^*(y^*_m)$, которая стремится к нулю при $m \to +\infty$. Поэтому при любом $\varepsilon > 0$ аппроксимация y^*_ε такая, что $\|y^*_\varepsilon - p^*\|_* \leqslant \varepsilon$, будет построена за *конечное* число шагов.

Список литературы

[1] Ладыженская О. А., *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости*, Физматгиз, М., 1961.

[2] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, 2-ое изд., перераб., Наука, М., 1973.

[3] Михлин С. Г., *Вариационные методы в математической физике*, 2-ое изд., перераб. и доп., Наука, М., 1970.

[4] Мосолов П. П., Мясников В. П., *Механика жесткопластических сред*, Наука, М., 1981.

[5] Репин С. И., *Апостериорные оценки погрешности приближенных решений вариационных задач с сильно выпуклыми функционалами*, Пробл. мат. анал., вып. 17, СПбГУ, СПб., 1997, сс. 199–226.

[6] Серегин Г. А., *О регулярности решений вариационных задач теории фазовых переходов в упругом теле*, Алгебра и анализ 7 (1995), № 6, 153–187.

[7] Соболев С. Л., *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, Наука, М., 1988.

[8] Ainsworth M., Oden J. T., *A unified approach to a posteriori error estimation using element residual methods*, Numer. Math. **65** (1993), no. 1, 23–50.

[9] Aubin J. P., Burchard H. G., *Some aspects of the method of the hypercircle applied to elliptic variational problems*, Numerical Solution of Partial Differential Equations, II (SYNSPADE 1970)

(Proc. Sympos., Univ. Maryland, College Park, 1970), Academic Press, New York, 1971, pp. 1–67.

[10] Babushka I., Rheinboldt W. C., *Error estimates for adaptive finite element computations*, SIAM J. Numer. Anal. **15** (1978), no. 4, 736–754.

[11] Ball J. M., James R. D., *Fine phase mixtures as minimizers of energy*, Arch. Rational Mech. Anal. **100** (1987), no. 1, 13–52.

[12] Bauman P., Phillips D., *A nonconvex variational problem related to change of phase*, Appl. Math. Optim. **21** (1990), 113–138.

[13] Carstensen C., Plecháč P., *Numerical solution of the scalar double-well problem allowing microstructure*, Math. Comp. **66** (1997), 997–1026.

[14] Chipot M., *Numerical analysis of oscillations in nonconvex problems*, Numer. Math. **59** (1991), 747–767.

[15] Ciarlet P., *The finite element method for elliptic problems*, Stud. Math. Appl., vol. 4, North-Holland, Amsterdam etc., 1978.

[16] Collins Ch., Luskin M., *Optimal-order error estimates for the finite element approximation of the solution of a nonconvex variational problem*, Math. Comp. **57** (1991), no. 196, 621–637.

[17] Ekeland I., Temam R., *Convex analysis and variational problems*, Stud. Math. Appl., vol. 1, North-Holland, Amsterdam–Oxford, 1976.

[18] French D. A., *On the convergence of finite-element approximations of a relaxed variational problem*, SIAM J. Numer. Anal. **27** (1990), no. 2, 419–436.

[19] Glowinski R., *Numerical methods for nonlinear variational problems*, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1984.

[20] Goodman J., Kohn R. V., Reyna L., *Numerical study of a relaxed variational problem from optimal design*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **57** (1986), 107–127.

[21] Gurtin M. E., Temam R., *On the antiplane shear problem in finite elasticity*, J. Elasticity **11** (1981), 197–206.

[22] Johnson C., Hansbo P., *Adaptive finite element methods in computational mechanics*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **101** (1992), 143–181.

[23] Kelly D. W., *The self-equilibration of residuals and complementary a posteriori error estimates in the finite element method*, Internat. J. Numer. Methods Engrg. **20** (1984), no. 1, 1491–1506.

[24] Kohn R. V., *The relaxation of a double-well energy*, Contin. Mech. Thermodyn. **3** (1991), no. 3, 193–236.

[25] Ladevèze P., Leguillon D., *Error estimate procedure in the finite element method and applications*, SIAM J. Numer. Anal. **20** (1983), no. 3, 485–509.

[26] Lur'e K. A., Cherkaev A. V., *On a certain variational problem of phase equilibrium*, Material Instabilities in Continuum Mechanics (Edinburgh, 1985–1986), Oxford Sci. Publ., Oxford Univ. Press, New York, 1988, pp. 257–268.

[27] Pipkin A. C., *Elastic materials with two preferred states*, Quart. J. Mech. Appl. Math. **44** (1991), 1–15.

[28] Pousin J., Rappaz J., *Consistency, stability, a priori and a posteriori errors for Petrov–Galerkin methods applied to nonlinear problems*, Numer. Math. **69** (1994), no. 2, 213–231.

[29] Repin S., *A posteriori error estimation for nonlinear variational problems by duality theory*, Зап. науч. семин. ПОМИ **243** (1997), 201–214.

[30] Repin S. I., *A posteriori error estimates for approximate solutions of variational problems with power growth functionals*, Зап. науч. семин. ПОМИ **249** (1997), 244–255.

[31] Repin S. I., *A posteriori error estimation for variational problems with uniformly convex functionals*, Math. Comp. (в печати).

[32] Repin S. I., *A posteriori error estimates for the Stokes problem*, Зап. науч. семин. ПОМИ **259** (в печати).

[33] Verfürth R., *A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques*, John Wiley and Sons, Chichester; Teubner, Stuttgart, 1996.

[34] Zienkiewicz O. C., Zhu J. Z., *A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis*, Internat. J. Numer. Methods Engrg. **24** (1987), 337–357.

С.-Петербургский государственный
технический университет

Поступило 16 июня 1998 г.