КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Вып. 14 *Труды семинара по краевым задачам* *1977*

ШЕШУКОВ Е. Г.

О СХОДИМОСТИ РЯДОВ В МЕТОДЕ БЕРГМАНА — НАЗАРОВА И РЕШЕНИИ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Метод Бергмана — Назарова [1] позволяет решать ряд задач нелинейной фильтрации с использованием области видоизмененного годографа скорости $G\chi$, $\chi = \theta + is$, где θ — аргумент вектора скорости, $s = s(v)$ — непрерывная функция скорости фильтрации. В этих задачах область годографа может быть прямоугольником, полуполосой или полосой. На вертикальных сторонах $G\chi$ функция безразмерного напора $\varphi(\theta, s)$ или функция тока $\psi(\theta, s)$ кусочно-постоянны. Так как $\varphi(\theta, s)$ и $\psi(\theta, s)$ являются решением линейной системы уравнений, то можно записать $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots$, $\psi = \psi_1 + \psi_2 + \ldots$. Каждые функции $\varphi_i(\theta, s)$ и $\psi_i(\theta, s)$ удовлетворяют той же линейной системе, а на вертикальных сторонах $G\chi$ кусочно-постоянны (постоянных 1 или 2). Поэтому достаточно построить решение и его исследовать для одной функции $\varphi_i(\theta, s)$ или $\psi_i(\theta, s)$. Ниже остановимся на исследовании двух задач: фильтрации из контура питания к полубесконечной дрене и задачи обтекания плоскопараллельным потоком цепочки источников.

Фильтрация к дрене. Пусть фильтрация подчиняется закону

$$|\operatorname{grad} h| = \lambda_0 + v/\lambda_1,$$

где h — напор, λ_0 — начальный градиент напора, λ_1 — постоянная размерности скорости. Введем безразмерные параметры:
$\bar{x} = x/T_1$, $\bar{y} = y/T_1$, $u = v/\lambda_0\lambda_1$, $\bar{\varphi} = -h/\lambda_0 T_1$, $\bar{\psi} = \psi/\lambda_0\lambda_1 T_1$, где x, y — декартовы координаты, T_1 — линейный размер. Тогда в плоскости фильтрации имеем нелинейные уравнения движения

$$\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{x}}=\frac{1+u}{u}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\bar{y}},\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{y}}=-\frac{1+u}{u}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{x}},\tag{1}$$

которые преобразованием годографа скорости приводятся к линейным

$$\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\theta}=\frac{1}{k(s)}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial s},\qquad \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial s}=-\frac{1}{k(s)}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\theta},\tag{2}$$

$s=2\operatorname{arcsh}\sqrt{u}$, $k(s)=\operatorname{th}^3 s/2$. Черту над безразмерными параметрами в дальнейшем опускаем.

Рассмотрим задачу фильтрации из контура питания к параллельной полубесконечной дрене (рис. 1). На контуре питания примем $\varphi=0$, а на дрене — $\varphi=\varphi_0=\operatorname{ch}^2(s_A/2)$. Области течения в плоскости (θ, s) соответствует полуполоса $G_\varkappa$ шириной π. На границе этой полуполосы имеем следующие условия

$\varphi=0$ при $\theta=0$, $0\leqslant s<s_A$; $\varphi=\varphi_0$ при $\theta=0$, $s>s_A$; $\theta=\pi$, $s\geqslant 0$;

$\frac{\partial\varphi}{\partial s}=0$ при $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, $s=0$.

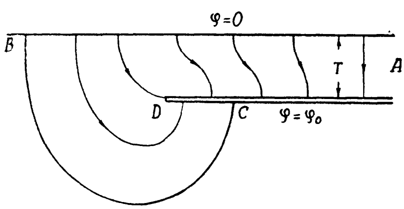


Рис. 1

По методу Бергмана — Назарова решение запишем в виде

$$\varphi^{(1)}=\varphi_0\theta/\pi+\sum_{j=1}^{\infty}A_jL_j(s)\,e^{js}\sin j\theta,\tag{3}$$

$$\varphi^{(2)}=\varphi_0+\sum_{j=1}^{\infty}B_j\left[\operatorname{th}^{-1}c\,(s-s_0)+\frac{c}{j}\right]e^{-js}\sin j\theta,$$

где $\varphi^{(1)}$ — значение φ в $G_{\varkappa_1}\in(0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ 0\leqslant s<s_A)$, $\varphi^{(2)}$ — значения φ в $G_\varkappa/G_{\varkappa_1}$, $L_j(s)=F\left(\frac{3}{2};\ 3;\ -2js\right)$ — вырожденная гипергеометрическая функция, A_j, B_j — система постоянных. Неизвестные постоянные A_j и B_j находятся из условий склеивания на линии $s=s_A$

$$\varphi^{+}=\varphi^{-},\quad \frac{\partial\varphi^{+}}{\partial s}=\frac{\partial\varphi^{-}}{\partial s}.$$

Получаем

$$B_j=-A_j\frac{F(\frac{3}{2};\ 3;\ 2js_A)-F(\frac{3}{2},\ 4,\ 2js_A)}{1+c\operatorname{th}^{-1}c(s_A-s_0)/j}\operatorname{th}c\,(s_A-s_0),$$

$$A_j = 2\varphi_0/\pi j M,\ \ M = e^{-js_A}\Big\{F\left(\frac{3}{2};\ 3;\ 2js_A\right) +$$

$$+\frac{F\left(\frac{3}{2};\ 3;\ 2js_A\right) - F\left(\frac{3}{2};\ 4;\ 2js_A\right)}{1 + c\,\mathrm{th}^{-1}c\,(s_A - s_0)/j}\left[1 + c\,\mathrm{th}\,c\,(s_A - s_0)/j\right]\Big\}.$$

Решения (3) можно представить в виде

$$\varphi^{(1)} = \frac{\varphi_0\theta}{\pi} + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^{j(s-s_A)}}{j}\sin j\theta + F_1(\theta, s),$$

$$\varphi^{(2)} = \varphi_0 + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^{j(s_A-s)}}{j}\sin j\theta + F_2(\theta,\ s), \tag{4}$$

где $F_1(\theta,\ s)$ и $F_2(\theta,\ s)$ — ограниченные дифференцируемые функции.

Из представления (4) видно, что входящие ряды сходятся в $\overline{G}\chi$. Производные $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial s}$ также сходятся в $\overline{G}\chi$ за исключением линии $s = s_A$, на которой $\frac{\partial\varphi}{\partial s}$ представляет расходящийся ряд

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \sum_{j=1}^{\infty}\sin j\theta + F(\theta,\ s). \tag{5}$$

Однако на основании теоремы Фату [2] ряд (5) суммируем по методу Пуассона — Абеля, так как $\sum_{j=1}^{\infty}\sin j\,\theta$ является производной от ряда Фурье функции $\ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) = -\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cos j\theta}{j}$.

Следовательно, $\sum_{j=1}^{\infty}\sin j\theta = \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\,\frac{\theta}{2}$.

Граница застойной зоны находится по формулам

$$x = \frac{1}{2}A_1\theta + \frac{\varphi_0}{\pi}\sin\theta + \frac{1}{4}A_1\sin 2\theta + \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{\infty} jA_j\left[\frac{\sin(j-1)\theta}{j-1} + \frac{\sin(j+1)\theta}{j+1}\right],$$

$$y = -\frac{\varphi_0}{\pi}\cos\theta - \frac{1}{4}A_1\cos 2\theta - \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{\infty} jA_j\left[\frac{\cos(j+1)\theta}{j+1} - \frac{\cos(j-1)\theta}{j-1}\right] + y_0,$$

$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

На рис. 2 приведены результаты расчетов влияния параметра φ_0: 1) $\varphi_0 = 1.147$, 2) $\varphi_0 = 2$ на положение границы застойной зоны.

Источники в плоско-параллельном потоке. Рассмотрим задачу обтекания прямолинейной равномерной цепочки источников плоско-параллельным потоком жидкости при законе $|\operatorname{grad}\varphi| = 1 + u$.

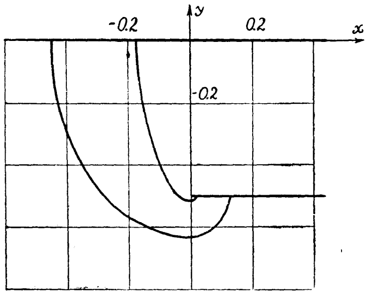


Рис. 2

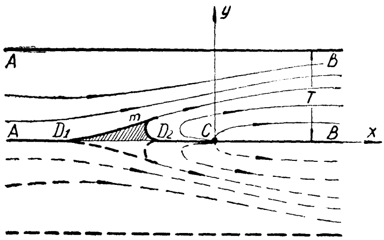


Рис. 3

Характерный элемент течения представлен на рис. 3. Пусть v_A — скорость набегающего потока, $2Q$ — обильность источников, $2T$ — расстояние между источниками. Считаем на BC функцию $\psi = 0$. Тогда $\psi_{AB} = (Q + q)/\lambda_0\lambda_1 T = \psi_2$, $\psi_{AD_1D_2C} = Q/\lambda_0\lambda_1 T = \psi_1$, $q = v_A T$. Областью годографа скорости будет полуполоса $Q\chi$ шириной π. Функция $\psi(\theta, s)$ на границе $G\chi$ принимает следующие условия: $\psi = 0$ при $\theta = 0$, $s > s_B$; $\psi = \psi_1$ при $\theta = 0$, $0 \leqslant s < s_A$; $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$; $s = 0$; $\theta = \pi$, $s \geqslant 0$; $\psi = \psi_2$ при $\theta = 0$, $s_A < s < s_B$.

Линиями $s = s_A$ и $s = s_B$ область $G\chi$ разбиваем на три подобласти: $G\chi_1 \in (0 < \theta < \pi$, $0 < s < s_A)$, $G\chi_2 \in (0 < \theta < \pi, s_A < s < s_B)$ и $G\chi_3 \in (0 < \theta < \pi$, $s > s_B)$, в каждой из которых $\psi(\theta, s)$ ищем методом Бергмана — Назарова по формулам

$$\psi^{(1)} = \psi_1 + \sum_{j=1}^{\infty} A_j L_j(s)\, e^{js} \sin j\theta,$$

$$\psi^{(2)} = \psi_2 + \frac{(\psi_1 - \psi_2)\theta}{\pi} + \sum_{j=1}^{\infty} (B_j R_j(s)\, e^{js} + C_j M_j(s)\, e^{-js}) \sin j\theta \qquad (6)$$

$$\psi^{(3)} = \frac{\psi_1\theta}{\pi} + \sum_{j=1}^{\infty} D_j M_j(s)\, e^{-js} \sin j\theta,$$

где A_j, B_j, C_j, D_j — постоянные,

$$L_j(s) = \frac{aj\, s^{m+1}}{m+1} F\left(\frac{m}{2} + 1;\ m + 2;\ u\right),$$

$$R_j(s) = \operatorname{th} c(s - s_0) - \frac{c}{j},$$

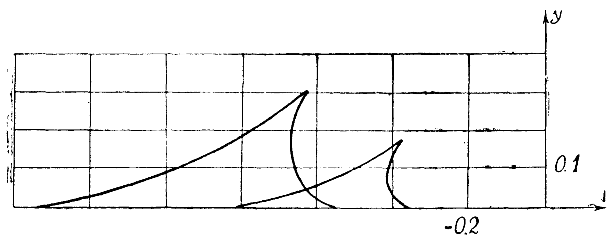
$$M_j(s) = \operatorname{th} c(s - s_0) + \frac{c}{j}.$$

Неизвестные постоянные, входящие в представление (6), находятся из условий склеивания на линиях $s = s_A$ и $s = s_B$.

Координаты застойной зоны определяются по формулам

$$x = -0{,}64 \sum_{j=2}^{\infty} jA_j \left[\frac{\cos(j-1)\theta - 1}{j-1} + \frac{\cos(j+1)\theta - 1}{j+1} \right],$$

$$y = 0{,}64 \sum_{j=2}^{\infty} jA_j \left[\frac{\sin(j-1)\theta}{j-1} - \frac{\sin(j+1)\theta}{j+1} \right].$$



Границы застойных зон приведены на рис. 4. при $S_A = 0.75$, $Q/q = 1$ и $Q/q = 3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильинский Н. Б., Фомин В. М., Шешуков Е. Г. Применение метода Бергмана — Назарова к решению уравнений нелинейной теории фильтрации. — „Вычислительная и прикладная математика", 1972, вып. 17. Изд-во Киевского ун-та, с. 3—18.

2. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М., Физматгиз, 1961.

Доложено на семинаре 3 февраля 1976 г.