Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2021. Том 62, № 2

УДК 517.983

О ПОЧТИ КОМПАКТНОСТИ НЕКОТОРЫХ ЧАСТИЧНО ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В L_p

В. Б. Коротков

Аннотация. Устанавливаются различные достаточные условия почти компактности частично интегральных операторов в L_p.

DOI 10.33048/smzh.2021.62.207

Ключевые слова: почти компактный оператор, интегральный оператор, частично интегральный оператор.

Пусть (X,μ) — пространство с мерой μ. *Атомом меры* μ называется множество положительной меры, не представимое в виде объединения двух непересекающихся множеств с положительными мерами. Мера, не имеющая атомов, называется *неатомической.* Мера μ называется *сепарабельной*, если пространство $L_1(X,\mu)$ сепарабельно. Далее предполагается, что фигурирующие в статье меры μ, ν конечны, сепарабельны и неатомичны. Всем этим условиям удовлетворяет мера Лебега измеримых по Лебегу подмножеств ограниченных множеств евклидова пространства или числовой прямой.

Пусть (Y,ν) — пространство с мерой ν. Обозначим через $L_0(\nu) := L_0(Y,\nu)$ пространство всех определенных на Y ν-измеримых ν-почти всюду конечных функций с обычным отождествлением функций, отличающихся одна от другой лишь на множествах ν-меры нуль.

Пусть $1 \le p \le \infty$, $L_p(\mu) := L_p(X,\mu)$, $L_p(\nu) := L_p(Y,\nu)$. Линейный оператор $T : L_p(\mu) \to L_0(\nu)$ называется *интегральным* (соответственно *частично интегральным*), если существует определенная на $Y \times X$ $\nu\times\mu$-измеримая $\nu\times\mu$-почти всюду конечная функция $K(s,t)$ такая, что для всех $f \in L_p(\mu)$ (соответственно для всех $f \in L_\infty(\mu)$)

$$Tf(s) = \int K(s,t)f(t)\,d\mu(t) \tag{1}$$

для ν-п. в. $s \in Y$. Интеграл в (1) понимается в лебеговом смысле. Функция $K(s,t)$ называется *ядром* интегрального (частично интегрального) оператора T. Будем говорить, что ядро $K(s,t)$ *порождает* интегральный (частично интегральный) оператор по формуле (1).

Линейный оператор $T : L_p(\mu) \to L_0(\nu)$ назовем *почти компактным*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется множество $Y_\varepsilon \subset Y$ такое, что $\nu(Y\setminus Y_\varepsilon) < \varepsilon$ и оператор $P_{Y_\varepsilon}T$ действует из $L_p(\mu)$ в $L_p(\nu)$ и компактен; здесь и далее P_e — оператор умножения на характеристическую функцию χ_e множества e: $\chi_e(s) = 1$, если $s \in e$, и $\chi_e(s) = 0$, если $s \notin e$, $P_e h = \chi_e h$, $h \in L_p(\nu)$.

Если $p > 1$, то каждый интегральный оператор $T : L_p(\mu) \to L_0(\nu)$ почти компактен. Для $p = 2$ это утверждение доказано в [1], для $p > 1$ оно доказано в [2].

© 2021 Коротков В. Б.

Почти компактные операторы играют важную роль в теории функциональных и интегральных уравнений 1-го и 2-го родов в L_p: каждое линейное функциональное уравнение 1-го рода

$$Tx(s) = h(s) \in L_p(\nu), \quad 1 \le p \le \infty, \tag{2}$$

с почти компактным оператором $T : L_p(\mu) \to L_p(\nu)$ может быть сведено к эквивалентному уравнению Фредгольма с компактным оператором. Действительно, найдется разбиение множества Y на попарно не пересекающиеся ν-измеримые множества Y_n, $n = 1, 2, \dots$, такие, что $T_n := P_{Y_n} T : L_p(\mu) \to L_p(\nu)$ — компактные операторы. Пусть $b_n \ge \|T_n\| + 1$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда оператор

$$T_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n n^2} T_n$$

действует из $L_p(\mu)$ в $L_p(\nu)$ и компактен. Умножив обе части уравнения (2) на функцию

$$b(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n n^2} \chi_{Y_n}(s),$$

получим эквивалентное уравнение Фредгольма $(T_0 x)(s) = b(s)h(s) \in L_p(\nu)$ с компактным оператором T_0. Если $T : L_p(\mu) \to L_p(\mu)$ — почти компактный оператор, то в [3] показано, что функциональное уравнение 2-го рода в $L_p(\mu)$

$$x(s) - \lambda(Tx)(s) = g(s) \in L_p(\mu)$$

может быть сведено к эквивалентному интегральному уравнению 2-го рода в $L_p(\mu)$ с квазивырожденным карлемановским ядром. Для такого интегрального уравнения в [4, гл. 6, разд. 3] построены приближенные методы решения.

Представляет интерес задача отыскания условий почти компактности линейных операторов в L_p. Ниже устанавливаются три таких условия для частично интегральных операторов, но прежде отметим, что не каждый частично интегральный оператор почти компактен, как показывает следующий

Пример. Определим оператор $\tau : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ равенством

$$\tau f = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \int_0^1 f \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{m e_n}}\, dt, \quad f \in L_2(0,1),$$

где множества $e_n \subset (0,1)$ попарно не пересекаются, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{m e_n} < \infty$, m — мера Лебега, $\{w_n\}$ — ортонормированный базис Уолша. Оператор τ частично интегральный, но не почти компактный. Более того, τ не подобен никакому почти компактному оператору.

Доказательство. Положим

$$K_0(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(s) \frac{\chi_{e_n}(t)}{\sqrt{m e_n}}.$$

Тогда для любого $f \in L_\infty(0,1)$ и всех $s \in [0,1]$

$$\int_0^1 |K_0(s,t)||f(t)|\, dt \le \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{m e_n} \|f\|_\infty,$$

где $\|\cdot\|_\infty$ — норма в $L_\infty(0,1)$, так что τ — частично интегральный оператор в $L_2(0,1)$.

Покажем, что τ не подобен никакому почти компактному оператору. Предположим противное: допустим, что найдется изоморфизм $u : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ такой, что $\varkappa := u\tau u^{-1}$ — почти компактный оператор. Тогда существует множество $e \subset (0,1)$, $me > 0$, такое, что $P_e\varkappa$ — компактный оператор. Значит, сопряженный оператор $(P_e\varkappa)^* = \varkappa^* P_e$ компактный. Поэтому для любой некомпактной слабо сходящейся к 0 последовательности функций g_n из $L_2(0,1)$ с носителями в e имеем

$$\|\varkappa^* g_n\|_2 = \|\varkappa^* P_e g_n\|_2 \to 0 \quad \text{при } n \to \infty,$$

где $\|\cdot\|_2$ — норма в $L_2(0,1)$. Следовательно, 0 принадлежит предельному спектру $\sigma_c(\varkappa^*)$ оператора $\varkappa^*$. Однако $\tau = u^{-1}\varkappa u$, а значит, $0 \in \sigma_c(\tau^*)$. Это противоречит равенству

$$\|\tau^* f\|_2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{me_n}} \int_0^1 f w_n \, ds \right\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^1 f w_n \, ds \right|^2 \right)^{1/2} = \|f\|_2$$

для любого $f \in L_2(0,1)$. Таким образом, τ не подобен почти компактному оператору. Так как любой интегральный оператор в L_2 почти компактен, отсюда следует также, что частично интегральный оператор τ не подобен никакому интегральному оператору.

Лемма 1. *Пусть $1 < p < \infty$, $1 \le r < p$, $A : L_r(\mu) \to L_r(\nu)$ — линейный непрерывный оператор, и пусть A компактен как оператор из $L_\infty(\mu)$ в $L_\infty(\nu)$. Тогда A компактен как оператор из $L_p(\mu)$ в $L_p(\nu)$.*

Лемма 1 является частным случаем известной интерполяционной теоремы Красносельского [5, гл. 1, теорема 3.10].

Теорема 1. *Пусть $1 < p < \infty$ и $T : L_p(\mu) \to L_0(\nu)$ — частично интегральный оператор. Если для некоторого Δ, $0 < \Delta \le p-1$, существует линейный непрерывный оператор $\widetilde{T} : L_{p-\Delta}(\mu) \to L_{p-\Delta}(\nu)$ такой, что $\widetilde{T}g = Tg$ для всех $g \in L_p(\mu)$, то T — почти компактный оператор.*

Доказательство. Напомним, что меры μ, ν предполагаются конечными и сепарабельными. Пусть $K(s,t)$ — ядро T. Так как функция, тождественно равная 1, принадлежит $L_\infty(\mu)$, имеем

$$\int |K(s,t)| \, d\mu(t) < \infty$$

для ν-п. в. $s \in Y$. Введем векторную функцию $\varphi(s) = K(s,\cdot)$ со значениями в $L_1(\mu)$. Обозначим через (h,g) значение функционала $h \in L_\infty(\mu)$ на элементе $g \in L_1(\mu)$. Из

$$(h, \varphi(s)) = \int K(s,t) h(t) \, d\mu(t) = (Th)(s)$$

следует, что векторная функция $\varphi : Y \to L_1(\mu)$ слабо измерима. Так как мера μ сепарабельна, по теореме 3.5.3 из [6] функция φ сильно измерима. Отсюда, из $\nu Y < \infty$ и доказательства теоремы 3.5.3 из [6] вытекает, что для любых $\gamma > 0$ и $\delta > 0$ можно построить в явном виде сильно измеримую конечнозначную функцию $\varphi_\gamma : Y \to L_1(\mu)$ и множество F_δ такие, что

$$\|\varphi(s) - \varphi_\gamma(s)\|_1 < \gamma \text{ для всех } s \in F_\delta \quad \text{и} \quad \nu(Y \backslash F_\delta) < \delta, \tag{3}$$

где $\|\cdot\|_1$ — норма в $L_1(\mu)$. Пользуясь (3), найдем для любого $\varepsilon > 0$ и любого $n = 1, 2, \dots$ сильно измеримую конечнозначную функцию $\psi_n := \varphi_{1/n} : Y \to L_1(\mu)$ и множества $H_n \subset Y$ такие, что

$$\|\varphi(s) - \psi_n(s)\|_1 < 1/n \text{ для всех } s \in H_n \quad \text{и} \quad \nu(Y \backslash H_n) < \varepsilon/2^n.$$

Положим $Y_\varepsilon = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} H_n$. Тогда $\nu(Y \backslash Y_\varepsilon) < \varepsilon$ и

$$\|\varphi(s) - \psi_n(s)\|_1 < 1/n \quad \text{для всех } s \in Y_\varepsilon,\ n = 1, 2, \dots . \tag{4}$$

Запишем конечнозначную функцию $\psi_n : Y \to L_1(\mu)$ в виде

$$\psi_n(s) = \sum_{m=1}^{N_n} \chi_{g_{n,m}}(s) a_{n,m}, \quad a_{n,m} \in L_1(\mu),$$

с попарно не пересекающимися множествами $g_{n,m}$ и рассмотрим компактный интегральный оператор $T_n : L_\infty(\mu) \to L_\infty(\nu)$ с вырожденным ядром

$$K_n(s,t) = \sum_{m=1}^{N_n} \chi_{g_{n,m}}(s) a_{n,m}(t).$$

В силу (4) для всех $n = 1, 2, \dots$

$$|||P_{Y_\varepsilon} T - P_{Y_\varepsilon} T_n||| \le \sup_{s \in Y_\varepsilon} \|\varphi(s) - \psi_n(s)\|_1 \le 1/n,$$

где $|||\cdot|||$ — норма в пространстве всех линейных непрерывных операторов, действующих из $L_\infty(\mu)$ в $L_\infty(\nu)$. Следовательно, оператор $T_\varepsilon := P_{Y_\varepsilon} T : L_\infty(\mu) \to L_\infty(\nu)$ компактен.

Покажем, что оператор $T : L_p(\mu) \to L_0(\nu)$ почти компактен. Имеем $\nu(Y \backslash Y_\varepsilon) < \varepsilon$. Из условия теоремы 1 вытекает, что оператор $P_{Y_\varepsilon} \widetilde{T} : L_{p-\Delta}(\mu) \to L_{p-\Delta}(\nu)$ непрерывен; кроме того, оператор $P_{Y_\varepsilon} \widetilde{T} : L_\infty(\mu) \to L_\infty(\nu)$ компактен, так как $P_{Y_\varepsilon} \widetilde{T} = T_\varepsilon$. Значит, по лемме 1 оператор $P_{Y_\varepsilon} \widetilde{T} : L_p(\mu) \to L_p(\nu)$ компактен. Остается заметить, что $P_{Y_\varepsilon} \widetilde{T} g = P_{Y_\varepsilon} T g$ для всех $g \in L_p(\mu)$.

Теорема 2. *Пусть $1 < p < \infty$ и $T : L_p(\mu) \to L_p(\nu)$ — непрерывный частично интегральный оператор с ядром $K(s,t)$, удовлетворяющим условию*

$$\int |K(s,t)|\, d\nu(s) \le C \quad \text{для } \mu\text{-п. в. } t \in X, \tag{5}$$

где C — постоянная. Тогда T — почти компактный оператор.

Доказательство. Для любого $f \in L_1(\mu)$ в силу (5)

$$\int \left| \int K(s,t) f(t)\, d\mu(t) \right| d\nu(s) \le \int \int |K(s,t)||f(t)|\, d\mu(t) d\nu(s)$$
$$= \int \int |K(s,t)|\, d\nu(s) |f(t)|\, d\mu(t) \le C \int |f(t)|\, d\mu(t).$$

Таким образом, ядро $K(s,t)$ порождает непрерывный интегральный оператор $\widetilde{T} : L_1(\mu) \to L_1(\nu)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Из доказательства теоремы 1, примененного к этому оператору, следует, что найдется множество $Y_\varepsilon \subset Y$ такое, что $\nu(Y \backslash Y_\varepsilon) < \varepsilon$ и оператор $P_{Y_\varepsilon} \widetilde{T} : L_\infty(\mu) \to L_\infty(\nu)$ компактен. Отсюда по лемме 1

$P_{Y_\varepsilon}\widetilde{T} : L_p(\mu) \to L_p(\nu)$ — компактный оператор. Так как $P_{Y_\varepsilon}\widetilde{T}h = P_{Y_\varepsilon}Th$ для всех $h \in L_\infty(\mu)$ и оператор $T : L_p(\mu) \to L_p(\nu)$ непрерывен, то $P_{Y_\varepsilon}\widetilde{T}g = P_{Y_\varepsilon}Tg$ для всех $g \in L_p(\mu)$. Следовательно, $T : L_p(\mu) \to L_p(\nu)$ — почти компактный оператор.

Замечание. Условие (5) в теореме 2 нельзя заменить условием

$$\int |K(s,t)|\, d\nu(s) < \infty \quad \text{для } \mu\text{-п. в. } t \in X,$$

как показывает оператор τ из рассмотренного выше примера.

Теорема 3. *Пусть $1 < p < \infty$ и $T : L_p(\mu) \to L_p(\nu)$ — непрерывный частично интегральный оператор с ядром $K(s,t)$. Если $\lim\limits_{\mu e \to 0} \|TP_e\| = 0$, то T — почти компактный оператор.*

Доказательство. Из доказательства теоремы 1 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется множество E_ε такое, что $\nu(Y \backslash E_\varepsilon) < \varepsilon/2$ и оператор $P_{E_\varepsilon}T : L_\infty(\mu) \to L_\infty(\nu)$ компактен. Имеем

$$\int |K(s,t)|\, d\mu(t) < \infty \quad \text{для } \nu\text{-п. в. } s \in Y.$$

Следовательно, найдутся множество G_ε и постоянная C_1 такие, что $\nu(Y \backslash G_\varepsilon) < \varepsilon/2$ и

$$\chi_{G_\varepsilon}(s) \int |K(s,t)|\, d\mu(t) \le C_1 \quad \text{для } \nu\text{-п. в. } s \in Y.$$

Положим $Y_\varepsilon = E_\varepsilon \cap G_\varepsilon$. Тогда $\nu(Y \backslash Y_\varepsilon) < \varepsilon$, оператор $P_{Y_\varepsilon}T : L_\infty(\mu) \to L_\infty(\nu)$ компактен и

$$\iint \chi_{Y_\varepsilon}(s)|K(s,t)|\, d\nu(s)d\mu(t) = \iint \chi_{Y_\varepsilon}(s)|K(s,t)|\, d\mu(t)d\nu(s) \le C_1 \nu Y < \infty.$$

Значит,

$$M(t) = \int \chi_{Y_\varepsilon}(s)|K(s,t)|\, d\nu(s) < \infty$$

для п. в. $t \in X$. Поэтому для любого $\delta > 0$ найдутся множество X_δ и постоянная C_2 такие, что $\mu(X \backslash X_\delta) < \delta$ и

$$\chi_{X_\delta}(t)M(t) \le C_2 \quad \text{для } \mu\text{-п. в. } t \in X. \tag{6}$$

Рассмотрим ядро

$$K_{\varepsilon,\delta}(s,t) = \chi_{Y_\varepsilon}(s)\chi_{Y_\delta}(t)K(s,t).$$

В силу (6) это ядро удовлетворяет условию типа (5). Следовательно, ядро $K_{\varepsilon,\delta}(s,t)$ порождает непрерывный интегральный оператор $\widetilde{T}_{\varepsilon,\delta} : L_1(\mu) \to L_1(\nu)$. Так как $\widetilde{T}_{\varepsilon,\delta}f = P_{Y_\varepsilon}TP_{Y_\delta}f$ для любого $f \in L_\infty(\mu)$, то $\widetilde{T}_{\varepsilon,\delta}$ действует из $L_\infty(\mu)$ в $L_\infty(\nu)$ и компактен. Отсюда по лемме 1 $\widetilde{T}_{\varepsilon,\delta} : L_p(\mu) \to L_p(\nu)$ — компактный оператор. Кроме того, $\widetilde{T}_{\varepsilon,\delta}g = P_{Y_\varepsilon}TP_{Y_\delta}g$ для всех $g \in L_p(\mu)$, так что $P_{Y_\varepsilon}TP_{Y_\delta} : L_p(\mu) \to L_p(\nu)$ — компактный оператор. Из

$$\|P_{Y_\varepsilon}T - P_{Y_\varepsilon}TP_{Y_\delta}\| = \|P_{Y_\varepsilon}TP_{X\backslash X_\delta}\| \le \|TP_{X\backslash X_\delta}\| \to 0 \quad \text{при } \delta \to 0$$

вытекает, что $P_{Y_\varepsilon}T : L_p(\mu) \to L_p(\nu)$ — компактный оператор.

В заключение заметим, что если в теоремах 1–3 дополнительно потребовать выполнение условия $\lim\limits_{\nu E \to 0} \|P_E T\| = 0$, то оператор T в них станет компактным.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коротков В. Б., Степанов В. Д.* О некоторых свойствах интегральных операторов свертки // Применение методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1979. С. 64–68.
2. *Коротков В. Б.* О регулярной и компактной факторизации интегральных операторов в L_p // Мат. заметки. 1982. Т. 32, № 5. С. 601–606.
3. *Коротков В. Б.* Компактные по мере, почти компактные операторы и линейные функциональные уравнения в L_p // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 3. С. 610–619.
4. *Коротков В. Б.* Линейные функциональные и интегральные уравнения 1-го, 2-го и 3-го родов. М.: РАН, 2017. (ЮМИ ВНЦ).
5. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.
6. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

Поступила в редакцию 16 сентября 2020 г.
После доработки 16 сентября 2020 г.
Принята к публикации 18 ноября 2020 г.

Коротков Виталий Борисович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090