Дискретная математика

том 2 выпуск 3 * 1990

УДК 519.1

ДИХОТОМИЧЕСКИЕ ГРАФЫ С МАКСИМАЛЬНЫМ ОБХВАТОМ

А. В. Князев

Дихотомическим называется орграф, у которого полустепени исхода и захода каждой вершины совпадают и равны 2. В [2] доказано, что обхват (длина кратчайшего контура) n-вершинного дихотомического графа не превосходит $]n/2[$, где $]x[$ — наименьшее целое число, не меньшее x. В работе описаны (с точностью до подстановочного подобия) матрицы смежности всех дихотомических графов с обхватом $]n/2[$ и доказаны некоторые свойства таких графов.

Напомним, что *дихотомическим* называется орграф без параллельных дуг, у которого полустепени исхода и захода каждой вершины совпадают и равны 2. В [2] доказано, что обхват (длина кратчайшего контура) n-вершинного дихотомического графа не превосходит $]n/2[$, где $]x[$ — наименьшее целое число, не меньшее x. Обозначим $G(n, 2,]n/2[)$ класс всех дихотомических графов с обхватом $]n/2[$. В работе описаны (с точностью до подстановочного подобия) матрицы смежности всех дихотомических графов из $G(n, 2,]n/2[)$ и доказаны некоторые свойства таких графов.

Введем обозначения. Пусть g — полноцикловая подстановка $(0, 1 \ldots n-1)$ (а $\tilde{g}$ — соответствующая ей подстановочная матрица) из симметрической группы S_n, действующей на множестве $\{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Для $g^* \in S_n$ пусть

$$\Delta_j(g^*) = j \ominus i,$$

где $g^*(i) = j$, а $\ominus$ — операция вычитания по модулю n, т. е. $j \ominus i = j - i$, если $j \geqslant i$, и $j \ominus i = n + j - i$, если $j < i$;

$$\Delta_{\max}(g^*) = \max\{\Delta_j(g^*) \mid j = 0, \ldots, n-1\};$$
$$\Delta_{\min}(g^*) = \min\{\Delta_j(g^*) \mid j = 0, \ldots, n-1\}.$$

Там, где будет ясно, о какой подстановке идет речь, будем писать просто $\Delta_{\max}$, $\Delta_{\min}$, Δ_j.

Теорема 1. *Пусть $\Gamma \in G(n, 2,]n/2[)$ и A — матрица смежности графа Γ. Тогда существует такая подстановка g^*, что выполнено равенство*

$$(\tilde{g}^*)^{-1} A \tilde{g}^* = \tilde{g} + (\tilde{g})^t,$$

где $t \in \{2, (n/2)+1\}$, если n четное, и $t \in \{2, (n+1)/2\}$, если n нечетное и $n \geqslant 3$.

При $n = 6, 8$ помимо графов с вышеперечисленными матрицами смежности имеется еще четыре графа (см. рис. 1):

$$\Gamma_{6,2}, \Gamma_{6,4} \in G(6, 2, 3) \quad и \quad \Gamma_{8,2}, \Gamma_{8,4} \in G(8, 2, 4).$$

Доказательство. По теореме Бирхгофа (см. [1]) справедливо равенство

$$A = \tilde{g}_1 + \tilde{g}_2,$$

где $\tilde{g}_1$, $\tilde{g}_2$ — подстановочные матрицы.

Тогда возможны следующие случаи.

1. Обе подстановки g_1, g_2 полноцикловые;

2. Хотя бы одна из подстановок g_1, g_2 имеет цикловую структуру $[(n/2)^2]$.

Ясно, что последний случай возможен лишь при четном n. Сразу отметим, что указанное свойство матриц смежности графов из $G(n, 2,]n/2[)$

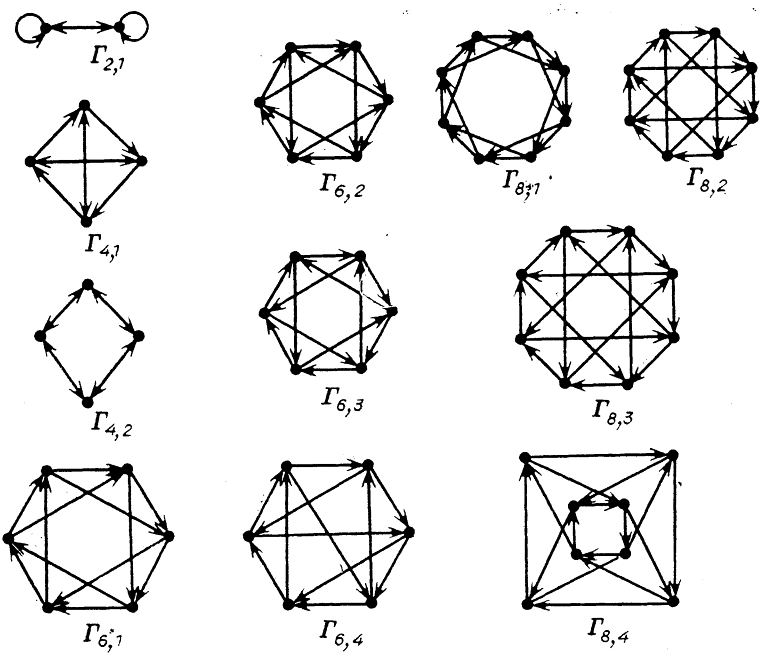

Рис. 1

позволило полностью перебрать все неизоморфные графы из классов $G(n, 2, n/2)$ при $n = 2, 4, 6, 8$. Алгоритм перебора, реализованный на ЭВМ, состоял в проверке на противоречивость подстановок из S_n с подстановками g и g^2 и возведении соответствующих матриц в степень с проверкой на появление ненулевого элемента на главной диагонали (см. рис. 1).

Всюду в дальнейшем при четном n полагаем $n \geqslant 10$.

Остановимся подробней на каждом из двух возможных случаев.

1. Пусть обе подстановки g_1, g_2 полноцикловые. Без ограничения общности можем считать, что

$$g_1 = g \quad \text{и} \quad g_2 = (0\ i_1\ i_2\ \ldots\ i_{n-1}).$$

Так как обхват p графа Γ равен $]n/2[$, то

$$\Delta_{\max}(g_2) \leqslant \begin{cases} n/2+1, & \text{если } n \text{ четное;} \\ (n+1)/2, & \text{если } n \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Поскольку в Γ нет параллельных дуг, то

$$\Delta_{\min}(g_2) \geqslant 2.$$

Лемма 2. *Пусть n нечетное, обе подстановки g_1, g_2 полноцикловые и $\Delta_{\max}(g_2)=(n+1)/2=\Delta_{\max}$. Тогда*

$$g_2=g^{(n+1)/2}.$$

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что $\Delta_{\max}=\Delta_{i_1}$. Следовательно, $g_2(0)=(n+1)/2$ (см. рис. 2). Нетрудно убедиться, что если $g_2((n+1)/2)\neq 1$, то в Γ существует контур длины, строго меньшей $(n+1)/2$. Поэтому $g_2((n+1)/2)=1$ и $\Delta_{i_2}=\Delta_{\max}$. Аналогично доказы-

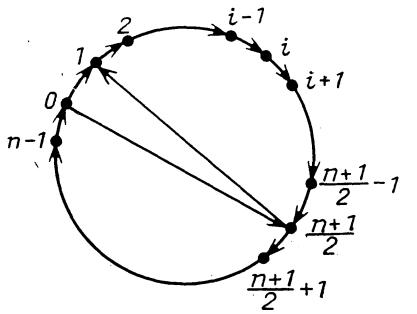

Рис. 2

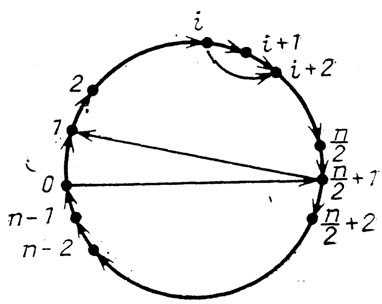

Рис. 3

вается, что $\Delta_{i_j}=\Delta_{\max}$ при всех $j=0, \ldots, n-1$. Значит,

$$g_2=g^{(n+1)/2},$$

и лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть n четное, обе подстановки g_1, g_2 полноцикловые и $\Delta_{\max}(g_2)=(n/2)+1=\Delta_{\max}$. Тогда*

$$g_2=g^{n/2+1}.$$

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что $\Delta_{\max}=\Delta_{i_1}$. Следовательно, $g_2(0)=(n/2)+1$ (см. рис. 3). Ясно, что если $g_2((n/2)+1)\neq 1, 2$, то в Γ существует контур длины, строго меньшей $n/2$. Докажем методом «от противного», что

$$g_2((n/2)+1)=2. \tag{1}$$

Предположим противное, т. е.

$$g_2((n/2)+1)=1. \tag{2}$$

Далее будем называть дуги графа Γ, соответствующие переходам подстановки g_2, g_2-дугами. Рассмотрим (см. рис. 3) подмножество вершин графа Γ

$$T_0=\{(n/2)+2,\ (n/2)+3,\ \ldots,\ n-2,\ n-1,\ 0\}.$$

Ясно, что в Γ нет g_2-дуг, соединяющих между собой вершины из T_0 (иначе в Γ был бы контур длины, меньшей $n/2$). Следовательно, g_2-дуги, исходящие из вершин T_0, могут входить только в вершины множества

$$T_1=\{1,\ 2,\ \ldots,\ (n/2)-1,\ n/2\}.$$

Итак, из вершин T_0 исходит $(n/2)-2$ g_2-дуг, кроме дуги $(0, (n/2)+1)$, а в вершины T_1 входит $(n/2)-1$ g_2-дуг, кроме дуги $((n/2)+1, 1)$. Отсюда и из неравенства $n\geqslant 10$ получаем, что в Γ существует g_2-дуга, соединяющая между собой вершины T_1, вида (i, j), где $1\leqslant i$, $j\leqslant n/2$. Ясно, что если $i>j$ либо $j>i+2$, то в Γ существует контур длины, меньшей $n/2$. Поэтому в Γ существует дуга $(i, i+2)$, где $1\leqslant i\leqslant (n/2)-2$ (см. рис. 3).

Рассмотрим множество g_2-дуг, исходящих из вершин множества

$$T_{0,0}=\{(n/2)+2,\ (n/2)+3,\ \ldots,\ (n/2)+i+1\},\qquad T_{0,0}\subset T_0.$$

Так как $n \geqslant 10$ и обхват p графа Г равен $n/2$, g_2-дуга, исходящая из вершины $(n/2)+2$, может входить только в вершины 2 либо 3 множества T_1. Из аналогичных соображений получаем, что для любой вершины $(n/2)+j$, $2 \leqslant j \leqslant i+1$, g_2-дуга, исходящая из $(n/2)+j$, может входить только в вершины 2, ..., $j+1$. С учетом того, что в вершину $(i+2)$ уже входят две дуги, g_2-дуги, исходящие из вершин $T_{0,0}$, могут входить только в вершины множества

$$T_{1,0}=\{2,\ 3,\ \ldots,\ i+1\}, \qquad T_{1,0} \subset T_1.$$

Ясно, что $|T_{0,0}|=|T_{1,0}|=i$. Рассмотрим множество g_2-дуг, исходящих из вершин множества

$$T_{0,1}=\{(n/2)+i+2,\ \ldots,\ n-1\}, \qquad T_{0,1} \subset T_0.$$

Так как в вершины множества $T_{1,0}$ входят только g_2-дуги, исходящие из вершин $T_{0,0}$, а в вершину $i+2$ уже входят две дуги, получаем, что g_2-дуги, исходящие из вершин $T_{0,1}$, могут входить только в вершины множества

$$T_{1,1}=\{i+3,\ \ldots,\ n/2\}, \qquad T_{1,1} \subset T_1.$$

Так как $|T_{0,1}|=|T_{1,1}|=(n/2)-i-2$, $n \geqslant 10$, и обхват p графа Г равен $n/2$, то для любой вершины $(n/2)+j$, где $i+2 \leqslant j \leqslant (n/2)-1$, g_2-дуга, исходящая из $(n/2)+j$, может входить только в вершину $j+1$ (см. рис. 4).

Рассуждая аналогично о g_2-дугах, исходящих из вершин множества T_1, получаем, что для любой вершины j, где $1 \leqslant j \leqslant i-1$, g_2-дуга, исходящая из j, может входить только в вершину $(n/2)+j+1$ (см. рис. 4).

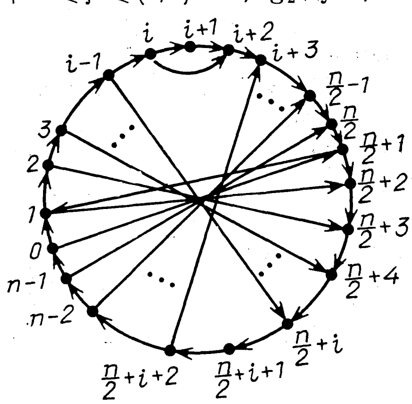

Рис. 4

Ясно, что g_2-дуга, входящая в вершину $(n/2)+i+1$, исходит из вершины $i+1$ либо $i+2$ (в противном случае, т. е. когда g_2-дуга исходит из вершины j, где $i+3 \leqslant j \leqslant n/2$, в Г существует контур длины, меньшей $n/2$).

Пусть в Г существует дуга $(i+2,\ (n/2)+i+1)$ либо $(i+1,\ (n/2)+i+1)$. Тогда, с учетом неравенства $n \geqslant 10$, g_2-дуга, исходящая из вершины $(n/2)+i+1$, не может входить в вершины i и $i+1$ (иначе бы в Г был контур длины 2 или 3). Следовательно, g_2-дуга, исходящая из вершины $(n/2)+i+1$, должна входить в вершину j, где $2 \leqslant j \leqslant i-1$. Поскольку в Г есть дуга $(i-1,\ (n/2)+i)$, получаем, что в Г есть контур длины, строго меньшей $n/2$.

Получили противоречие с предположением (2). Поэтому, справедливо (1), и

$$\Delta_{i_1}=\Delta_{i_2}=\Delta_{\max}=(n/2)+1.$$

Аналогично доказывается, что

$$\Delta_{i_j}=\Delta_{\max}=(n/2)+1$$

для всех $j=0,\ \ldots,\ n-1$.

Следовательно,

$$g_2=g^{n/2+1},$$

и лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть обе подстановки g_1, g_2 полноцикловые и*

$$\Delta_{\max}(g_2) < \begin{cases} n/2+1, & \text{если } n \text{ четное;} \\ (n+1)/2, & \text{если } n \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Тогда

$$g_2 = g^2.$$

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что $\Delta_{\max} = \Delta_{i_1}$. Докажем, что

$$\Delta_{\max} = \Delta_{\min} = 2. \tag{3}$$

Пусть t — такое наименьшее число, что

$$g_2^t(0) = i_t \in \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ i_1\} \tag{4}$$

(см. рис. 5). Так как $\Delta_{i_1} = \Delta_{\max}$, то

$$0 < i_1 < i_2 < \ldots < i_{t-2} < i_{t-1}.$$

Из полноцикловости g_2 следует, что $i_t \neq 0$, i_1. Рассмотрим контур Q_1 вида

$$(0,\ i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_{t-1},\ i_{t-1}+1,\ i_{t-1}+2,\ \ldots,\ n-1,\ 0)$$

и оценим сверху его длину l. Ясно, что

$$2 \leqslant \Delta_{\min} \leqslant \Delta_{i_j}, \qquad j = 2,\ \ldots,\ t.$$

Поэтому

$$l \leqslant 1 + 2^{-1}(n - \Delta_{i_1} - (\Delta_{i_t} - i_t)) - x + \Delta_{i_t} - i_t, \tag{5}$$

где x — целое, неотрицательное число. Ясно, что выражение, стоящее

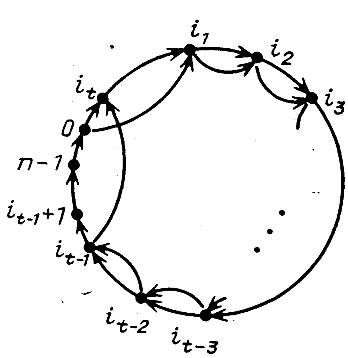

Рис. 5

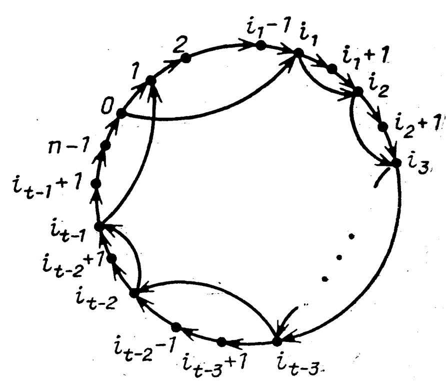

Рис. 6

в правой части (5), достигает своего максимума при

$$x = 0, \quad \Delta_{i_t} = \Delta_{i_1} = \Delta_{\max}, \qquad i_t = 1. \tag{6}$$

В этом случае

$$l \leqslant [1 + 2^{-1}(n - 2\Delta_{\max} + 1) + \Delta_{\max} - 1] =]n/2[.$$

Непосредственно проверяется, что $x = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\Delta_{i_j} = 2 \quad \text{при всех} \quad j = 2,\ \ldots,\ t-1,$$

если число $n - 2\Delta_{\max} + 1$ четное;

$$\Delta_{i_m} = 3,\ 2 \leqslant m \leqslant t-1, \text{ и } \Delta_{i_j} = 2 \text{ при } j = 2, 3, \ldots, m-1, m+1, \ldots, t-1, \tag{7}$$

если число $n - 2\Delta_{\max} + 1$ нечетное.

Поскольку $\Gamma \in G(n,\ 2,\ ]n/2[)$, то

$$l =]n/2[,$$

и в графе Γ выполнены условия (6) и (7) (см. рис. 6).

Ясно, что контур Q_2 вида $(1,\ 2,\ \ldots,\ i_1-1,\ i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_{t-1},\ 1)$ имеет, как и контур Q_1, длину, равную $]n/2[$. Поскольку $\Delta_1 = \Delta_{i_1} = \Delta_{\max}$, повторяя рассуждения, начиная с соотношения, аналогичного (4) для вершины i_{t-1} (вместо вершины 0), с учетом условия, аналогичного (7), получаем, что $g_2(1) - 1 \in \{2,\ 3\}$.

Если $g_2(1) < i_1$, то в Γ существует контур длины, меньшей, чем длина контура Q_2. Это противоречит условию $\Gamma \in G(n,\ 2,\ ]n/2[)$. Следовательно, $\Delta_{\max} \in \{2,\ 3\}$.

Пусть $\Delta_{\max} = 3$. Тогда $i_1 = 3$, $g_2(1) = 4$, $g_2(2) = 5$ и $g_2(3) = 6$. Поэтому с учетом выполнения условия (7) получаем, что $g_2(6) = 1$ и $\Delta_{\max} = \Delta_{\min} = 3$, $n = 8$ (см. рис. 7). Это противоречит условию $n \geqslant 10$. Значит $\Delta_{\min} = \Delta_{\max} = 2$.

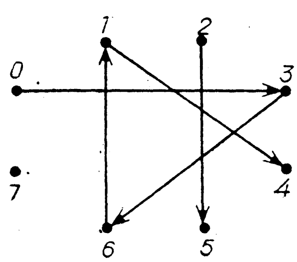

Рис. 7

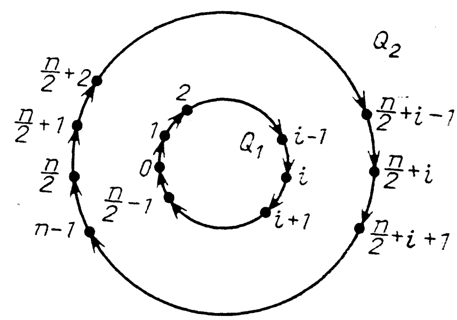

Рис. 8

2. Пусть хотя бы одна из подстановок g_1, g_2 имеет цикловую структуру $[(n/2)^2]$. Без ограничения общности можно считать, что

$$g_1 = (0\ 1\ 2\ \ldots\ (n/2)-1)\,(n/2\ (n/2)+1\ \ldots\ n-1)$$

(см. рис. 8). Так как обхват p графа Γ равен $n/2$, то g_2-дуги могут соединять между собой только вершины с разных контуров. Обозначим внутренний контур $(0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ (n/2)-1,\ 0)$ через Q_1, а внешний контур $(n/2,\ (n/2)+1,\ \ldots,\ n-1,\ n/2)$ через Q_2. Тогда возможны следующие случаи (см. рис. 9).

В графах, соответствующих рис. 9, *б*, *г*, *е* и *з* есть контуры длины 3 или 4. Тогда $n = 6$ или 8, что противоречит условию ($n \geqslant 10$ при четном n).

Графы, соответствующие рис. 9, *д* и *ж*, изоморфны.

Итак, осталось рассмотреть графы, соответствующие рис. 9, *а*, *в* и *д*.

2.1. Рассмотрим граф, соответствующий рис. 9, *а*. В этом случае g_2 — полноцикловая подстановка вида

$$g_2 = (0\ n/2\ 1\ (n/2)+1\ 2\ (n/2)+3\ \ldots\ (n/2)-1\ n-1)$$

и

$$g_1 = (g_2)^2.$$

Следовательно, перенумеровав вершины графа, получаем, что

$$g_2 = g, \quad g_1 = g^2.$$

2.2. Рассмотрим граф, соответствующий рис. 9 *в*. В зависимости от четности $n/2$ здесь возможны следующие варианты.

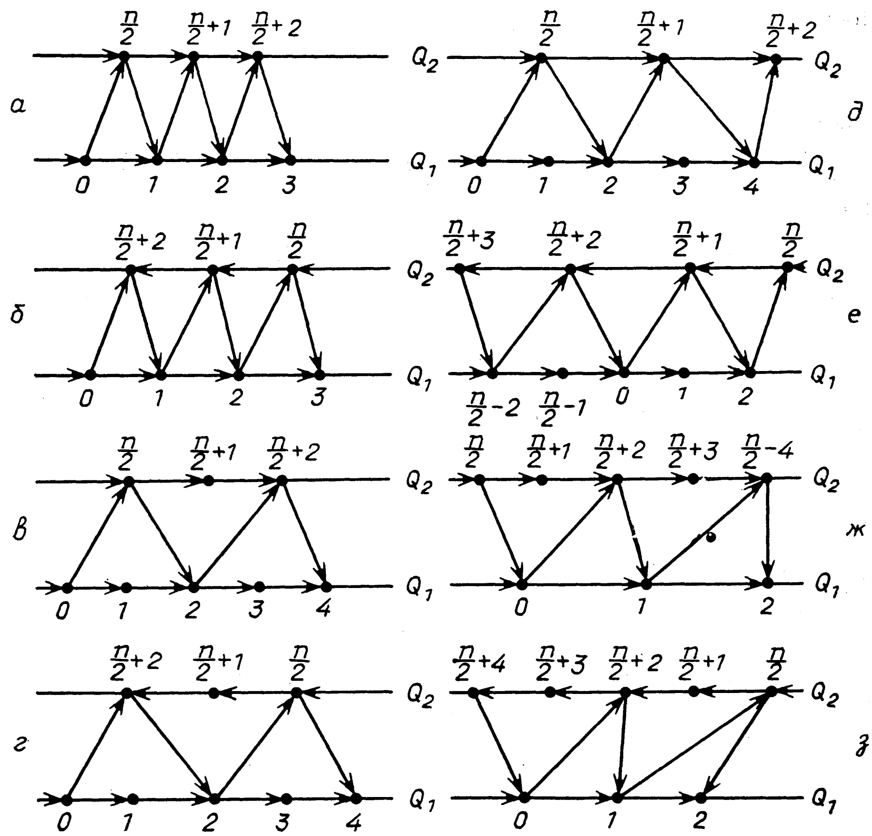

Рис. 9

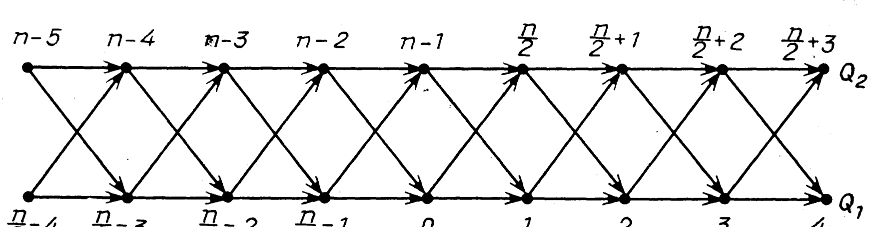

Рис. 10

2.2.1. $n/2$ нечетное. В этом случае g_2 — полноцикловая подстановка (см. рис. 10) вида

$$g_2 = (0\ n/2\ 2\ (n/2)+2\ 4\ (n/2)+4 \ldots (n/2)-3\ n-3\ (n/2)-1\ n-1\ 1\ (n/2)+1\ 3\ (n/2)+3\ \ldots\ n-4\ (n/2)-2\ n-2).$$

Непосредственно проверяется, что в этом случае

$$g_1 = (g_2)^{n/2+1}.$$

2.2.2 $n/2$ четное. В этом случае (см. рис. 10)

$$g_2 = (0\ n/2\ 2\ (n/2)+2\ 4\ (n/2)+4\ \ldots n-4\ (n/2)-2\ n-2)\cdot$$
$$\cdot(1\ (n/2)+1\ 3\ (n/2)+3\ 5\ (n/2)+5\ \ldots\ n-3\ (n/2)-1\ n-1).$$

Тогда матрицу смежности $A = \tilde{g}_1 + \tilde{g}_2$ графа Г можно представить в виде суммы двух подстановочных матриц $\tilde{g}^3+\tilde{g}_4$, соответствующих полноцикловым подстановкам

$$g_3=(0\ n/2\ (n/2)+1\ (n/2)+2\ \ldots\ n-3\ n-2\ n-1\ 1\ 2\ 3\ \ldots$$
$$\ldots\ (n/2)-2\ (n/2)-1),$$
$$g_4=(0\ 1\ (n/2)+1\ 3\ (n/2)+3\ \ldots\ n-3\ (n/2)-1\ n-1\ n/2\ 2\ (n/2)+2\ 4\ \ldots$$
$$\ldots\ n-4\ (n/2)-2\ n-2).$$

Непосредственно повторяется, что

$$g_4=(g_3)^{n/2+1}.$$

2.3. Рассмотрим граф, соответствующий рис. 9*д*.

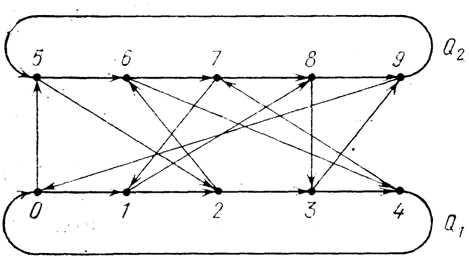

Рис. 11

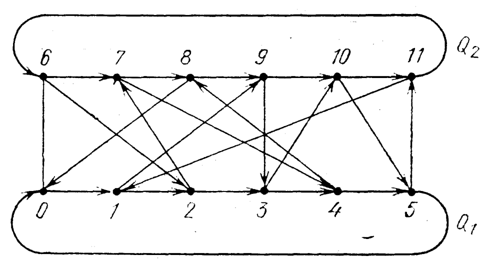

Рис. 12

2.3.1. Пусть $n/2$ — нечетное число. Тогда g_2 — полноцикловая подстановка вида

$$g_2=(0\ n/2\ 2\ (n/2)+1\ 4\ (n/2)+2\ 6\ \ldots\ (n/2)-1\ (3n-2)/4\ 1$$
$$((3n-2)/4)+1\ 3\ ((3n-2)/4)+2\ 5\ \ldots\ (n/2)-2\ n-1)$$

(пример при $n=10$ см. на рис. 11). В этом случае контур

$$Q_3=(0,\ 1,\ [(3n+2)/4,\ ((3n+2)/4)+1,\ ((3n+2)/4)+2,\ \ldots,\ n-2,\ n-1,\ 0)$$

имеет длину $((n-2)/4)+2$. Вместе с тем

$$((n-2)/4)+2<n/2$$

при $n\geqslant 10$. Противоречие.

2.3.2. Пусть $n/2$ — четное число. В этом случае

$$g_2=(0\ n/2\ 2\ (n/2)+1\ 4\ (n/2)+2\ 6\ (n/2)+3\ \ldots\ (n/2)-2\ (3n/4)-1)\cdot$$
$$\cdot(1\ 3n/4\ 3\ (3n/4)+1\ 5\ (3n/4)+2\ 7\ (3n/4)+3\ \ldots\ (n/2)-1\ n-1)$$

(пример при $n=12$ см. на рис. 12), а контур

$$Q_3=(1,\ 3n/4,\ (3n/4)+1,\ (3n/4)+2,\ (3n/4)+3,\ \ldots,n-2,\ n-1,\ 1)$$

имеет длину $(n/4)+1$. Так как

$$(n/4)+1<n/2$$

при $n\geqslant 10$, данный случай невозможен.

С учетом всех рассмотренных случаев теорема 1 доказана.

Замечание 5. Все графы из класса $G(n,\ 2,\ ]n/2[)$, за исключением графа $\Gamma_{8,\,4}$, гамильтоновы.

Рассмотрим подкласс $P(n,\ 2\ ]n/2[)\subseteq G(n,\ 2,\ ]n/2[)$ примитивных дихотомических графов. Напомним, что примитивным называется орграф Γ, для любой пары вершин которого i и j существует путь из i в j длины ρ. Наименьшее такое ρ обозначается $\gamma(\Gamma)$ и называется экспонентом графа Γ (еще одно название этого параметра — индекс примитивности). Ясно, что матрица A смежности примитивного графа Γ (которая называется также примитивной) обладает тем свойством, что в некоторой степени ρ становится строго положительной. Наименьшее такое ρ называется экспонентом матрицы и обозначается $\gamma(A)$. Очевидно, что $\gamma(A)=\gamma(\Gamma)$.

Лемма 6. *Пусть A — матрица размера $n\times n$ и*

$$A=\tilde{g}+\tilde{g}^t,$$

где $1<t<n$. Матрица A примитивна тогда и только тогда, когда

$$\text{НОД}(t-1,\ n)=1.$$

Если A примитивна, то

$$\gamma(A)=n-1.$$

Доказательство. Легко видеть, что скелет матрицы A^r при $r\geqslant 1$ совпадает со скелетом матрицы B, где

$$B=\sum_{s=0}^{r}(\tilde{g})^{r+s\,(t-1)} \tag{8}$$

(числа в показателе степени складываются и умножаются по модулю n).

С другой стороны, $B>0$ тогда и только тогда, когда среди показателей степеней в правой части (8) содержатся все числа из множества $\{0,1,\ldots,n-1\}$. Это эквивалентно выполнению двух условий

$$\text{НОД}(t-1,\ n)=1,\qquad r\geqslant n-1.$$

Теорема 7. *Если $\Gamma\in P(n,\ 2,\ ]n/2[)$ и $n\neq 6$, то*

$$\gamma(A)=n-1,$$

и для матрицы смежности A графа Γ существует подстановка g^* со свойством

$$(\tilde{g}^*)^{-1}A\tilde{g}^*=\tilde{g}+(\tilde{g})^t,$$

где $t=2$, если n четное ($n\neq 6$), и $t\in\{2,\ (n+1)/2\}$, если n нечетное, $n\geqslant 3$. Если $n=6$, то (см. рис. 1)

$$\{\Gamma_{6,1},\ \Gamma_{6,2},\ \Gamma_{6,4}\}=P(6,\ 2,\ 3),\qquad \gamma(\Gamma_{8,1})=5,\qquad \gamma(\Gamma_{8,2})=\gamma(\Gamma_{8,4})=4.$$

Доказательство следует непосредственно из теоремы 1 и леммы 6.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сачков В. Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики.— М.: Наука, 1982.
2. Behzad M. Minimal 2-regular digraphs with given girth//J. Math. Soc. Japan.— 1973.— № 5.— P. 1—6.

Статья поступила 25.09.89