Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. В. Лебедев, Асимптотика максимального числа занятых приборов в бесконечнолинейных системах,
Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 1996, номер 5, 95–98

https://www.mathnet.ru/vmumm2061

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.174
28 апреля 2025 г., 06:00:07

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 519.872

А. В. Лебедев

АСИМПТОТИКА МАКСИМАЛЬНОГО ЧИСЛА ЗАНЯТЫХ ПРИБОРОВ В БЕСКОНЕЧНОЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Будем рассматривать бесконечнолинейную систему с групповым поступлением: группы клиентов поступают в моменты событий пуассоновского потока, группа имеет размер $n \geqslant 1$ с вероятностью q_n. Промежутки между поступлениями, размеры групп и времена обслуживания клиентов независимы в совокупности. Пусть $\eta(t)$ — число занятых приборов в момент t, исследуем поведение максимума $\mathcal{M}(t) = \max_{\tau \in [0,t]} \eta(\tau)$. Предполагается, что средний размер группы и среднее время обслуживания конечны, а значит, процесс $\eta(t)$ — эргодический. Получим асимптотику роста $\mathcal{M}(t)$ при $t \to \infty$ в следующих трех случаях.

Теорема 1. *Если клиенты приходят по одному и время обслуживания имеет показательное распределение (система $M|M|\infty$), то* $\mathcal{M}(t)\dfrac{\ln\ln t}{\ln t} \xrightarrow{P} 1$.

Теорема 2. *Если* $q_n \sim Ca^{-n}$, $a>1$, *то*

$\mathcal{M}(t)/\log_a t \xrightarrow{P} 1.$

Теорема 3. *Если* $q_n \sim Cn^{-(1+\alpha)}$, $\alpha>1$, *то*

$\alpha \ln \mathcal{M}(t)/\ln t \xrightarrow{P} 1.$

Очевидно, $\eta(t)$ — регенерирующий процесс (в качестве моментов регенерации можно выбрать моменты, когда $\eta(t)$ обращается в нуль) с конечным средним периодом регенерации T. Пусть t_n — время первого входа $\eta(t)$ в $[n, +\infty)$, в дальнейшем называемого просто входом (для фиксированного n). Воспользуемся теоремой об асимптотике момента первого наступления редкого события в регенерирующем процессе [1], сформулированной для равномерно интегрируемого семейства распределений периодов регенерации в [2] (применение теоремы облегчается тем, что периоды вообще не зависят от параметра n). Получаем, что t_n имеет асимптотически показательное распределение при $n \to \infty$ с некоторым нормирующим множителем g_n, в качестве которого можно взять γ_n/T, где γ_n — вероятность входа на периоде регенерации.

Лемма 1. *Пусть $f(t)$ — бесконечно большая при $t \to +\infty$ функция, тогда из существования одного из пределов* $\lim_{t\to+\infty} P(\mathcal{M}(t) < f(t))$ *и* $\lim_{t\to+\infty} \exp(-g_{\lceil f(t)\rceil} t)$ *следует существование другого и они равны.*

Доказательство. При достаточно большом t имеем $f(t)>0$ и $P(\mathcal{M}(t)<f(t)) = P(t_{\lceil f(t)\rceil} > t) = P(g_{\lceil f(t)\rceil} t_{\lceil f(t)\rceil} > g_{\lceil f(t)\rceil} t)$. С учетом того, что $P(g_n t_n > x) \to e^{-x}$ при $n \to +\infty$, получаем утверждение леммы.

Далее будем обозначать $L_g(f) = \lim_{t\to+\infty} \exp(-g_{\ulcorner f(t) \urcorner} t)$, если этот предел существует.

Следствие леммы 1. *Если* $L_g((1+\varepsilon)f) = 1$, $L_g((1-\varepsilon)f) = 0$ $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, *то* $\mathcal{M}(t)/f(t) \xrightarrow{P} 1$, $t \to +\infty$.

Доказательство теоремы 1. Пусть входной поток имеет интенсивность λ, а среднее время обслуживания равно μ^{-1}; обозначим $\rho = \lambda/\mu$. Тогда $\eta(t)$ — процесс рождения и гибели с интенсивностями переходов $i(k\to k+1) = \lambda$, $i(k\to k-1) = \mu k$. Пусть τ_k — среднее время первого достижения k из $k-1$. В состояние $k+1$ из k впервые можно попасть либо скачком $k\to k+1$, либо скачком $k\to k-1$, далее из $k-1$ в k и из k в $k+1$. Из этих соображений получаем рекуррентные соотношения

$$\tau_{k+1} = \frac{1}{\lambda+\mu k} + \frac{\mu k}{\lambda+\mu k}(\tau_k + \tau_{k+1})$$

или

$$\tau_{k+1} = \frac{1}{\lambda}(\mu k \tau_k + 1), \quad \tau_1 = \frac{1}{\lambda}.$$

Отсюда

$$\tau_k = \frac{(k-1)!}{\lambda\rho^{k-1}} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{\rho^m}{m!} \sim e^{\rho} \frac{(k-1)!}{\lambda\rho^{k-1}}, \quad k\to\infty,$$

и в силу факториального роста слагаемых имеем

$$Mt_n = \sum_{k=1}^{n} \tau_k \sim \tau_n, \quad g_n \sim \frac{1}{Mt_n} \sim e^{-\rho} \frac{\lambda\rho^{n-1}}{(n-1)!}, \quad n\to+\infty.$$

Пользуясь формулой Стирлинга для факториала, можно показать, что $L_g((1+\varepsilon)\ln t/\ln\ln t) = 1$, $L_g((1-\varepsilon)\ln t/\ln\ln t) = 0$. Следовательно, $\mathcal{M}(t)\dfrac{\ln\ln t}{\ln t} \xrightarrow{P} 1$, $t\to+\infty$.

Теорема 1 доказана.

Для остальных случаев докажем следующую лемму.

Лемма 2. *Для всех* $n \geqslant 1$ *верны неравенства*

$$Q_n \leqslant \gamma_n \leqslant \lambda T \sum_{k=1}^{n} Q_k \pi_{n-k},$$

где $Q_n = \sum_{k=n}^{+\infty} q_k$, π_n — *стационарные вероятности процесса* $\eta(t)$.

Доказательство. Левое неравенство очевидно: вероятность входа на периоде регенерации не меньше вероятности входа при поступлении первой группы клиентов. Правое неравенство получаем, исходя из того, что вероятность входа не больше, чем среднее число входов на периоде регенерации ν_n. Средняя интенсивность потока входов I_n равна, с одной стороны,

$$I_n = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \sum_{k=1}^{n} Q_k P(\eta(\tau) = n-k)\lambda d\tau = \lambda \sum_{k=1}^{n} Q_k \pi_{n-k},$$

а с другой — $I_n=\nu_n/T$. Поэтому

$$\gamma_n \leqslant \nu_n = \lambda T \sum_{k=1}^{n} Q_k \pi_{n-k}.$$

Обозначим $w_n = \sum_{k=1}^{n} Q_k \pi_{n-k}$. Возьмем $g_n=\gamma_n/T$.

Следствия леммы 2. *Если* $L_w(f)=1$, *то* $L_g(f)=1$. *Если* $L_Q(f)=0$, *то* $L_g(f)=0$.

Рассмотрим производящие функции $q(s)$, $Q(s)$, $\pi(s)$, $w(s)$ последовательностей q_n, Q_n, π_n, w_n. Пользуясь свойствами пуассоновского процесса и независимостью обслуживания разных клиентов, легко получить формулу для производящей функции стационарного распределения:

$$\pi(s) = \exp\left\{\lambda \int_0^{+\infty} (q((1-\bar{B}(\tau))(s-1)+1)-1)\, d\tau\right\},$$

где $B(t)$ — функция распределения времени обслуживания. Заметим также, что

$$Q(s) = s\frac{1-q(s)}{1-s}, \quad w(s) = Q(s)\,\pi(s).$$

Доказательство теоремы 2. Используем тот факт, что радиус сходимости $R(w)$ совпадает с $R(q)=a>1$ (интегрирование здесь не вносит никаких особенностей). Поэтому $L_w((1+\varepsilon)\log_a t)=1$. С другой стороны, $Q_n \sim C_1 a^{-n}$, $n\to\infty$, и $L_Q((1-\varepsilon)\log_a t)=0$. Следовательно, $\mathscr{M}(t)/\log_a t \xrightarrow{P} 1$, $t\to+\infty$. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Введем класс аналитических функций

$$K = \left\{f(s) = \sum_{n=0}^{\infty+} f_n s^n : f_n \geqslant 0,\ R(f) \geqslant 1\right\}$$

и на нем семейство линейных функционалов $f^{(\alpha)} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha f_n$, $\alpha>0$ (если f — производящая функция ξ, то $f^{(\alpha)}=M\xi^\alpha$), разбивающее K на подклассы $K^\alpha=\{f\in K : f^{(\alpha)}<\infty\}$. Можно показать, что если $q\in K^\alpha$, то $w\in K^{\alpha-1}$ для $\alpha>1$.

Поскольку $q_n \sim Cn^{-(1+\alpha)}$, то в данном случае $q\in K^{\alpha-\varepsilon}$ и $w\in K^{\alpha-\varepsilon-1}$, поэтому $w_n = o(n^{-(\alpha-\varepsilon)})$, $L_w(t^{\frac{1}{\alpha-\varepsilon}}) = 1$. С другой стороны, $Q_n \sim C_2 n^{-\alpha}$, $n\to\infty$, и поэтому $L_Q(t^{\frac{1}{\alpha+\varepsilon}}) = 0$. Следовательно, $\alpha\frac{\ln \mathscr{M}(t)}{\ln t} \xrightarrow{P} 1$, $t\to+\infty$. Теорема 3 доказана.

В продолжение темы зададимся вопросом: нельзя ли с помощью некоторой нормировки получить для $\mathscr{M}(t)$ невырожденное предельное распределение? В первых двух случаях ответ на этот вопрос оказывается отрицательным.

Предположим, что $\lim\limits_{t\to+\infty} P(\mathcal{M}(t)<f(t))=L_g(f)=e^{-u}\in(0, 1)$. Тогда $g_{\ulcorner f(t)\urcorner}\sim u/t$, $t\to+\infty$. Заметим, что $q_n\sim\gamma_n/T$, а $\gamma_n=1-F(n-1)$, где $F(n)$ — распределение максимума на периоде регенерации. Согласно [3], чтобы выбрать последовательность n_m, такую, что $1-F(n_m)\sim c/m$, $m\to\infty$, необходимо выполнить требование $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-F(n)}{1-F(n-1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}=$ $=1$, откуда получаем, что радиус сходимости ряда $\gamma(s)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\gamma_n s^n$ равен единице. Тогда из оценки в лемме 2 следует, что $R(w)\leqslant R(\gamma)=1$. В первом и втором случаях это условие не выполняется ($R=\infty$ и $R=a>1$ соответственно). В третьем случае для решения вопроса требуются более точные оценки, чем в лемме 2.

Заметим, что специфика бесконечнолинейной системы использовалась только при выводе формулы для $\pi(s)$. Таким образом, наши рассуждения применимы к гораздо более широкому классу СМО с групповым поступлением и позволяют оценивать асимптотику максимального числа клиентов в системе через свойства входного потока и стационарного распределения числа клиентов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соловьев А. Д. Асимптотическое поведение момента первого наступления редкого события в регенерирующем процессе//Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1971. № 6. 79—89.
2. Афанасьева Л. Г., Булинская Е. В. Случайные процессы в теории массового обслуживания и управления запасами. М., 1980.
3. Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х. Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М., 1989.

Поступила в редакцию
25.11.94

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 5

УДК 553.1

А. М. Чернев

О МОДУЛЯХ С КОНЕЧНОЙ РАЗМЕРНОСТЬЮ ГОЛДИ И ОТНОСИТЕЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТЬЮ КРУЛЛЯ

В теории колец важную роль играют размерности Голди и Крулля. В настоящей работе они изучаются с помощью техники теории кручений, что позволило ослабить условие теоремы 1.2 из [1]. Кроме этого доказывается относительный вариант теоремы 2.2 из [1].

Пусть τ — кручение (см. [2, 3]). Обозначения в основном соответствуют [3] за исключением следующих: $[N]^c_M=\{x\in M:(N:x)\in L_\tau\}$ — τ-замыкание N в M; $C_\tau(M)$ — множество всех τ-замкнутых (т. е. $[N]^c_M=N$) подмодулей модуля M. Если M — τ-полупростой модуль, то τ-цоколем ($\mathrm{Soc}_\tau M$) называется сумма всех его τ-критических подмодулей. Кручение называется нетеровым, если объединение τ-замкнутых подмодулей M, образующих возрастающую цепь, τ-замкнуто в M.

Любой подмодуль какого-нибудь фактормодуля модуля M будем для краткости называть подфактором M. Фактор M будем иногда на-