

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Шемякин, Об одном эффекте сложного нагружения,  
*Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1996,  
номер 5, 32–38

<https://www.mathnet.ru/vmumm2049>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.83

26 апреля 2025 г., 20:18:33



УДК 539

Е. И. Шемякин

ОБ ОДНОМ ЭФФЕКТЕ СЛОЖНОГО НАГРУЖЕНИЯ

А. А. Ильюшин первым обратил внимание на необходимость учета истории нагружения при определении «уравнений состояния» твердых тел [1]. Тем самым в программу исследований свойств твердых деформируемых тел были введены требования к основным связям между напряжениями и деформациями, точнее между приращениями этих величин

$$\Delta \varepsilon_{ij} = C_{ijkl} \Delta \sigma_{kl}, \tag{1}$$

$\sigma_{k,l}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  — напряжения и деформации, а  $C_{ijkl}$  — тензор четвертого ранга, который необходимо определять в каждый момент истории нагружения или деформации. Величины  $C_{ijkl}$  — функционалы, функции или константы в зависимости от сложности процесса деформирования. В анизотропной упругой среде это константы, в случае пропорционального изменения  $\Delta \sigma$  (или  $\Delta \varepsilon$ ) это простые функции инвариантов напряженного (или деформированного) состояния. В общем случае величины  $C_{ijkl}$  определяются процессом нагружения (или деформирования), поскольку на каждом шаге изменения нагрузки (или деформаций) на элементе твердого тела изменяется его реакция (готовность?) на следующее догружение (или приращение деформаций).

В пространстве нагружений (девятимерное, шестимерное или пятимерное пространство напряжений) должны быть указаны траектории (пути) нагружения, ибо в противном случае соотношения (1) являются неголономными связями и поведение материала на последующих шагах нагружения (деформирования) неизвестно.

В этом состоит существенное отличие поведения твердых деформируемых тел от поведения идеально упругих после того, как инварианты напряженно-деформированного состояния достигают некоторых значений. Действительно, в упругом теле существование упругого потенциала есть необходимое и достаточное условие независимости достигнутого состояния (напряжения, деформации, температуры) от пути нагружения (или деформации) для изотермических и адиабатических процессов (теорема Кельвина). Этот результат оказывает доминирующее влияние на построение теории необратимых деформаций.

С другой стороны, развитие моделей идеальной жидкости (сжимаемой или несжимаемой) приводит к построению математических моделей сплошной среды, в которых история нагружения (или деформирования) затусшевана.

Эти два замечания подчеркивают роль предложений А. А. Ильюшина об учете влияния истории нагружения (или деформирования) на конструирование «уравнений состояния» твердых тел или, точнее, на построение определяющих соотношений в теории деформирования твердых тел.

Сформулируем эту идею в техническом виде: если неизвестна история нагружения твердого тела (прокат, обжиг, обработка любым термическим или механическим, физико-химическим способом), неизвестна тем самым и реакция на последующие механические и тепловые нагрузки. Это, казалось бы, простое с технической точки зрения

утверждение является основой построения теории деформирования твердых тел за пределом упругости (теория необратимых деформаций).

Отметим, что А. А. Ильюшин одним из первых обратил внимание на следующую особенность деформирования. Какой путь догружения следует избрать при построении определяющих соотношений — по заданию приращений напряжений от достигнутого состояния или по заданию приращений деформаций? В ответ на это были созданы первые машины с программами по деформациям. В последующие годы создание широкого спектра испытательных машин с сервоуправлением, особенно с жестким нагружением (программа догружений по деформациям), оказалось чрезвычайно полезным для исследований особенностей поведения материала по достижении пиковых значений по напряжениям. Фактически, развитие этого этапа работы следует из первых идей А. А. Ильюшина.

1. Эта заметка не претендует на общность позиции. Более того, сам термин «сложное нагружение» требует точного определения, что не входит в планы автора (ни критика, ни предложения). Остается ограничиться примерами, которые (хотелось бы) будут хорошей основой для дискуссии.

В общем описании напряженного (или деформированного) состояния в элементе сплошной среды с помощью трех величин главных напряжений

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (2)$$

и трех соответствующих главных направлений можно условно указать следующую классификацию напряженных и деформированных состояний, которая позволяет отличить сложное нагружение от всех других.

Например, если все величины главных напряжений изменяются в исследуемом элементе сплошной среды пропорционально одной и той же величине (например, растут со временем  $t$ ). Такое изменение состояния трудно отличить от нелинейно упругого, и, естественно, для этого состояния справедливы простые обобщения теоремы Кельвина. Обычно такое изменение состояния в элементе, особенно если оно связано с монотонным изменением напряжений и деформаций, принято считать простым или пропорциональным. В настоящее время доказаны утверждения о справедливости этих результатов. Этот класс с практической точки зрения очень важен, например теория малых упругопластических деформаций в широком смысле — и в плане исследований, и в плане приложений.

Второй пример. Пусть при неподвижных главных направлениях величины напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  изменяются непропорционально, причем знаки неравенств в (2) могут нарушаться. Обычно принято такое состояние для элемента сплошной среды считать отличным от пропорционального, простого. В общем случае это понятно. Но если связывать развитие необратимых деформаций (пластичность, ползучесть, релаксация) с изменением касательных напряжений и деформаций [2], то надо выделить в этом примере такие изменения напряжений и деформаций, которые не ведут к нарушению нагружения (или роста деформаций сдвига на главных площадках). Таким образом, при неподвижных главных направлениях можно указать расширение понятия пропорционального (простого для элемента среды) нагружения, которое, естественно, не требует введения сложного нагружения.

Надо отметить, что именно по этому пути пошли ученые в Сибирском отделении РАН, когда сконструировали [3, 4] или усовершенст-

вовали [5] установки для исследований «простого» (в отличие от сложного) нагружения сплошных сред за пределом упругости, т. е. для изучения необратимых деформаций (пластичность и ползучесть твердых тел).

Что же является тогда сложным нагружением? Какие классы нагружений надо указать, в отличие от простых, чтобы прояснить особенности поведения твердых тел, необходимые для произвольных нагружений? Можно ли доказать полноту классов нагружений в этом смысле?

Наиболее трудным является вопрос: как изменяются свойства твердых деформируемых тел, если в ходе нагружения (или деформирования) поворачиваются главные направления тензора напряжений (и тензора деформаций, что естественно)? С точки зрения полной классификации вероятных догружений, необходимо было бы рассмотреть одновременное изменение  $\sigma_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) и поворот главных направлений. Но мы остановимся пока на примере догружения с поворотом осей при сохранении соответствующих величин главных напряжений (или деформаций).

2. Для исследования свойств твердых деформируемых тел при нагружении с поворотом осей был изобретен специальный прибор [3]. На основе метода эквивалентных материалов [3, 5] был воспроизведен ряд материалов (упругие, вязкие, пластичные), которые подверглись испытанию в приборе «сложного нагружения».

В цилиндрическую оболочку, слабо сопротивляющуюся деформированию, был помещен испытуемый материал, который условно уподобили элементу деформируемого тела. Жесткий шаблон охватывал оболочку и поворачивался вокруг оси цилиндра по заданной программе, так что испытуемый материал попеременно подвергался сжатию в одном направлении и растяжению в перпендикулярном, при этом изменение плоского объема было равно нулю.

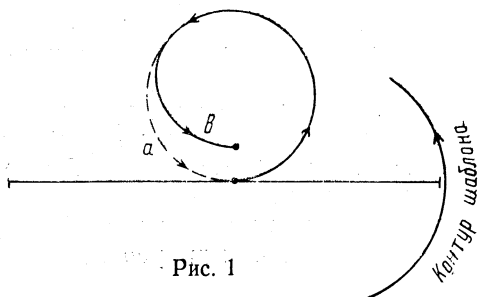
Таким образом, можно считать, что в рассматриваемом «элементе» испытуемой сплошной среды реализуется следующее деформированное состояние:

$$\Delta \varepsilon_1 + \Delta \varepsilon_3 = 0, \quad \Delta \varepsilon_2 = 0, \quad (3)$$

так как изменение объема, если и происходит, то только на первых оборотах за счет переупаковки и, возможно, дилатансии; при этом изменение объема измеряется величиной  $\Delta \varepsilon_2$ , которая мала в связи с плоской деформацией материала образца. Это изменение деформаций отвечает одному из возможных случаев сложного нагружения, когда при деформировании, вызванном поворотом жесткого шаблона, все инварианты тензора приращений деформаций остаются постоянными, а изменяется только положение главных осей тензора деформаций вследствие поворота главных осей относительно материала. Можно считать этот вариант деформирования достаточно ярким примером сложного нагружения [1, 3], даже и не определяя величин напряжений на каждом шаге деформаций.

Укажем некоторые основные (с нашей точки зрения) выводы из сделанных наблюдений.

Первый связан с траекторией движения некоторой внутренней точки элемента (рис. 1). На каждом шаге (поворот жесткого шаблона



на малый угол) имеет место приращение деформаций (3): накопление этих приращений либо обратимо — замкнутая траектория (*a*), либо необратимо — траектория разомкнута, так что наблюдается остаточное перемещение точки (*b*). В опытах установлено, что случай (*a*) или (*b*) связан, естественно, с диссипацией энергии деформирования в среде: упругий материал приводит к случаю (*a*), а любая диссипативная среда (вязкость, трение) — к случаю (*b*).

По-видимому, этот эффект накопления остаточных перемещений (или деформаций) имеет то же объяснение и ту же природу, что и след запаздывания в теории А. А. Ильюшина, хотя непосредственное сравнение еще не выполнено.

Второй вывод, вообще говоря, следует из первого, но на нем следует остановиться ввиду необычности полученных результатов. Накопление остаточных перемещений при повороте эллиптического шаблона отражается в целом на перемещении материальных точек внутри «элемента» (рис. 2, *a—d*). Движение точек, расположенных первоначально на прямой (пусть эта прямая — ось эллипса шаблона), и остаточные перемещения приводят к тому, что в новом расположении точки размещаются на кривых, которые с ростом числа оборотов превращаются в отрезки спиралей. Для указанных точек эти спиральные отрезки заканчиваются в концах большой оси эллипсов на поверхности шаблона. В это же движение вовлечены все внутренние точки элемента, что и определяет основной физический эффект, вызванный поворотом осей тензора приращений деформаций (и тензора деформаций, следовательно).

Этот эффект поворота осей при деформировании твердых тел привлек внимание к ряду прикладных задач: 1) о технологии прессования материалов с помощью поворота главных осей напряженно-деформированного состояния при нагружении силами или перемещениями, 2) о движении внутренних масс Земли (и планет) под действием сил тяготения, которые тоже приводят к сложному нагружению с поворотом осей [3—6].

По мнению автора, эффекты сложного нагружения встречаются и в задачах хрупкого разрушения [7]. В этих задачах поворот осей тензора деформаций, например, предваряет разделение тела на части при практически неизменных напряжениях. Первые примеры таких задач указывают на перспективность методов решения, связанных существенно со сложным нагружением.

3. В заключение вернемся к анализу напряженно-деформированного состояния в элементе среды, подвергнутой догрузению посредством чистого сдвига (3) так, что

$$\Delta\Gamma = 2\Delta\varepsilon_1, \quad \Delta\varepsilon_2 = 0, \quad \mu_{\Delta\varepsilon} = 0,$$

где

$$\mu_{\Delta\varepsilon} = \frac{2\Delta\varepsilon_2 - (\Delta\varepsilon_1 + \Delta\varepsilon_3)}{\Delta\varepsilon_1 - \Delta\varepsilon_3} = 0.$$

Материал с диаграммой  $T-\Gamma$ , указанной на рис. 3, в точке *A* подвергается догрузению  $\Delta\Gamma > 0$  с поворотом осей тензора приращений деформаций, что приводит и к повороту осей тензора деформаций. Обратим внимание на то, что предыдущее деформирование уже совершалось с поворотом главных осей всех тензоров: напряжений, приращений деформаций и самих деформаций. Так что, во-первых, диаграмма рис. 3 связывает величины  $T$  и  $\Gamma$ , действующие физически в разных плоскостях, проходящих через второе главное направление и об-

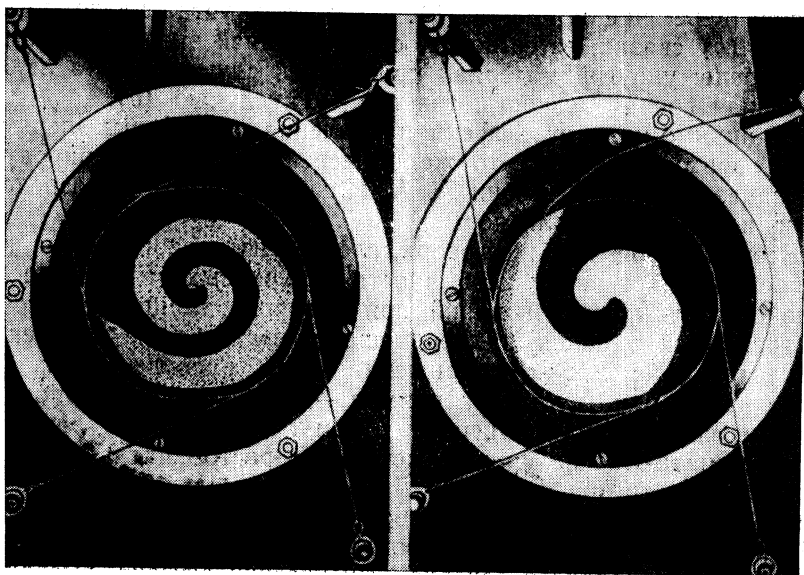


Рис. 2, с, d

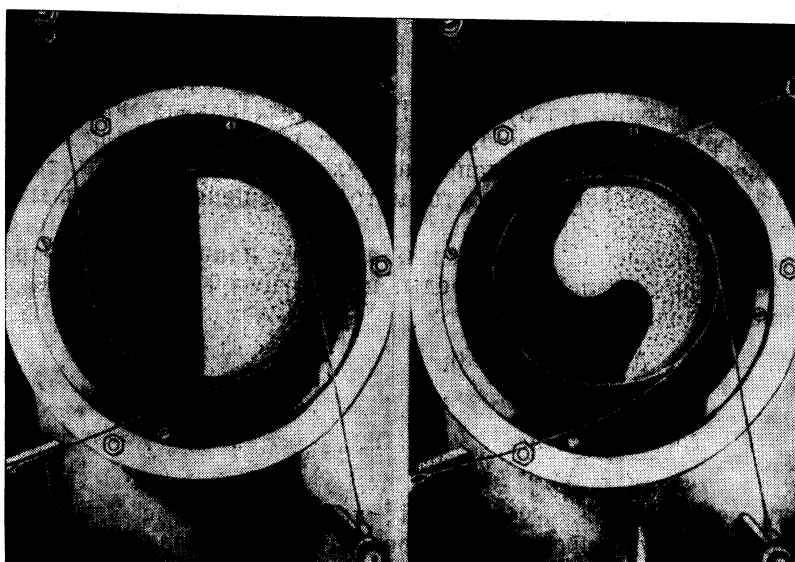
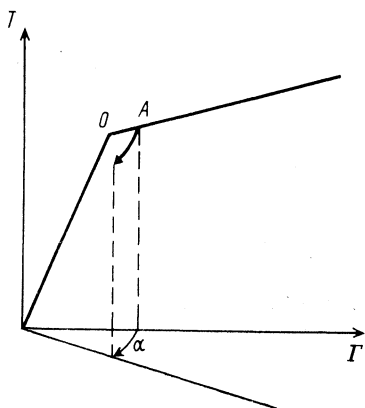


Рис. 2, а, б

разующих угол  $\alpha$ , где  $\alpha$  — угол разности тензоров напряжений и деформаций.

Рассмотрим плоское изображение траекторий деформирования и догружения, чтобы проиллюстрировать основные эффекты сложного нагружения в данном примере (рис. 2), при этом используем обозначение, введенное ранее в [2] (см. рис. 4).



—Рис. 3

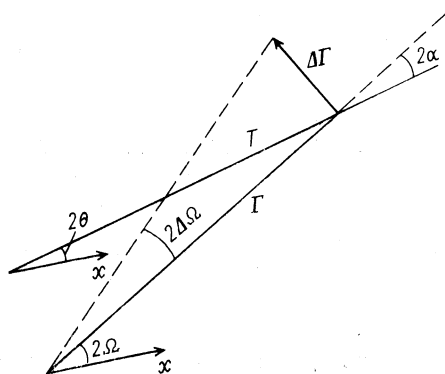


Рис. 4

Здесь углы  $\theta$  (тензор напряжений) и  $\Omega$  (тензор деформаций) отсчитываются от некоторого начального положения оси  $x$ , выбранной в материале в тот момент догружения, когда площадки  $T$  и  $\Gamma$  совпадали (точка  $O$  на диаграмме  $T-\Gamma$ ).

Вследствие особенностей диаграммы  $T-\Gamma$  ( $T/\Gamma < \mu$ ) всегда  $\theta < \Omega$ , что почти очевидно, но редко учитывается при описании эффектов сложного нагружения. Это означает, что при монотонном повороте осей главные оси тензора деформаций поворачиваются быстрее (на больший угол), чем главные оси тензора напряжений. И только для изотропных, первоначально упругих материалов главные оси тензоров поворачиваются согласованно. Рост угла разности тензоров не безграничен, если учесть, что напряжения могут увеличиваться по сравнению с упругими лишь незначительно ( $\sim 20-30\%$  при упрочнении), в то время как деформации могут в принципе возрасти в несколько (десятки) раз.

При повороте осей в рассматриваемом эксперименте увеличения главного сдвига не наблюдается, так как все изменения  $\Gamma$ , а именно  $\Delta\Gamma = 2\Delta\epsilon$ , происходят только за счет поворота осей

$$\Delta\Gamma = 2\Gamma\Delta\Omega,$$

так что на каждом шаге  $\Delta\Gamma$  просто пропорционально углу поворота главных осей тензора деформаций.

Не обсуждая в этой заметке особенностей поведения материалов при разгрузке и самого понятия «разгрузка» после деформирования с поворотом осей, отметим, что напряжение  $T$  может также оставаться постоянным, а изменение напряженно-деформированного состояния в точке характеризуется только ростом  $\alpha$  при монотонном нагружении.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильюшин А. А. Пластичность. Уругоупругие деформации. М., 1948.
2. Христианович С. А., Шемякин Е. И. О плоской деформации пластического материала при сложном нагружении//Изв. АН СССР. Механ. твердого тела. 1969. № 5.

3. Ревуженко А. Ф., Бобряков А. П., Шемякин Е. И. О возможном механизме перемещения масс Земли//Докл. АН СССР. 1983. № 5. 1097—1099.
4. Ревуженко А. Ф. Один класс сложных нагружений неупругой среды//Прикл. матем. и теор. физ. 1986. № 5. 150—158.
5. Бобряков А. П., Ревуженко А. Ф., Шемякин Е. И. Приливное деформирование планет: опыт экспериментального моделирования//Геотектоника. 1991. № 6. 21—35.
6. Ревуженко А. Ф., Шемякин Е. И. Моделирование перемещений внутренних масс Земли//Междунар. конф. Тессалоники (Греция), август 1990: Тез. конф.
7. Шемякин Е. И. Задача о хрупком шарнире//Изв. АН СССР. Механ. твердого тела. 1996. № 2.

Поступила в редакцию  
05.05.96

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 5

УДК 539.4

Д. Л. Быков, В. С. Дельцов, Д. Н. Коновалов

### О ВЛИЯНИИ ГРАДИЕНТОВ НАПРЯЖЕНИЙ НА РАЗРУШЕНИЕ УПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ

Известно, что в условиях существенно неоднородного напряженного состояния разрушающие напряжения могут заметно превосходить значения, получаемые при испытаниях образцов, в которых реализуются однородные напряженные состояния. В работе [1] был предложен образец, позволяющий воспроизводить в цилиндрическом слое исследуемого материала достаточно широкий спектр напряженных состояний как по их виду (соотношению главных напряжений), так и по степени неоднородности полей напряжений. В настоящей работе излагается подход к оценке разрушающих напряжений в зоне их концентрации, основанный на результатах, полученных до разрушения указанного образца. В качестве исследуемого материала был выбран мелкопористый пенопласт марки Рипор-2Н, обладающий следующими стандартными прочностными характеристиками: разрушающее напряжение при одноосном растяжении  $\sigma_c = 2,4$  кгс/см<sup>2</sup>; разрушающая деформация при одноосном растяжении  $\epsilon_c = 5\%$ . Диаграмма одноосного растяжения этого материала весьма близка к линейной вплоть до момента разрушения. Различие в величинах начального модуля диаграммы и секущего модуля в точке разрушения не превышает 13%.

На рис. 1 изображена конструкция образца, который представ-

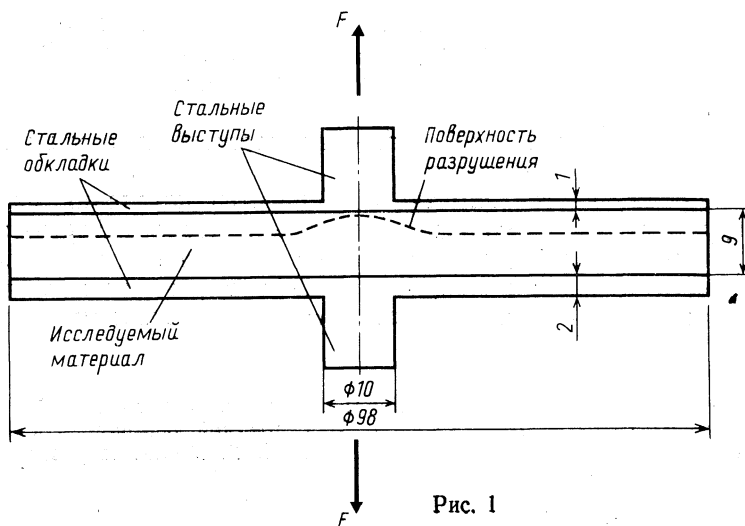


Рис. 1