Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. А. Цурко, Разностные методы для задач конвекции-диффузии с разрывными коэффициентами и решениями,

Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 2, 274–280

https://www.mathnet.ru/de11234

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.172
26 апреля 2025 г., 07:16:45

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 2, с. 274–280

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.63

РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ЗАДАЧ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И РЕШЕНИЯМИ

© 2005 г. **В. А. Цурко**

В работе строятся и исследуются разностные схемы для линейных нестационарных краевых задач. Предполагается, что на фиксированных по времени границах коэффициенты имеют разрывы первого рода, допускается наличие и разрыва решений.

Уравнения диффузии с разрывом решения описывают, например, процесс миграции легированных атомов при производстве многослойных полупроводниковых элементов интегральных схем [1, 2]. Такого рода элементы с субмикронными размерами активных областей характерны для современного уровня технологий микроэлектроники. Подробно физико-математические постановки такого рода задач рассмотрены в [3–5], существование и единственность решения краевых задач исследованы в [6]. Большие значения концентраций примесей приводят к возникновению упругих напряжений кристаллической решетки полупроводника. Влияние напряжений на диффузию атомов учитывается в основном уравнении конвективным членом в дивергентной форме [7]. Различные постановки задач, разностные схемы для достаточно гладких задач конвекции-диффузии рассмотрены и исследованы в [8]. Численный метод решения одномерных задач нестационарной диффузии с разрывными решениями без учета конвекции построен и обоснован в [9]. Экономичные разностные схемы для многомерных задач с разрывными коэффициентами без конвективных слагаемых и непрерывным решением исследованы в [10, 11].

Рассмотрим задачу в следующей постановке. Требуется найти решение уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k\,\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + pu\right) + qu + f$$

с начальными и краевыми условиями $u(x,0) = \psi(x)$, $u(x,t)|_{S_t} = \mu(x,t)$, где S_t – боковая граница области изменения пространственных переменных, коэффициенты $k = k(x) = k(x_1, x_2, \ldots, x_m) > 0$, $p = p(x) = p(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $q = q(x) = q(x_1, x_2, \ldots, x_m) < 0$ и $f = f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ имеют разрывы первого рода. Подробно рассмотрены алгоритмы для одномерных и трехмерных задач. Предполагаем, что в трехмерном случае поверхностью разрыва является плоскость и оси координат выбраны так, что нормаль $\mathbf{n}$ к границе раздела перпендикулярна одной из координатных плоскостей. На границе разрыва коэффициентов поток непрерывен

$$\left[k\,\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + pu\right] = 0,$$

а решение разрывно – отношение предельных значений решения справа и слева вдоль нормали является некоторой величиной $\varkappa$.

В работе будем использовать обозначения, принятые в [12].

1. Априорные оценки точности для одномерных задач. Предположим, что условия физического процесса позволяют моделировать его следующей задачей. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\,\frac{\partial u}{\partial x} + p(x)u\right) + q(x)u + f(x) \tag{1}$$

в области $G = G_1 \cup G_2$, $G_1 = [0 < x < \xi] \times [0 < t \le T]$, $G_2 = [\xi < x < 1] \times [0 < t \le T]$. Здесь $x = \xi$ – точка разрыва коэффициентов и решения, которые в областях G_1 и G_2 обладают необходимой по ходу изложения гладкостью. Условия сопряжения имеют вид

$$\left[k\frac{\partial u}{\partial x}+pu\right]=0 \quad \text{при} \quad x=\xi, \quad \frac{u(\xi-0,t)}{u(\xi+0,t)}=\varkappa, \quad \varkappa>0, \quad 0\le t\le T. \tag{2}$$

Пусть заданы граничные условия первого рода и начальное условие

$$u|_{x=0}=\varphi_1(t), \quad u|_{x=1}=\varphi_2(t), \quad u(x,0)=\psi(x). \tag{3}$$

Предположим, что условия разрыва, начальные и краевые для задачи (1)–(3), согласованы. Построим разностную схему для рассматриваемой задачи и алгоритм нахождения приближенного решения. В области G введем неравномерную по x и t сетку $\Omega=\Omega_h\times\Omega_\tau:\ \Omega_h=\{x_i,\ i=\overline{0,N},\ x_0=0,\ x_N=1,\ h_i=x_i-x_{i-1}\}$, $\Omega_\tau=\{t_j,\ j=\overline{0,j_0},\ t_0=0,\ t_{j_0}=T,\ \tau_j=t_j-t_{j-1}\}$. Очевидно, всегда можно построить сетку Ω_h так, чтобы точка $x=\xi$ была ее узлом.

При решении практических задач в случае достаточно гладкого решения целесообразно выбирать в областях G_1 и G_2 равномерные шаги h_1 и h_2 соответственно и, исходя из положения точки $x=\xi$, число узлов находить из предположения $h_1\approx h_2$. Обоснования разностных схем на неравномерных сетках для данной задачи не носят принципиального характера, и в дальнейшем для наглядности исследования во всей области G сетку по x и t будем считать равномерной, полагая $x_i-x_{i-1}=h,\ i=\overline{1,N}$, и $t_j-t_{j-1}=\tau,\ j=\overline{1,j_0}$. Значение x в точке $x=\xi$ обозначим через x_ξ, а соответствующий номер узла – через $N_\xi,\ 1<N_\xi<N-1$.

Введем сетки узлов $\Omega^1,\ \Omega^2$ и $\Omega^{1,2}$, где $\Omega^1=\Omega_1\times\Omega_\tau,\ \Omega^2=\Omega_2\times\Omega_\tau,\ \Omega^{1,2}=\Omega^1\cup\Omega^2$, $\Omega_1=\{x_i=ih,\ i=\overline{1,N_\xi-1}\}$, $\Omega_2=\{x_i=ih,\ i=\overline{N_\xi+1,N-1}\}$.

Пусть $y=y_i^j$ – приближенное значение точного решения u в узле (x_i,t_j). Используя, например, интегро-интерполяционный метод, аппроксимируем уравнение (1) неявной разностной схемой

$$y_{\bar t}=(ay_{\bar x})_x+(p\breve y)_{\overset{\circ}{x}}+qy+f, \quad (x,t)\in\Omega^{1,2}. \tag{4}$$

На границе раздела областей G_1 и G_2 из условий (2) и (1) получаем

$$0.5\,h(y_{\bar t}^{\text{л}}+y_{\bar t}^{\text{п}})|_{N_\xi}=(ay_{\bar x})|_{N_\xi+1}-(ay_{\bar x})|_{N_\xi}+0.5\,h((p\breve y_{\bar x})|_{N_\xi}+(p\breve y)_x|_{N_\xi}+(q^{\text{л}}y^{\text{л}}+q^{\text{п}}y^{\text{п}}+f^{\text{л}}+f^{\text{п}})|_{N_\xi}), \tag{5}$$

$$y_{N_\xi}^{\text{л}}/y_{N_\xi}^{\text{п}}=\varkappa, \quad t\in\Omega_\tau. \tag{6}$$

Здесь $a=a_i=0.5(k(x_i)+k(x_{i-1})),\ i=\overline{1,N},\ y_{N_\xi}^{\text{л}},\ y_{N_\xi}^{\text{п}}$ – приближенные значения точного решения u в узле x_ξ для областей G_1 и G_2 соответственно (аналогичные обозначения приняты и для коэффициентов); $y_{\bar x,N_\xi}=(y_{N_\xi}^{\text{л}}-y_{N_\xi-1})/h,\ y_{\bar x,N_\xi+1}=(y_{N_\xi+1}-y_{N_\xi}^{\text{п}})/h$.

Нетрудно видеть, что при достаточной гладкости решения в областях G_1 и G_2 локальная погрешность аппроксимации соотношений (4) и (5) равна $O(h^2+\tau)$.

Краевые и начальные условия аппроксимируем точно:

$$y_{0,j}=\varphi_1, \quad y_{N,j}=\varphi_2, \quad j=\overline{0,j_0},$$

$$y_{1,0}=\psi_1,\ \ y_{2,0}=\psi_2,\dots,\ \ y_{N_\xi,0}^{\text{л}}=\psi_{N_\xi}^{\text{л}},\ \ y_{N_\xi,0}^{\text{п}}=\psi_{N_\xi}^{\text{п}},\dots,\ \ y_{N-1,0}=\psi_{N-1},\ \ \psi_{N_\xi}^{\text{л}}/\psi_{N_\xi}^{\text{п}}=\varkappa. \tag{7}$$

Для получения удобной для расчетов схемы исключим из системы (4)–(7) одно из неизвестных $y_{N_\xi}^{\text{л}}$ или $y_{N_\xi}^{\text{п}}$. Учитывая соотношение (6), для вектора $y=(y_0,y_1,\dots,y_{N_\xi-1},y_{N_\xi}^{\text{п}},y_{N_\xi+1},\dots,y_N)$ построим следующую задачу. В приграничных слева к точке x_{N_ξ} узлах имеем

$$y_{\bar t,N_\xi-1}=h^{-2}(a_{N_\xi}(\varkappa y_{N_\xi}^{\text{п}}-y_{N_\xi-1})-a_{N_\xi-1}(y_{N_\xi-1}-y_{N_\xi-2}))+$$
$$+0.5h^{-1}((p\varkappa\breve y^{\text{п}})|_{N_\xi}-(p\breve y)|_{N_\xi-2})+(qy+f)|_{N_\xi-1}, \quad t\in\Omega_\tau. \tag{8}$$

Равенство (5) преобразуем к виду

$$0.5\,h(\varkappa+1)y_{\bar t\,N_\xi}^{\text{п}}=h^{-1}(a_{N_\xi+1}(y_{N_\xi+1}-y_{N_\xi}^{\text{п}})-a_{N_\xi}(\varkappa y_{N_\xi}^{\text{п}}-y_{N_\xi-1}))+$$

$$+0.5((p\check{y})|_{N_\xi+1} - (p^{\text{п}}\check{y}^{\text{п}})|_{N_\xi} + \varkappa(p^{\text{л}}\check{y}^{\text{п}})|_{N_\xi} - (p\check{y})|_{N_\xi+1} + h(y^{\text{п}}(q^{\text{п}} + \varkappa q^{\text{л}})|_{N_\xi} + f^{\text{л}}_{N_\xi} + f^{\text{п}}_{N_\xi})). \quad (9)$$

К полученным соотношениям добавляем условия (7), исключая при этом значение $y^{\text{л}}_{N_\xi}$.

Непосредственно находить решение построенной задачи, например, методом немонотонной прогонки нецелесообразно, проблематично получить для него и априорные оценки. Записав разностную схему (4), (7)–(9) в виде системы алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей и умножив первые N_ξ ее столбцов на величину $\varkappa$, получим систему уравнений

$$Ay^* = F. \quad (10)$$

Для компонент вектора y^* имеем

$$y^*_i = y_i/\varkappa, \quad i = \overline{0, N_\xi - 1}, \quad y^*_i = y_i, \quad i = \overline{N_\xi, N}. \quad (11)$$

Нетрудно проверить, что матрица A имеет доминирующую диагональ при любых значениях τ и h и решение задачи (10) можно находить любым методом прогонки [12]. Оценим разность z между значением y, получаемым по алгоритму (10), (11), и точным решением: $z = u - y$.

Аналогично вектору y^* введем вектор z^*, для которого имеем задачу

$$\frac{\varkappa z^* - \check{z}}{\tau} = (\tilde{a}z^*_{\bar{x}})_x + (\tilde{p}\check{z}^*)_{\overset{\circ}{x}} + \tilde{q}z^* + R_1, \quad (x,t) \in \Omega^1, \quad (12)$$

$$0.5(1+\varkappa)z^*_{\bar{t}}|_{N_\xi} = h^{-2}(a_{N_\xi+1}(z^*_{N_\xi+1} - z^*_{N_\xi}) - \tilde{a}_{N_\xi}(z^*_{N_\xi} - z^*_{N_\xi-1})) +$$
$$+0.5((p\check{z}^*)_{\bar{x}}|_{N_\xi+1} + (\tilde{p}\check{z}^*)_{\bar{x}}|_{N_\xi} + (z^*(\tilde{q}+q))|_{N_\xi}) + R_{N_\xi}, \quad (13)$$

$$\frac{z^* - \check{z}}{\tau} = (az^*_{\bar{x}})_x + (p\check{z}^*)_{\overset{\circ}{x}} + qz^* + R_2, \quad (x,t) \in \Omega^2. \quad (14)$$

Здесь $\tilde{a}_i = \varkappa a_i$, $i = \overline{1, N_\xi}$; $\tilde{q}_i = \varkappa q_i$, $i = \overline{1, N_\xi + 1}$; $\tilde{p}_1 = \varkappa p_i$, $i = \overline{1, N_\xi}$; $R_1 \le M_1(h^2 + \tau)$, $R_2 \le M_2(h^2+\tau)$, $R_{N_\xi} \le M_{N_\xi}(h+\tau)$; M_1, M_2, M_{N_ξ} – константы; $z_0 = z_N = 0$, $t \in \omega_\tau$. Для получения оценок точности воспользуемся методом энергетических неравенств [12]. Умножим каждое из уравнений (12)–(14) на соответствующее $2\tau h\varkappa z^*_i$, $i = \overline{1, N-1}$, и сложим полученные соотношения. Применив формулы разностного дифференцирования произведения, первую разностную формулу Грина, ε-неравенство, получим

$$h\Bigg(\sum_{i=1}^{N_\xi-1}\Bigg((1-\varepsilon)\tau^2\Bigg(\frac{\varkappa z^*_i - \check{z}_i}{\tau}\Bigg)^2 + \varkappa^2(z^*_i)^2\Bigg) + \sum_{i=N_\xi+1}^{N-1}\Bigg((1-\varepsilon)\tau^2\varkappa\Bigg(\frac{z^*_i - \check{z}_i}{\tau}\Bigg)^2 + \varkappa(z^*_i)^2\Bigg)\Bigg) +$$
$$+\varkappa(\varkappa+1)h\Bigg((1-\varepsilon)\tau^2\Bigg(\frac{z^* - \check{z}}{\tau}\Bigg)^2 + (z^*)^2\Bigg)\Bigg|_{N_\xi} + \|z^*\|_1^2 \le$$
$$\le h\Bigg(\sum_{i=1}^{N_\xi-1}\check{z}_i^2 + \sum_{N_\xi+1}^{N-1}\varkappa\check{z}_i^2 + \varkappa(\varkappa+1)\check{z}^2_{N_\xi}\Bigg) + (1+\tau c_1)\|\check{z}^*\|_1^2 + \tau(c_2\|\check{z}\|^2 + R). \quad (15)$$

Здесь $1 - \varepsilon \ge 0$, $\|z\|_1^2 = 2\tau(a_\varkappa, z^2_{\bar{x}}]$, $a_{\varkappa i} = \begin{cases} \varkappa\tilde{a}_i, & i = \overline{1, N_\xi}, \\ \varkappa a_i, & i = \overline{N_\xi + 1, N}, \end{cases}$ $R = O(h^2+\tau)^2$, c_1, c_2 – константы.

Обозначив

$$\tilde{z} = (0, z_1, z_2, \ldots, z_{N_\xi-1}, (\varkappa(\varkappa+1))^{1/2}z_{N_\xi}, \varkappa^{1/2}z_{N_\xi+1}, \ldots, \varkappa^{1/2}z_{N-1}, 0),$$

из неравенства (15) получим рекуррентное соотношение

$$\|z^*\|_1^2 + \|\tilde{z}\|^2 \le (1+\tau C)(\|\check{z}^*\|_1^2 + \|\check{\tilde{z}}\|^2) + \tau R,$$

где C – положительная величина, не зависящая от τ и h. Из последнего неравенства следует, что верна

Теорема 1. *Для решения задачи (4), (7)–(9), найденного по алгоритму (10), (11) при любых* τ *и* h, $j=\overline{1,j_0}$, *имеет место оценка точности* $\|z\| \le M(h^2+\tau)$, $M=\mathrm{const}$.

2. Устойчивость локально-одномерных схем для трехмерных задач. Пусть $G = \{x=(x_1,x_2,x_3):\ 0<x_\alpha<l_\alpha,\ \alpha=1,2,3\}$ есть трехмерный параллелепипед с границей γ, $\overline{G}=G\cup\gamma$. В цилиндре $Q_T=\overline{G}\times[0\le t\le T]$ рассмотрим уравнение диффузии-конвекции, полагая для наглядности изложения численного метода $q=f\equiv 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+p(x)u\right) \tag{16}$$

с условиями

$$u(x,0)=\psi(x),\quad x\in\overline{G},\quad u(x,t)|_{S_T}=\mu(x,t),\quad S_T=\gamma\times[0<t\le T]. \tag{17}$$

Предположим, что разрыв коэффициентов происходит вдоль плоскости перпендикулярной оси x_3, которая пересекает ее в точке $x_3=\xi$, и на границе выполняются условия сопряжения

$$\left[k\,\frac{\partial u}{\partial x_3}+pu\right]\Bigg|_{x_3=\xi}=0,\quad \frac{u(x_1,x_2,\xi-0,t)}{u(x_1,x_2,\xi+0,t)}=\varkappa. \tag{18}$$

Пусть задача (16)–(18) имеет единственное решение в области Q_T, обладающее требуемыми по ходу изложения непрерывными ограниченными производными в областях непрерывного изменения коэффициентов $k(x)$ и $p(x)$ – множествах Q_T^1 и Q_T^2, $Q_T^m=G_m\times[0\le t\le T]$, $m=1,2$, $G_1=[0\le x_1\le l_1]\times[0\le x_2\le l_2]\times[0\le x_3<\xi]$, $G_2=[0\le x_1\le l_1]\times[0\le x_2\le l_2]\times[\xi<x_3\le l_3]$.

На отрезке $[0\le t\le T]$, как и в п. 1, введем равномерную сетку Ω_τ. Поставим задаче (16)–(18) в соответствие цепочку одномерных задач

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial t}=L_\alpha v_\alpha,\quad x\in G,\quad t_{j-1}\le t\le t_j,\quad j=\overline{1,j_0},\quad \alpha=1,2,3, \tag{19}$$

$$L_\alpha v_\alpha=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k(x)\,\frac{\partial v}{\partial x_\alpha}+p(x)v\right),$$

с условиями

$$\begin{gathered}v_1(x,0)=u_0(x),\quad v_\alpha(x,t_{j-1})=v_{\alpha-1}(x,t_j),\quad \alpha=2,3,\quad j=\overline{1,j_0},\\ v_1(x,t_j)=v_3(x,t_j),\quad j=\overline{1,j_0-1},\quad v_\alpha(x,t)=\mu(x,t),\quad x\in\gamma,\quad t_{j-1}\le t\le t_j,\quad \alpha=1,2,3,\end{gathered} \tag{20}$$

$$\left[k\,\frac{\partial v_3}{\partial x_3}+pv_3\right]\Bigg|_{x_3=\xi}=0,\quad \frac{v_3(x_1,x_2,\xi-0,t)}{v_3(x_1,x_2,\xi+0,t)}=\varkappa. \tag{21}$$

За решение задачи (16)–(18) принимаются значения функции $v_3(x,t)$. Построенная система уравнений (19)–(21) аппроксимирует задачу (16)–(18) в суммарном смысле [12] с первым порядком по τ.

Введем в $\overline{G}$ пространственную сетку ω_h следующим образом:

$$\omega_h=\{\text{при}\quad \alpha=1,2\quad x_\alpha^{(i_\alpha)}=i_\alpha h_\alpha,\quad i_\alpha=\overline{0,N_\alpha},\quad h_\alpha N_\alpha=l_\alpha;$$

$$\text{при}\quad \alpha=3\quad x_3^{(i_3)}=i_3h_3,\quad i_3=\overline{0,N_3},\quad h_3N_\xi=\xi,\quad h_3(N_3-N_\xi)=l_3-\xi,\quad 1<N_\xi<N_3-1\}.$$

Существенным моментом при построении сеток для задач с разрывными решениями является требование принадлежности узлов сетки границе раздела областей. Для поставленной задачи этого достичь нетрудно, если ввести неравномерные шаги по направлению x_3. Исследование разностных схем при этом не усложнится.

На сетке $\Omega_{\tau,h} = \Omega_\tau \times \omega_h$ аппроксимируем соотношения (19)–(21) для $\alpha = 1,2$ неявными разностными выражениями

$$\frac{y_{(\alpha)} - \check{y}_{(\alpha)}}{\tau} = (a_{(\alpha)}(x) y_{(\alpha)\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} + (py_{(\alpha)})_{\overset{\circ}{x}_\alpha}, \quad i_\beta = \overline{1, N_\beta - 1}, \quad \beta = 1,2,3, \quad j = \overline{0, j_0 - 1}. \tag{22}$$

Коэффициенты $a_{(\alpha)}$ определяются при помощи линейных шаблонных функционалов [12], которые обеспечивают для каждой внутренней точки сетки ω_h выполнение условий

$$|(a_{(\alpha)}(x) u_{(\alpha)\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} + (pu)_{\overset{\circ}{x}_\alpha} - L_{(\alpha)}(u)| \le M_\alpha h_\alpha^2, \quad \alpha = 1,2, \quad M_\alpha = \text{const}.$$

Для узлов сетки ω_h, соответствующих значению $x_3 = \xi$, расчеты для уравнений (22), $\alpha = 1,2$, проводятся дважды: для различных значений $k(x)$ и $p(x)$ соответственно для областей G_1 и G_2.

Соотношения (22) дополним следующими краевыми и начальными условиями:

$$y_{(\alpha)}^j = \mu(x, t^j), \quad \alpha = 1,2, \quad y_{(1)}^0 = u_0(x), \quad y_{(2)}^{j-1} = y_{(1)}^j, \quad y_{(1)}^{j-1} = y_{(3)}^j, \quad j = \overline{1, j_0}. \tag{23}$$

С учетом краевых условий на сетке ω_h для каждого слоя $j = \overline{1, j_0}$ имеем $(N_1+1)\times(N_2+1)\times(N_3+2)$ значений $y_{(\alpha)}$, $\alpha = 1,2$. При $\alpha = 3$ в узлах $\Omega_{\tau h}$ для $i_3 = \overline{1, N_\xi - 2}$ и $i_3 = \overline{N_\xi + 1, N - 1}$ построим следующее уравнение:

$$\frac{y_{(3)} - \check{y}_{(3)}}{\tau} = (a_{(3)}(x) y_{(3)\bar{x}_3})_{x_3} + (py_{(3)})_{\overset{\circ}{x}_3}, \quad i_\beta = \overline{1, N_\beta - 1}, \quad \beta = 1,2, \quad j = \overline{0, j_0 - 1}. \tag{24}$$

В узлах сетки ω_h для $i_3 = N_\xi - 1$ и $i_\beta = \overline{1, N_\beta - 1}$, $\beta = 1,2$, с учетом разрыва решения по аналогии с одномерным случаем получаем

$$\left.\frac{y_{(3)} - \check{y}_{(3)}}{\tau}\right|_{N_\xi - 1} = h_3^{-2}(a_{(3)N_\xi}(\varkappa y^{\text{п}}_{(3)N_\xi} - y_{N_\xi - 1}) - a_{(3)N_\xi - 1}(y_{(3)N_\xi - 1} - y_{(3)N_\xi - 2})) +$$
$$+ 0.5h_3^{-1}((p\varkappa y^{\text{п}})|_{N_\xi} - (py)|_{N_\xi - 2}), \quad t \in \Omega_\tau. \tag{25}$$

На границе раздела областей, принимая во внимание, что в отличие от одномерного случая $\check{y}_{(3)G_1}/\check{y}_{(3)G_2} \ne \varkappa$, строится следующее разностное уравнение:

$$0.5h_3\left.\left(\frac{(\varkappa+1)y^{\text{п}}_{(3)} - \check{y}_{(3)\,G_1} - \check{y}_{(3)\,G_2}}{\tau}\right)\right|_{N_\xi} = h_3^{-1}(a_{(3)\,N_\xi+1}(y_{(3)\,N_\xi+1} - y^{\text{п}}_{(3)\,N_\xi}) -$$
$$- a_{(3)\,N_\xi}(\varkappa y^{\text{п}}_{(3)\,N_\xi} - y_{(3)\,N_\xi - 1}) + 0.5((py)|_{N_\xi - 1} - (p^{\text{п}}y^{\text{п}})|_{N_\xi} + \varkappa(p^{\text{п}}y^{\text{п}})|_{N_\xi} - (py)|_{N_\xi - 1})). \tag{26}$$

В формулах (24)–(26) полагаем $\check{y}_{(3)} = y_{(2)}$, $\check{y}_{(3)\,G_m}$, $m = 1,2$, – значения $y_{(2)}$, полученные в одних и тех же узлах, принадлежащих плоскости раздела областей G_1 и G_2, $a_{(3)} = a_{(3)}(x)$ определяется аналогично $a_{(\alpha)}(x)$, $\alpha = 1,2$. Граничные условия для уравнений (24)–(26) имеют вид

$$y_{(3)}(x,t) = \mu(x,t), \quad x \in \gamma, \quad t \in \Omega_\tau.$$

Значения $y_{(3)}$ будем называть приближенным решением задачи (16)–(18).

Определение решений задач (22) осуществляется методом немонотонной прогонки либо при достаточно малых τ правой или левой прогонкой.

Для нахождения величин $y_{(3)}$, как и в одномерном случае, перейдем к разностной функции $y^*_{(3)}$, для которой получаем задачу

$$B_1 y^*_{(3)} = (b(x) y^*_{(3)\,\bar{x}_3})_{x_3} + B_2 y^*_{(3)}, \quad (x,t) \in \Omega_{\tau\,h}, \tag{27}$$

где разностная функция $b(x)$ определяется аналогично функции $a_\varkappa(x)$,

$$
\begin{aligned}
&y^*_{i_1,i_2,i_3} = y_{i_1,i_2,i_3}/\varkappa \quad \text{для} \quad i_1 = \overline{0,N_1}, \quad i_2 = \overline{0,N_2}, \quad i_3 = \overline{0,N_\xi - 1},\\
&y^*_{i_1,i_2,i_3} = y_{i_1,i_2,i_3} \quad \text{для} \quad i_1 = \overline{0,N_1}, \quad i_2 = \overline{0,N_2}, \quad i_3 = \overline{N_\xi, N}.
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Для внутренних узлов области G_1 разностные операторы B_1 и B_2 имеют вид $B_1 y^*_{(3)} = (\varkappa y^* - \check{y})/\tau$, $B_2 y^*_{(3)} = (\varkappa p y^*_{(3)})_{\overset{\circ}{x}_3}$; для узлов, соответствующих $i_\alpha = \overline{1, N_\alpha - 1}$ и $i_3 = N_\xi$, определяем

$$
B_1 y^*_{(3)} = 0.5((\varkappa + 1)y^*_{(3)} - \check{y}_{(3)\,G_1} - \check{y}_{(3)\,G_2})/\tau, \quad B_2 y^*_{(3)} = 0.5((p y^*_{(3)})_{\bar{x}}|_{N_\xi+1} + (\varkappa p y^*_{(3)})_{\bar{x}}|_{N_\xi});
$$

для внутренних узлов области G_2 имеем $B_1 y^*_{(3)} = (y^*_{(3)} - \check{y})/\tau$, $B_2 y^*_{(3)} = (p y^*_{(3)})_{\overset{\circ}{x}_3}$. Решение задачи (27) также находится одним из видов прогонки.

Покажем устойчивость рассматриваемого метода в предположении $\mu(x,t) \equiv 0$. Умножим скалярно уравнения (22) на соответствующее $\tau y_{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$, а уравнения (27) на $\varkappa y^*_{(3)}$ и просуммируем полученные соотношения.

Применяя аппарат исследования аддитивных разностных схем [12] и вводя норму евклидова типа

$$
\|y\|^2_* = h_1 h_2 h_3 \Bigg(\sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} \Bigg(\sum_{i_3=1}^{N_\xi-1} y^2_{i_1,i_2,i_3} + \sum_{i_3=N_\xi+1}^{N_3-1} \varkappa y^2_{i_1,i_2,i_3} + \varkappa(1+\varkappa) y^2_{i_1,i_2,N_\xi} \Bigg) \Bigg),
$$

для разностной функции $y_{(3)}$ при достаточно малых τ получаем рекуррентное соотношение

$$
\|y_{(3)}\|^2_* \le (1 + \tau c^*)\|\check{y}_{(3)}\|^2_*, \quad c^* = \text{const}.
$$

Следовательно, верна

Теорема 2. *При достаточно малых τ решение локально-одномерной схемы (22)–(26), найденное по соотношениям (22), (23), (27), (28), безусловно устойчиво по начальным данным.*

Ограничение на шаг по времени связано с оценкой слагаемых вида $\tau(y_{x_\alpha}, y)$, $\alpha = 1, 2, 3$. При $p \equiv 0$ рассматриваемый алгоритм абсолютно устойчив.

При достаточной гладкости коэффициентов и решения в областях непрерывного изменения $k(x)$ и $p(x)$ с учетом суммарной аппроксимации построенных разностных схем и с помощью метода энергетических неравенств показывается, что имеет место

Теорема 3. *При достаточно малых τ для погрешности решения разностной схемы (22)–(26), определенного из системы уравнений (22), (23), (27), (28) для $j = \overline{1, j_0}$, справедлива оценка*

$$
\Bigg(h_1 h_2 h_3 \sum_{i_1=0}^{N_1} \sum_{i_2=0}^{N_2} \sum_{i_3=0}^{N_3} (y_{(3)} - u)^2|_{i_1,i_2,i_3} \Bigg)^{1/2} \le \tilde{c}(h^2 + \sqrt{\tau}),
$$

$\tilde{c}$ – постоянная величина, не зависящая от h и τ.

Если разрыв коэффициентов и решения в случае двумерной задачи проходит, например, вдоль кривой линии, то, применяя неравномерные шаги по двум направлениям с обязательным попаданием узлов сетки на границу раздела, аналогично рассмотренному выше случаю можно построить алгоритм численного решения и провести обоснование устойчивости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brecl K., Furlan J.* // Technical Proceeding of the 2000 International Conference on Modeling and Simulation of Microsystems. 2000. P. 376–379.
2. Science and Technology of Millimetre Wave Components and Devoces (Electrocomponent Science Monographs) / Ed. Lyubchenko V.E. London, 2002.
3. *Садовников А.Д., Черняев А.В.* // Мат. моделирование. 1990. Т. 2. № 8. С. 60–69.
4. *Величко О.И., Комаров Ф.Ф., Цурко В.А. и др.* // Мат. моделирование. 1997. Т. 9. № 5. С. 68–76.
5. *Величко О.И., Комаров Ф.Ф., Цурко В.А. и др.* // ИФЖ. 1997. Т. 70. № 6. С. 1025–1032.
6. *Корзюк В.И., Чеб Е.С.* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 8. С. 1396–1404.
7. *Law M.E., Gilmer G.H., Jarais M.* // MRS Bulletin. 2000. № 25. P. 45–50.
8. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Численные методы решения задач конвекции-диффузии. М., 1999.
9. *Цурко В.А.* // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 7. С. 986–992.
10. *Фрязинов И.В.* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1973. Т. 13. № 1. С. 80–91.
11. *Цурко В.А.* // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2000. Т. 6. С. 142–146.
12. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М., 1977.

Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск

Поступила в редакцию
08.12.2003 г.