ности в трехмерном пространстве, если точка за заданный промежуток времени $t = \alpha$ должна перейти в точку, расположенную возможно ниже. При несущественном дополнительном предположении о строго монотонной зависимости величины оптимального спуска от времени точка, очевидно, должна двигаться по геодезической, причем эта геодезическая Γ_α определяется величиной α. По аналогии с дискретным случаем естественно говорить, что решения стабилизуются, если Γ_α являются частью Γ_β при $\alpha < \beta$.

Вопрос об условиях стабилизации задач Y_α по непрерывному параметру α в общем виде не исследован. В приведенном выше примере задачи о движении точки по поверхности очевидное необходимое условие для стабилизационной кривой заключается в том, что в каждый момент точка движется в направлении быстрейшего убывания высоты (это соображение относится к произвольным задачам с непрерывным параметром). Отсюда вытекает, что стабилизационная геодезическая — это кривая, лежащая в некоторой вертикальной плоскости.

Поступила в редакцию
3.03.1962

Цитированная литература

1. Р. Беллман. Динамическое программирование. М., Изд-во ин. лит., 1960.

ОБ ОДНОМ ПРАКТИЧЕСКОМ ПРИЕМЕ АВТОМАТИЧЕСКОГО ВЫБОРА МАСШТАБОВ ПРИ РЕШЕНИИ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И. Ф. ГОНЧАРОВА, А. В. МАРТЫНОВ

(*Воронеж*)

Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} = a_{i1}(t)\,y_1 + a_{i2}(t)\,y_2 + \ldots + a_{in}(t)\,y_n, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

заданной на $[a, b]$, с начальными условиями.

$$y_1 = y_{10}, \ldots, y_n = y_{n0} \text{ при } t = t_0. \tag{2}$$

Для решения этой системы рекомендуются методы Эйлера, Рунге — Кутта, Адамса и другие. Чтобы осуществить вычисления на цифровой электронной вычислительной машине с фиксированной запятой, необходимо ввести масштабы. Ввод масштабов требует знания границ, в пределах которых изменяются все величины и, в частности, $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Для определения границ изменения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ можно было бы поступить следующим образом: заменить в системе (1) функции $a_{ij}(t)$ их максимумами на $[a, b]$, в результате чего получить систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} = b_{i1}y_1 + \cdots + b_{in}y_n, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

с постоянными коэффициентами. Решения этой системы можно найти аналитически. Система (3) имеет решения, превосходящие, согласно теореме Чаплыгина о дифференциальных неравенствах (см. [1]), решения системы (1), поэтому верхние грани решений системы (3) можно было бы выбрать в качестве так называемых постоянных масштабов для решений системы (1). Однако полученная оценка для решений системы (1) слишком завышена, что приводит к потере точности, а чаще — к машинному нулю. Поэтому постоянные масштабы при расчетах на вычислительных машинах с фиксиро-

ванной запятой задач, в которых требуется высокая точность, оказываются непригодными. Для повышения точности проводят программирование по методу плавающей запятой, но это сильно увеличивает программу и подчас в десятки раз увеличивает время решения задачи.

В настоящей работе предлагается прием, позволяющий значительно повысить точность решения задачи с незначительным увеличением программы в сравнении с режимом фиксированной запятой. При этом время решения задачи на машине возрастает крайне незначительно, а точность решения такая же, как в методе с плавающей запятой. Однако этот прием не является универсальным, а нацелен только на системы обыкновенных дифференциальных уравнений, решаемых по методу Эйлера, Рунге — Кутта, Адамса и аналогичным им «шаговым» методам. Заметим, что предлагаемый прием особенно хорошо применяется к линейным системам, но может быть распространен и на нелинейные системы. В конце работы дается пример такого распространения. Суть предлагаемого приема состоит в том, что масштаб вводится на каждом шаге интегрирования с помощью оценок, полученных в результате замены системы дифференциальных уравнений интегральной, и автоматически изменяется при переходе к следующему шагу. При этом результаты решения выдаются на печать в нормализованной форме. Масштаб вводится на каждом шаге интегрирования для того, чтобы понизить относительную погрешность. Построение алгоритма, иллюстрирующего этот прием, покажем на примере метода Эйлера. Заменим систему дифференциальных уравнений (1) интегральной и получим для $y_1, y_2, \ldots, y_n$ следующие оценки:

$$y_i \leqslant Le^{Kn(t-t_0)}, \tag{4}$$

где K — верхняя граница абсолютных величин $a_{ij}(t)$ на $[a, b]$, а L — верхняя грань абсолютных величин начальных значений:

$$|a_{ij}| \leqslant K, \quad |y_{i0}| \leqslant L, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Будем применять (4) с некоторыми изменениями на каждом шаге интегрирования h.

Выберем $L = \text{const} \geqslant \max\{|y_{10}|, \ldots, |y_{n0}|\}$; положим

$$Kn = m_i, \text{ где } m_i = \max_{[a, b]} |a_{i1}| + \cdots + \max_{[a, b]} |a_{in}|, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда для y_i получаем следующие оценки:

$$y_i \leqslant Le^{m_i h}, \tag{5}$$

которые и выбираем в качестве масштаба. Зная масштабы для y_i, вводим масштабы для y_i', а тем самым и масштабируем формулы какого-либо метода. После того как осуществлены вычисления, например на $(k+1)$-м шаге, выбираем из $y_{1,k+1}$, $y_{2,k+1}, \ldots, y_{n,k+1}$ наибольшее, обозначаем его через L'_{k+1} и вводим масштаб по закону

$$y_{i,k+1} = L'_{k+1} e^{m_i h} \bar{y}_{i,k+1}.$$

Определив отсюда $\bar{y}_{i,k+1}$, вновь обращаемся к вычислениям по определенному методу, и так до тех пор, пока не будет решена задача. Например, метод Эйлера с пересчетом применительно к задаче (1) — (2) будет заключаться в вычислении (см. [2]) по формулам:

$$y'_{ik} = a_{i1}(t_k) y_{1k} + \cdots + a_{in}(t_k) y_{nk}, \tag{6}$$

$$y^*_{ik} = y_{ik} + hy'_{ik}, \tag{7}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\tilde{y}_{ik} = a_{i1}(t_{k+1}) y^*_{1k} + \ldots + a_{in}(t_{k+1}) y^*_{nk}, \tag{8}$$

$$y_{i,k+1} = y_{ik} + \frac{h}{2}(\tilde{y}'_{ik} + y'_{ik}), \tag{9}$$

где k — номер шага интегрирования. Пусть масштабы для $y_1, y_2, \ldots, y_n$ введены следующим образом:

$$y_{1k} = L_k e^{m_1 h} \bar{y}_{1k}, \ldots, y_{nk} = L_k e^{m_n h} \bar{y}_{nk}, \qquad |\bar{y}_{ik}| < 1;$$

зная это, можно оценить y'_{ik}:

$$y'_{ik} = a_{i1}(t_k) y_{1k} + \cdots + a_{in}(t_k) y_{nk} =$$

$$= a_{i1}(t_k) L e^{m_1 h} \bar{y}_{1k} + \cdots + a_{in}(t_k) L e^{m_n h} \bar{y}_{nk} \leqslant L K_i \sum_{p=1}^{n} e^{m_p h};$$

здесь K_i — верхняя грань абсолютных величин $\{|a_{i1}|, \ldots, |a_{in}|\}$ на $[a, b]$.

С учетом этого формулы (6), (7), (8), (9) перейдут, соответственно, в формулы

$$\bar{y}'_{ik} = \frac{a_{i1}(\bar{t}_k)}{K_i} \bar{\lambda}_1 \bar{y}_{1k} + \cdots + \frac{a_{in}(\bar{t}_k)}{K_i} \bar{\lambda}_n \bar{y}_{nk}, \tag{10}$$

$$\bar{y}^*_{ik} = \bar{y}_{ik} + h \frac{\bar{y}'_{ik}}{(1/K_i)\bar{\lambda}_i}, \tag{11}$$

$$\tilde{y}'_{ik} = \frac{a_{i1}(\bar{t}_{k+1})}{K_i} \bar{\lambda}_1 \bar{y}^*_{1k} + \cdots + \frac{a_{in}(\bar{t}_{k+1})}{K_i} \bar{\lambda}_n \bar{y}^*_{nk}, \tag{12}$$

$$\bar{y}_{i,k+1} = \bar{y}_{ik} + \frac{h}{2} \cdot \frac{(\bar{y}'_{ik} + \tilde{y}'_{ik})}{(1/K_i)\bar{\lambda}_i}, \tag{13}$$

$$\bar{\lambda}_i = \frac{e^{m_i h}}{\sum_{p=1}^{n} e^{m_p h}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n;$$

$\bar{\lambda}_i$ вычисляются в начале решения задачи, и так как $\bar{\lambda}_i < 1$, то счет по формулам (10) — (13) осуществляется с фиксированной запятой. После того как найдены $\bar{y}_{1,k+1}, \ldots, \bar{y}_{n,k+1}$, вычисляем $y_{1,k+1}, \ldots, y_{n,k+1}$, выдавая в нормальной форме на печать, затем выбираем из них наибольшее, обозначив его через L'_{k+1}. Снова вводим масштаб таким образом:

$$y_{1,k+1} = L'_{k+1} e^{m_1 h} \bar{y}^*_{1,k+1}, \ldots, y_{n,k+1} = L'_{k+1} e^{m_n h} \bar{y}^*_{n,k+1}, \qquad |\bar{y}^*_{n,k+1}| < 1;$$

определив отсюда $\bar{y}^*_{1,k+1}, \ldots, \bar{y}^*_{n,k+1}$, вновь обращаемся к вычислениям по формулам (10), (11), (12), (13), так как этот ввод масштабов аналогичен проведенному на $(k+1)$-м шаге и не приводит к изменению алгоритма счета. В качестве примера рассматривалась система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = -x + y + z, \qquad \frac{dy}{dt} = x - y + z, \qquad \frac{dz}{dt} = x + y - z$$

при $t = 0$, $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$, которая решалась указанным способом. Эта система имеет аналитическое решение. Расчет показывает, что решения, полученные изложенным методом, оказываются более точными, чем решения, полученные при вычислении с постоянными масштабами. Так, например, на 20-м шаге с постоянными масштабами получаем 0.019804, из аналитических формул имеем 0.019803961, а указанным способом находим 0.019803946; на 32-м шаге, соответственно, 0.031506, 0.031504165, 0.031504132 и т. д. Отсюда видно, что расчет с постоянными масштабами дает пять верных десятичных знаков, расчет же указанным способом — семь. Подобные рассуждения можно распространить на метод Рунге—Кутта, Адамса и др. Этот же способ возможно рекомендовать при решении нелинейных систем дифференциальных уравнений. Рассмотрим систему

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, \ldots, y_n), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1'}$$

определенную на $[a, b]$, с начальными условиями

$$y_1 = y_{10}, \ldots, y_n = y_{n0} \text{ при } t = t_0.$$

Предположим, что $|f_i(t, y_1, \ldots, y_n)| \leqslant M$ и $f_i(t, y_1, \ldots, y_n)$ удовлетворяет условию Липшица на $[a, b]$. Тогда совершенно аналогично, как и в случае линейных систем, получим, что

$$y_i \leqslant \frac{M}{Kn} e^{Kn(t-t_0)}, \text{ где } M = \max |f_i(t, y_{10}, \ldots, y_{n0})|, \qquad i = 1, 2, \ldots, n; \tag{2'}$$

K — постоянная Липшица для $f_i(t, y_1, \ldots, y_n)$ на $[a, b]$.

Поясним применение полученных оценок на примере нелинейной системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = z^3, \quad \frac{dy}{dt} = xyz, \quad \frac{dz}{dt} = x^2 y,$$
$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0 \quad \text{при} \quad t = t_0.$$

Найденная оценка (2′) опять является слишком завышенной, поэтому видоизменим ее следующим образом: определим

$$M_1 = |z_k^3|, \qquad M_2 = |x_k y_k z_k|, \qquad M_3 = |x_k^2 y_k|,$$

и для улучшения точности при масштабировании введем масштаб так:

$$x_k = \frac{M_1}{Kn} e^{Knh} \bar{x}_k, \qquad y_k = \frac{M_2}{Kn} e^{Knh} \bar{y}_k,$$
$$z_k = \frac{M_3}{Kn} e^{Knh} \bar{z}_k.$$

После этого проводим элементарные преобразования и получаем расчетные формулы:

$$\bar{x}'_k = \bar{z}_k^3, \qquad \bar{y}'_k = \bar{x}_k \bar{y}_k \bar{z}_k, \qquad \bar{z}'_k = \bar{x}_k^2 \bar{y}_k,$$
$$\bar{x}_k^* = \bar{x}_k + h \cdot \frac{\bar{x}'_k}{\nu_1}, \qquad \bar{y}_k^* = \bar{y}_k + h \cdot \frac{\bar{y}'_k}{\nu_2}, \qquad \bar{z}_k^* = \bar{z}_k + h \cdot \frac{\bar{z}'_k}{\nu_3},$$
$$\bar{\bar{x}}_k = (\bar{z}_k^*)^3, \qquad \bar{\bar{y}}_k = \bar{x}_k^* \bar{y}_k^* \bar{z}_k^* \qquad \bar{\bar{z}}_k = (\bar{x}_k^*)^2 \bar{y}_k^*,$$
$$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k + \frac{0.5h(\bar{x}'_k + \bar{\bar{x}}'_k)}{\nu_1}, \qquad \bar{y}_{k+1} = \bar{y}_k + \frac{0.5h(\bar{y}'_k + \bar{\bar{y}}'_k)}{\nu_2}$$
$$\bar{z}_{k+1} = \bar{z}_k + \frac{0.5h(\bar{z}'_k + \bar{\bar{z}}'_k)}{\nu_3},$$
$$\nu_1 = M_1 \left(\frac{Kn}{M_3 e^{Knh}}\right)^2, \qquad \nu_2 = \frac{1}{M_1 M_3} \left(\frac{Kn}{e^{Knh}}\right)^2, \qquad \nu_3 = \frac{M_3}{M_2} \left(\frac{Kn}{e^{Knh} M_1}\right)^2.$$

Определив $\bar{x}_{k+1}, \bar{y}_{k+1}, \bar{z}_{k+1}$, находим $x_{k+1}, y_{k+1}, z_{k+1}$. Вновь вычисляем M_1, M_2, M_3 в зависимости от $t_{k+1}, x_{k+1}, y_{k+1}, z_{k+1}$. Определяем $\bar{x}_{k+1}^*, \bar{y}_{k+1}^*, \bar{z}_{k+1}^*$ и снова обращаемся к расчетам по формулам, и так до тех пор, пока не будет решена задача. Однако указать универсальный алгоритм вычислений в случае нелинейной системы не представляется возможным ввиду того, что ввод масштабов и различные преобразования расчетных формул существенным образом зависят от вида функции f.

Поступила в редакцию
15.08.1961

Цитированная литература

1. И. С. Березин, Н. П. Жидков. Методы вычислений. Т. 2. М., Физматгиз, 1960.
2. А. Н. Крылов. Лекции о приближенных вычислениях. М., Гостехиздат, 1950.