

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Звонилов, С. Ю. Оревков, Клеточная структура пространства разветвлённых накрытий двумерной сферы, *Алгебра и анализ*, 2020, том 32, выпуск 5, 86–113

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.81

17 марта 2025 г., 05:53:55



## КЛЕТОЧНАЯ СТРУКТУРА ПРОСТРАНСТВА РАЗВЕТВЛЁННЫХ НАКРЫТИЙ ДВУМЕРНОЙ СФЕРЫ

© В. И. ЗВОНИЛОВ, С. Ю. ОРЕВКОВ

Для замкнутой ориентированной поверхности  $\Sigma$  пусть  $X_{\Sigma,n}$  — пространство классов изоморфности  $n$ -листных сохраняющих ориентацию разветвлённых накрытий  $\Sigma \rightarrow S^2$  двумерной сферы. Ранее авторами построена компактификация  $\bar{X}_{\Sigma,n}$  этого пространства, совпадающая с компактификацией Диаса–Эдидина–Натанзона–Тураева пространства Гурвица  $H(\Sigma, n) \subset X_{\Sigma,n}$ , состоящего из классов изоморфности накрытий с простыми критическими значениями. С помощью *dessins d'enfants* Гротендика строится клеточная структура этой компактификации. Полученные результаты применяются к пространству тригональных кривых на произвольной поверхности Хирцебруха.

### §1. Введение

Пусть  $\Sigma$  — замкнутая ориентированная поверхность (фиксированная во всей статье). Сохраняющие ориентацию  $n$ -листные разветвлённые накрытия  $f_1, f_2: \Sigma \rightarrow S^2$  двумерной сферы называются *изоморфными*, если существует гомеоморфизм  $\alpha: \Sigma \rightarrow \Sigma$  с  $f_2 \circ \alpha = f_1$ . Пусть  $X_{\Sigma,n}$  — множество классов изоморфности таких накрытий. В статье [1] введена топология на этом множестве и построена компактификация  $\bar{X}_{\Sigma,n}$  полученного пространства, совпадающая с компактификацией Диаса–Эдидина–Натанзона–Тураева пространства Гурвица  $H(\Sigma, n) \subset X_{\Sigma,n}$ , состоящего из классов изоморфности накрытий с простыми критическими значениями. Точкой пространства  $\bar{X}_{\Sigma,n}$  является класс изоморфности вырождения  $f': \Sigma' \rightarrow S^2$  (см. п. 2.2) разветвлённого накрытия  $f: \Sigma \rightarrow S^2$ , где  $\Sigma'$  — вырождение поверхности  $\Sigma$  (см. п. 2.1).

Основным результатом настоящей работы является введение клеточной структуры, то есть структуры  $CW$ -комплекса, в  $\bar{X}_{\Sigma,n}$ , использующее

---

*Ключевые слова:* разветвлённые накрытия, компактификация пространства Гурвица, клеточная структура, тригональные кривые.

Работа первого автора выполнена по теме государственного задания №0729-2020-0055.

понятие графа разветвлённого накрытия сферы. В построенном клеточном пространстве клетками являются классы изоморфности разветвлённых накрытий сферы, имеющих изоморфные графы. Для построения графа разветвлённого накрытия сферы мы следуем принципу, сформулированному в [2, принцип 1.6.1], согласно которому граф на покрывающей поверхности является прообразом базового графа на сфере, содержащего все критические значения накрытия. Выбор базового графа определяется дальнейшим применением клеточной структуры.

В работе [5] построено клеточное разбиение пространства  $\bar{X}_{\Sigma, n}$ , которое использовано авторами для вычисления гомологий пространства  $H(\Sigma, n)$ . То, что их разбиение является *CW*-комплексом, авторы не доказывают (см. [5, п. 4.4]). Однако замена базового графа (см. ниже замечание 1) позволяет доказать, что это верно, таким же образом, каким мы это делаем для нашего разбиения.

Мы применяем полученные результаты к компактификации пространства  $j$ -инвариантов тригональных кривых на линейчатой поверхности, то есть отображений базы линейчатой поверхности в модулярную кривую, см. [3, п. 4], а также [4, 2.1.2, 3.1.1]. Для работы с тригональными кривыми мы выбираем на сфере базовый граф, названный нами топологическим осоедром (см. п. 3.1). Клеточное разбиение работы [5], более экономное по числу клеток, чем наше, не удобно для изучения тригональных кривых, поскольку  $j$ -инвариант имеет фиксированные критические значения.

Полученные результаты позволяют нам предложить способ вычисления фундаментальной группы пространства неособых тригональных кривых, знание которой поможет получить новые ограничения в топологии вещественных алгебраических многообразий, в частности, поверхностей степени 5 в вещественном проективном пространстве.

Структура статьи: §2 содержит необходимые сведения из работы [1], в пунктах 2.1, 2.2 напоминаются понятия вырожденной (особой) поверхности и накрытия ею двумерной сферы, а в п. 2.3 повторяется определение топологии в  $\bar{X}_{\Sigma, n}$ ; в пунктах 3.1, 3.2 изучаются графы разветвлённых накрытий и преобразования графов; в §4 вводится клеточная структура и строится двойственное разбиение пространства  $\bar{X}_{\Sigma, n}$  и его подпространств, а в §5 полученные результаты применяются к пространству тригональных кривых.

## §2. Пространство классов изоморфности разветвлённых накрытий.

Повторим необходимые сведения из статьи [1].

**2.1. Особая поверхность.** В настоящей работе *поверхностью* будем называть хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, любая

точка которого имеет окрестность, гомеоморфную открытому кругу или букету открытых кругов, (или объединению открытого полукруга с диаметром на его границе — для поверхностей с краем, который определяется стандартным образом). Назовем такую окрестность *допустимой*, а круги букета — *ветвями поверхности* в центре букета. Мы будем считать, что каждой точке  $v$  такой поверхности приписано некоторое целое неотрицательное число  $g_v$ , называемое *локальным родом поверхности в точке  $v$* , причем для всех точек кроме конечного числа и для точек на крае поверхности локальный род равен нулю. То есть, говоря более формально, поверхность — это пара, состоящая из топологического пространства и заданной на нем целозначной функции  $v \mapsto g_v$ , обладающих перечисленными свойствами. Обозначим через  $t_v$  число ветвей поверхности в точке  $v$  и через  $\mu_v = 2g_v + t_v - 1$  — *число Милнора* точки  $v$ . Точки с  $\mu_v > 0$  назовем *особыми точками* поверхности. Поверхность с особыми точками назовем *вырожденной*, или *особой*, а без особых точек — *неособой поверхностью*.

Если для каждой точки  $v$  с  $t_v > 1$  заменить ее допустимую окрестность несвязным объединением кругов, то есть вырезать эту окрестность и заклеить полученные дыры кругами, то получим поверхность, которую назовем *нормализацией* исходной поверхности. Имеется естественная проекция  $\pi$  нормализации на исходную поверхность, переводящая каждый приклеенный круг в соответствующий круг букета. *Компонентами* поверхности называются компоненты связности ее нормализации. Таким образом, *компонента поверхности является двумерным многообразием*. Поверхность называется *ориентированной/замкнутой*, если ее нормализация ориентирована/замкнута (компактна и без края).

Всюду ниже мы рассматриваем ориентированные поверхности и отображения, сохраняющие их ориентацию.

Пусть  $\Sigma_0$  — поверхность (в вышеуказанном смысле, возможно, особая),  $v$  — любая ее точка и  $U_v$  — замыкание допустимой окрестности этой точки. Склеим по их общему краю поверхность  $\Sigma_0 \setminus \text{Int } U_v$  и связную компактную ориентируемую (возможно, особую) поверхность  $\tilde{U}_v$  с  $t_v$  компонентами края, для которой  $b_2(\tilde{U}_v) = 0$  (то есть  $\tilde{U}_v$  не имеет компонент без края) и  $b_1(\tilde{U}_v) + \sum_{x \in \tilde{U}_v} \mu_x = \mu_v$ ; здесь через  $b_i$  мы обозначаем  $i$ -е число Бетти. Назовем полученную поверхность  $\Sigma_1$  *возмущением поверхности  $\Sigma_0$  в точке  $v$* , или *локальным возмущением*, а поверхность  $\Sigma_0$  — *локальным вырождением поверхности  $\Sigma_1$* , полученными с помощью  $U_v, \tilde{U}_v$ . Композицию конечного числа локальных возмущений/вырождений поверхности назовем *возмущением/вырождением* этой поверхности.

**2.2. Возмущения/вырождения накрытий.** Отображение  $f$  поверхности  $\Sigma'$  в двумерную сферу назовем *разветвленным накрытием*, если сужение композиции  $f \circ \pi$  (см. п. 2.1) на каждую компоненту этой поверхности является разветвленным накрытием, сохраняющим ориентацию, и особые точки  $v \in \Sigma'$  с  $m_v = 1$  являются точками ветвления отображения  $f$ . Точки ветвления отображения  $f$ , а также особые точки поверхности  $\Sigma'$  мы будем называть *критическими точками* отображения  $f$ , а их образы — *критическими значениями*.

Для разветвленного накрытия  $f_0: \Sigma_0 \rightarrow S^2$  пусть  $v$  — его критическая точка и  $\bar{U}_w$  — замкнутый круг на сфере, содержащий внутри себя точку  $w = f_0(v)$  и не содержащий других критических значений накрытия  $f_0$ . Выберем компоненту связности  $U_v$  множества  $f^{-1}(\bar{U}_w)$ , содержащую точку  $v$ . Ясно, что это замкнутая допустимая окрестность точки  $v$ . Пусть  $\Sigma_1$  — возмущение поверхности  $\Sigma_0$  в точке  $v$ , полученное с помощью  $U_v, \tilde{U}_v$ . Назовем разветвленное накрытие  $f_1: \Sigma_1 \rightarrow S^2$  *возмущением накрытия  $f_0$  в точке  $v$* , или *локальным возмущением*, с областью возмущения  $\bar{U}_w$ , а  $f_0$  *локальным вырождением накрытия  $f_1$* , если  $f_0 = f_1$  на  $\Sigma_0 \setminus \text{Int } U_v = \Sigma_1 \setminus \text{Int } \tilde{U}_v$ . Ясно, что  $f_1(\tilde{U}_v) = \bar{U}_w$ .

Пусть теперь круги  $\bar{U}_w$ , выбранные для всех критических значений накрытия  $f_0$ , попарно не пересекаются. Композицию  $f$  конечного числа локальных возмущений этого накрытия, имеющих области возмущения  $\bar{U}_w$ , назовем *возмущением* этого накрытия. Объединение  $V = \bigcup_w \bar{U}_w$  назовем *областью возмущения* накрытия  $f_0$ . При этом накрытие  $f_0$  называется *вырождением* накрытия  $f$ .

Далее нам понадобятся вырождения только фиксированной *неособой* поверхности  $\Sigma$  (см. введение).

Пусть  $f': \Sigma' \rightarrow S^2$  — вырождение разветвленного накрытия  $f: \Sigma \rightarrow S^2$ , отвечающее области возмущения  $V$ . Для каждой критической точки  $v$  накрытия  $f'$  определены поверхности  $U_v \subset \Sigma', \tilde{U}_v \subset \Sigma$ . Обозначим через  $k_1, k_2, \dots, k_{m_v}$  степени сужений накрытия  $f'$  на граничные окружности букета дисков  $U_v$ . Ясно, что сумма  $\sum_{i=1}^{m_v} k_i$  равна локальной степени  $\deg_v f'$  отображения  $f'$  в точке  $v$ , то есть кратности этой точки как корня уравнения  $w = f'(v)$ . *Индексом точки  $v \in \Sigma'$*  назовем число  $\text{ind}_v = \mu_v + \deg_v f'$ .

*Кратностью критического значения* разветвленного накрытия  $f'$  назовем сумму уменьшенных на 1 индексов прообразов этого значения. Критическое значение кратности 1 называется *простым*, а не простое — *кратным*.

Ясно, что если два накрытия изоморфны, то для любого возмущения/вырождения  $f$  первого из них существует возмущение/вырождение второго, изоморфное  $f$ . Поэтому можно говорить о возмущении/вырождении класса изоморфности накрытия.

Пусть  $V = \bigcup_{e \in E} D_e \subset S^2$  — объединение попарно непересекающихся замкнутых топологических кругов, где  $e$  — фиксированная внутренняя точка круга  $D_e$ . Предположим, что критические значения разветвленных накрытий  $f_0: \Sigma_0 \rightarrow S^2$ ,  $f_1: \Sigma_1 \rightarrow S^2$  являются простыми и лежат внутри  $V$ . Назовем такие накрытия  $(V, E)$ -эквивалентными, если существуют гомеоморфизмы  $\alpha: \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_1$  и  $\varphi: S^2 \rightarrow S^2$ , для которых

- (i)  $\varphi \circ f_0 = f_1 \circ \alpha$ ;
- (ii) точки множества  $E \cup (S^2 \setminus \text{Int } V)$  остаются неподвижными под действием гомеоморфизма  $\varphi$ , причём  $\varphi$  изотопен тождественному в классе гомеоморфизмов, оставляющих неподвижными эти точки.

**Предложение 1** (см. [1, предложение 4]). *Для любого разветвленного накрытия  $f_0: \Sigma_0 \rightarrow S^2$  существует его возмущение  $f_1: \Sigma_1 \rightarrow S^2$  в критической точке  $v$ , для которого поверхность  $\tilde{U}_v \subset \Sigma_1$  неособа и*

$$\chi(\tilde{U}_v) = 2 - 2g_v - m_v.$$

*Более того,  $f_1$  можно выбрать так, чтобы все его критические значения в области возмущения  $\tilde{U}_w$ , где  $w = f_0(v)$ , были простыми и заранее заданными. В последнем случае накрытие  $f_1$  единственно с точностью до  $(\tilde{U}_w, w)$ -эквивалентности.*

**2.3. Топология в множестве классов изоморфности разветвленных накрытий.** Напомним, что  $\Sigma$  — неособая ориентированная замкнутая поверхность. Как и во введении, мы обозначим через  $X_{\Sigma, n}$  множество классов изоморфности  $n$ -листных разветвленных накрытий  $\Sigma \rightarrow S^2$  и через  $\bar{X}_{\Sigma, n}$  — множество всех вырождений классов изоморфности накрытий из  $X_{\Sigma, n}$ .

Для  $[f] \in \bar{X}_{\Sigma, n}$  выберем область возмущения  $V$  накрытия  $f$ . Обозначим через  $U_{[f], V} \subset \bar{X}_{\Sigma, n}$  множество классов изоморфности всех возмущений накрытия  $f$ , задаваемых областью возмущения  $V$ . Другими словами, это те классы возмущений накрытий из  $[f]$ , множества критических значений которых лежат в  $V$ .

**Предложение 2** (см. [1, предложение 5]). *Совокупность*

$$\{U_{[f], V} \mid [f] \in \bar{X}_{\Sigma, n}, V \text{ — область возмущения накрытия } f\}$$

*образует базу топологии в множестве  $\bar{X}_{\Sigma, n}$ . Подмножество  $X_{\Sigma, n}$  всюду плотно в пространстве  $\bar{X}_{\Sigma, n}$  с этой топологией.*

## §3. Осография

**3.1. Граф разветвлённого накрытия сферы.** Пусть  $a$  — целое положительное число. Выберем на двумерной сфере  $S^2$  две диаметрально противоположные точки — *полюсы*, один полюс изобразим чёрным цветом, другой — крестом и назовём их, соответственно, *•-вершиной* и *×-вершиной*. Соединим эти вершины  $a$  полуокружностями — *меридианами*, ориентируем меридианы в направлении от *•*- к *×*-вершине и занумеруем их числами от 1 до  $a$  при обходе *•*-вершины против часовой стрелки. Выберем на (необязательно всех) меридианах конечное множество точек. Назовём *топологическим осоедром*  $\Theta$  или просто *осоедром* ориентированный граф с вершинами в полюсах и в выбранных точках, рёбрами которого являются дуги указанных меридианов, ориентированные так же, как меридианы, причём каждое ребро пометим номером того меридиана, на котором оно лежит. *Стационарными вершинами* назовём *•*- и *×*-вершину, а *мобильными* — остальные вершины. Осоедр называется *минимальным*, если при  $a > 1$  он не содержит рёбер, являющихся меридианами, то есть соединяющих *•*-вершину с *×*-вершиной.

Пусть  $f: \Sigma \rightarrow S^2$  — конечнолистное разветвлённое накрытие сферы ориентированной замкнутой поверхностью  $\Sigma$ , сохраняющее ориентацию. Обозначим через  $\Theta(f)$  минимальный осоедр, множество вершин которого содержит все критические значения накрытия  $f$  и любая мобильная вершина является критическим значением (так что стационарные вершины могут не быть критическими значениями). Пусть  $a_f = a$  — число меридианов осоедра  $\Theta(f)$ . В частности, если  $f$  не имеет критических значений, отличных от полюсов, то  $a_f = 1$  и  $\Theta(f)$  состоит из двух (стационарных) вершин и одного (произвольного) меридиана.

*Графом*  $\Gamma(f)$  *разветвлённого накрытия*  $f: \Sigma \rightarrow S^2$  называется ориентированный граф на поверхности  $\Sigma$ , вершины которого — это, во-первых, прообразы *•*- и *×*-вершин графа  $\Theta(f)$ , называемые, соответственно, *•*- и *×*-вершинами, (*стационарные* вершины), и во-вторых — критические точки накрытия  $f$ , отличные от стационарных вершин, (*мобильные* вершины). Пусть  $\Theta^1 \subset S^2$  — объединение вершин и рёбер осоедра  $\Theta(f)$ . Рёбрами графа  $\Gamma(f)$  являются компоненты прообраза  $f^{-1}(\Theta^1)$ , разрезанного в вершинах графа  $\Gamma(f)$ , причём каждое ребро ориентировано так же и помечено тем же числом, что и его образ в  $\Theta(f)$ . Другими словами,  $\Gamma(f)$  получается из  $f^{-1}(\Theta(f))$  удалением мобильных вершин валентности 2, отличных от особых точек поверхности  $\Sigma$ . (Валентность вершины — число примыкающих к ней рёбер.)

Ясно, что валентности мобильных вершин чётны и не меньше 4, а стационарных — кратны  $a_f$ . Например, для  $n$ -листного разветвлённого накрытия  $f: S^2 \rightarrow S^2$  с двумя критическими точками, лежащими над полюсами,  $a_f = 1$ , как указано выше, и  $\Gamma(f)$  — осоедр, не минимальный при  $n > 1$ .

На рисунках 1, 2 показаны примеры графов  $\Gamma(f)$  и их образов  $\Theta(f)$  для разветвлённых накрытий степеней 2 и 3. На рисунке 2 левая стрелка от-

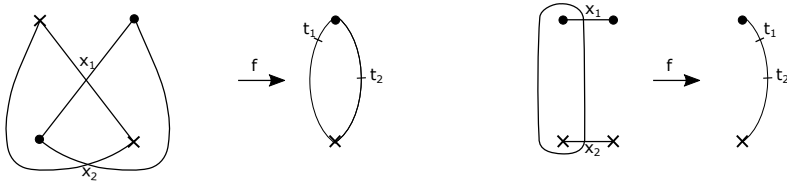


Рис. 1: Графы двулистных разветвлённых накрытий.

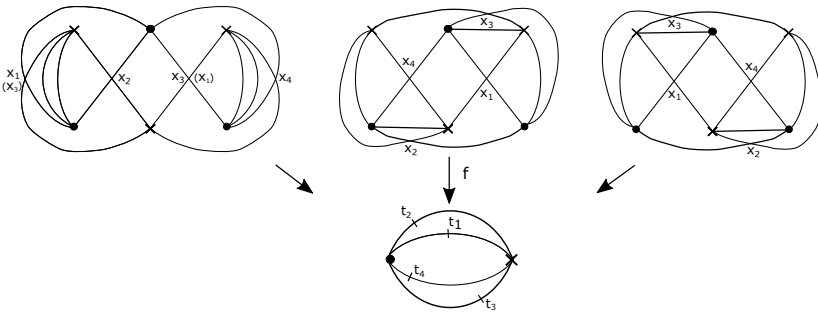


Рис. 2: Графы трёхлистных разветвлённых накрытий.

вечает двум накрытиям, переходящим друг в друга перестановкой вершин  $x_1, x_3$ .

Ясно, что для изоморфных накрытий  $f_1, f_2$  графы  $\Gamma(f_1)$  и  $\Gamma(f_2)$  изоморфны и  $\Theta(f_1) = \Theta(f_2)$ .

**Определение 1.** Осоедральным графом с параметром  $a$  называется конечный ориентированный граф  $\Gamma$ , вложенный в ориентированную замкнутую поверхность  $\Sigma$  и наделённый следующей структурой:

- (1) рёбра графа  $\Gamma$  помечены числами от 1 до  $a$ ;
- (2) все особые точки поверхности являются вершинами графа (*особыми* вершинами);



- (3) вершины графа разбиваются на *стационарные* и *мобильные*, стационарные — на  $\bullet$ - и  $\times$ -вершины ( $\bullet$  и  $\times$  — *метки*, или *цвета* стационарных вершин);
- (4) валентность каждой стационарной вершины кратна  $a$ , а мобильной — чётна;
- (5) все рёбра, примыкающие к  $\bullet$ -вершине ( $\times$ -вершине), выходят из неё (соответственно, входят в неё) и их метки на каждой компоненте поверхности  $\Sigma$  изменяются циклически от 1 до  $a$  при положительном (соответственно, отрицательном) обходе этой вершины, задаваемом ориентацией компоненты поверхности;
- (6) метки всех рёбер, примыкающих к мобильной вершине, одинаковы и задают её *метку*, или *цвет*, причём входящие и выходящие рёбра чередуются на каждой компоненте поверхности;
- (7) каждая грань графа  $\Gamma$  односвязна и имеет на границе по одной  $\bullet$ - и  $\times$ -вершине.

Заметим, что в силу свойств (2) и (7) граф  $\Gamma$  связан.

Для любой грани  $F$  графа  $\Gamma$ , в силу условий (7), (5) и (6),  $\bullet$ - и  $\times$ -вершины разбивают её границу  $\partial F$  на два ориентированных пути:

$$\partial^i F, \quad \partial^{i+1} F;$$

первый путь состоит из рёбер с меткой  $i$ , а второй — с меткой  $(i+1) \bmod a$ .

Объединение всех (открытых) рёбер, помеченных числом  $i$ , и примыкающих к ним мобильных вершин называется  *$i$ -й монохромной частью* графа  $\Gamma$ . Это определение корректно в силу условия (6). Осоздальный граф, отличный от осоздра, называется *минимальным*, если он не содержит мобильных вершин валентности 2 и для любого  $i = 1, \dots, a$  его  $i$ -я монохромная часть содержит мобильную вершину. Путь в графе  $\Gamma$  называется *монохромным*, если он лежит в монохромной части, то есть не проходит через стационарные вершины и все его рёбра помечены одним и тем же числом. Определим бинарное отношение  $\prec$  на множестве мобильных вершин графа:  $u \prec v$ , если существует монохромный ориентированный путь, идущий из  $u$  в  $v$ . Осоздальный граф называется *допустимым*, если отношение  $\prec$  является частичным порядком. Ясно, что отношение  $\prec$  транзитивно, поэтому оно является частичным порядком тогда и только тогда, когда граф  $\Gamma$  не содержит ориентированных монохромных циклов.

Простейшим примером допустимого осоздального графа является осоздр. Пример недопустимого осоздального графа указан на рис. 3 (жирной линией указан ориентированный монохромный цикл). Минимальный допустимый осоздальный граф (с параметром  $a$ ) назовём *осографом* (соответственно,  *$a$ -осографом*).

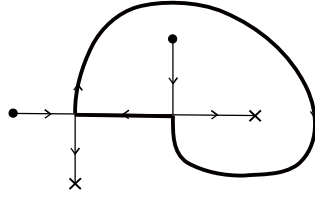


Рис. 3: Недопустимый осоэдральный граф.

Пусть  $\Gamma_1, \Gamma_2$  — осоэдральные графы. отображение  $\varphi: \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$  называется *морфизмом* осоэдральных графов, если оно сохраняет осоэдральную структуру, то есть переводит вершины, рёбра, грани графа  $\Gamma_1$ , соответственно, в вершины, рёбра, грани графа  $\Gamma_2$ , сохраняя тип вершин, ориентации и метки рёбер.

**Теорема 1.** (i) *Осоэдральный граф  $\Gamma$  допустим тогда и только тогда, когда существует морфизм этого графа на осоэдр.*  
(ii) *Граф  $\Gamma$  можно представить графом разветвлённого накрытия сферы тогда и только тогда, когда он является осографом.*  
(iii) *Для данного осографа  $\Gamma$  разветвлённое накрытие  $f$  с  $\Gamma(f) = \Gamma$  определяется с точностью до изоморфности образами мобильных вершин графа  $\Gamma$ , или, что равносильно, критическими значениями накрытия  $f$  с наборами их прообразов.*

**Доказательство.** Для доказательства первого утверждения воспользуемся идеей доказательства аналогичной теоремы [4, теорема 4.11].

Пусть  $\Gamma$  — осоэдральный граф с параметром  $a$ .

Построим морфизм  $f: \Gamma \rightarrow \Theta$ , где  $\Theta$  — осоэдр с  $a$  меридианами, мобильные вершины которого зададим в ходе построения. Морфизм переводит стационарные вершины в стационарные. Расстояние от  $\bullet$ -вершины осоэдра до точки на его меридиане задаёт на каждом меридиане линейный порядок  $<$ . Продолжим частичный порядок  $<$  на множестве вершин  $i$ -й монохромной части графа  $\Gamma$  до произвольного линейного порядка и отображим монотонно это множество на возрастающий набор равноотстоящих друг от друга точек  $i$ -го меридиана осоэдра  $\Theta$ , задав тем самым мобильные вершины осоэдра. Ясно, что полученное отображение продолжается на всю  $i$ -ю монохромную часть. Таким образом, для любой грани  $F$  графа  $\Gamma$  отображение  $f$  задано на обеих частях  $\partial^i F, \partial^{i+1} F$  её границы. Так как  $F$  односвязна,  $f$  продолжается на эту грань, переводя её в двуугольник между  $i$ -м и  $(i + 1)$ -м меридианами на сфере, что завершает построение морфизма  $f$ .

Обратно, линейный порядок  $<$  на  $i$ -м меридиане осоедра  $\Theta$  индуцирует с помощью морфизма  $f: \Gamma \rightarrow \Theta$  частичный порядок на множестве вершин  $i$ -й монохромной части графа  $\Gamma$ . Поэтому  $\Gamma$  допустим.

Докажем второе утверждение.

Пусть  $f$  — разветвлённое накрытие сферы. Поскольку грани графа  $\Theta(f)$  не содержат критических значений функции  $f$ , грани графа  $\Gamma(f)$  односвязны. Справедливость для  $\Gamma(f)$  остальных пунктов определения осоедрального графа сразу следует из определения графа  $\Gamma(f)$ . Поскольку отображение  $f: \Gamma(f) \rightarrow \Theta(f)$  сохраняет ориентацию рёбер, отношение  $<$  на  $i$ -й монохромной части графа  $\Gamma(f)$  индуцировано линейным порядком на  $i$ -м меридиане графа  $\Theta(f)$  и потому является частичным порядком. Следовательно, граф  $\Gamma(f)$  допустим и  $f$  — морфизм. Кроме того, ясно, что  $\Gamma(f)$  минимален и потому является осоедральным.

Обратно, пусть  $\Gamma$  — осоедральное на поверхности  $\Sigma$  и  $f: \Gamma \rightarrow \Theta$  — морфизм, построенный в доказательстве первого утверждения. Можно считать, что  $f$  индуцирован некоторым непрерывным отображением  $\Sigma \rightarrow S^2$ , которое мы также обозначим через  $f$ . Ясно, что точки граней и внутренние точки рёбер являются регулярными точками отображения  $f$ . Поэтому все его критические точки изолированы, и  $f$  является разветвлённым накрытием.

Докажем третье утверждение. Из доказательств первого и второго утверждений следует существование накрытия  $f$  с  $\Gamma(f) = \Gamma$  и с заданными образами мобильных вершин графа  $\Gamma$ . Нумерация  $t_1, \dots, t_k$  полюсов сферы и этих образов задаёт *созвездие*, то есть набор перестановок, порождающих группу монодромии накрытия  $f$  (см. [2, 1.2.3]). Согласно [2, §1.6], граф  $\Gamma$  вместе с точками  $t_1, \dots, t_k$  однозначно определяют это созвездие. Наконец, [2, предложение 1.2.16] даёт изоморфность разветвлённых накрытий сферы с данным созвездием.  $\square$

Для разветвлённого накрытия

$$f: \Sigma \rightarrow S^2$$

той же буквой будем обозначать соответствующий морфизм

$$f: \Gamma(f) \rightarrow \Theta(f).$$

Заметим, что существуют накрытия  $f_1, f_2$  с  $\Gamma(f_1) \cong \Gamma(f_2)$  и  $\Theta(f_1) \not\cong \Theta(f_2)$ , поскольку образы двух несравнимых мобильных вершин одного цвета могут быть разными, а могут совпасть. Наименьшая степень таких накрытий равна 4.

**Замечание 1.** В выборе базового графа на сфере, с помощью которого определяется граф разветвлённого накрытия возможны другие варианты.

Можно построить “широтный” вариант теории, заменив осоедр базовым графом, вершины и рёбра которого лежат на одном меридиане и нескольких параллелях. Такой граф, как и осоедр, связаны с полярными координатами на плоскости — образе сферы при стереографической проекции из полюса. С прямоугольными координатами на этой плоскости связан базовый граф, образованный букетом окружностей на сфере, касающихся друг друга в точке  $\infty$ . С помощью такого базового графа можно, например, описать клеточное разбиение пространства  $N(\Sigma, n)$ , построенное в [5].

**3.2. Преобразования графов.** Для  $i = 0, 1$  пусть  $\Gamma_i$  — осограф на поверхности  $\Sigma_i$  и  $f_i$  — разветвлённое накрытие с  $\Gamma(f_i) = \Gamma_i$ . Назовём осограф  $\Gamma_1$  *возмущением осографа*  $\Gamma_0$ , а осограф  $\Gamma_0$  — *вырождением осографа*  $\Gamma_1$ , если  $f_1$  — возмущение накрытия  $f_0$ .

Ясно, что если  $\Gamma_i$  —  $a_i$ -осограф, то  $a_1 \geq a_0$ .

Операции перехода от  $\Gamma_0$  к  $\Gamma_1$  и обратно также назовём *возмущением* и *вырождением осографа*.

Следующие три вырождения назовём *элементарными*:

- (а) вырождение *mob*( $v_1, v_2$ ), стягивающее в мобильную вершину  $v$  все параллельные ребра, соединяющие две различные смежные мобильные вершины  $v_1, v_2$ ; при этом  $v$  неособа тогда и только тогда, когда  $v_1, v_2$  соединены единственным ребром;
- (б) вырождение *stat*( $v$ ), стягивающее в стационарную вершину все рёбра, соединяющие с мобильной вершиной  $v$  одну или несколько стационарных вершин одного цвета; при этом полученная стационарная вершина неособа тогда и только тогда, когда  $v$  соединена с каждой из указанных стационарных вершин единственным ребром;
- (с) вырождение *edg*, которое вырезает каждую грань  $F$  между  $i$ -й и  $(i + 1)$ -й монокромными частями графа  $\Gamma_1$  и склеивает  $\partial^i F$  с  $\partial^{i+1} F$  так, что никакие две вершины не склеиваются в одну.

Возмущения, обратные к элементарным вырождениям, назовём *элементарными возмущениями*.

Ясно, что элементарные преобразования переводят осографы в осографы, поэтому можно говорить об элементарных преобразованиях накрытий и, более того, их классов изоморфности.

**Предложение 3.** Пусть  $f_1$  — возмущение накрытия  $f_0$ , имеющее область возмущения  $V$  и полученное с помощью  $\text{stat}^{-1}(v_1)$ , где  $v_1$  — критическая точка индекса 2 (то есть  $f_1(v_1)$  — простое критическое значение). Тогда  $f_1$  единственно с точностью до  $(V, w)$ -эквивалентности (см. определение в п. 2.2), где  $w \in V$  — стационарная вершина графа  $\Gamma(f_0)$ .

**Доказательство.** Пусть  $f_2: \Sigma_2 \rightarrow S^2$  — возмущение накрытия  $f_0$ , имеющее ту же область возмущения  $V$  и полученное с помощью  $stat^{-1}(v_2)$ , где  $v_2$  — критическая точка индекса 2. Докажем, что  $f_1, f_2$  являются  $(V, w)$ -эквивалентными.

Выберем в (замкнутом) круге  $V = \bar{U}_w$  (см. обозначения в п. 2.2) замкнутый сектор  $D$ , содержащий точки  $f_1(v_1)$  и  $f_2(v_2)$ . Поскольку  $v_1, v_2$  — критические точки индекса 2, на обеих поверхностях  $\Sigma_1, \Sigma_2$  поверхность  $\tilde{U}_v$  является кругом, если точка  $w$  неособа, и кольцом в противном случае. Поэтому можно считать, что  $\Sigma_1, \Sigma_2$  — это одна и та же поверхность  $\Sigma$ . Вне  $\tilde{U}_v$  накрытия  $f_1, f_2$  совпадают. В  $\tilde{U}_v$  на прообразах граничных радиусов сектора  $D$  эти накрытия, очевидно, гомотопны. Эту гомотопию можно продолжить на прообразы сектора  $D$  и его дополнения в  $V$ , поскольку на всех компонентах этих прообразов, кроме одной, накрытия  $f_1, f_2$  однолиственны, а на оставшейся компоненте двулистно накрывают  $D$  с единственной точкой ветвления.  $\square$

#### §4. Клеточная структура

**4.1. 0-in-граф.** Будем считать осоздр  $\Theta$  подмножеством сферы  $S^2$ , чтобы можно было говорить об углах между меридианами и расстояниях от полюсов до вершин осоздра. Выделим на сфере меридиан, который назовём *нулевым*. Объединение осоздра  $\Theta$  с нулевым меридианом назовём *0-in-осоздром*. В частности, мы считаем, что для минимального 0-in-осоздра без мобильных вершин нулевой меридиан является его единственным ребром. Пусть  $\Gamma$  — осоздральный граф с параметром  $a + 1$ , рёбра которого помечены числами от 0 до  $a$ . Граф  $\Gamma$  назовём *0-in-графом* (точнее, *a-0-in-графом*), если существует морфизм  $f: \Gamma \rightarrow \Theta$ , переводящий 0-ю монохромную часть в нулевой меридиан,  $\Gamma$  не содержит мобильных вершин валентности 2 и для любого  $i = 1, \dots, a$  его  $i$ -я монохромная часть содержит мобильную вершину. Таким образом, 0-in-граф является осографом тогда и только тогда, когда его 0-я монохромная часть содержит хотя бы одну (мобильную) вершину; если же его 0-я монохромная часть не содержит вершин, он будет осографом после её удаления.

Пусть  $\Gamma$  — 0-in-граф. Назовём его *0-in-графом разветвлённого накрытия*  $f$ , если  $\Gamma$  есть объединение графа этого накрытия с прообразом нулевого меридиана. Возмущения/вырождения 0-in-графов определяются с помощью накрытий так же, как и возмущения/вырождения осографов.

**4.2. Отображение L.** Для  $a$ -0-in-графа  $\Gamma$  на поверхности  $\Sigma$  обозначим через  $E_\Gamma$  множество классов изоморфности разветвлённых накрытий  $f: \Sigma \rightarrow S^2$ , 0-in-графы которых изоморфны  $\Gamma$ . Для каждого  $i = 0, 1, \dots, a$

занумеруем мобильные вершины  $i$ -й монокромной части графа  $\Gamma$ , обозначив их через  $v_{ij}$ . Пусть  $\nu_i = \#\{v_{ij}\}$  — число таких вершин и  $k = \sum_i \nu_i$ . Обозначим через  $L_\Gamma: E_\Gamma \rightarrow (S^2)^k$  отображение, переводящее накрытие  $f$  в набор  $f(v_{ij})$  его критических значений, отличных от полюсов.

Если  $\Gamma$  не имеет мобильных вершин, то  $a = 0$  и отображение  $L_\Gamma$  не определено.

Обозначим через  $\sigma: [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow S^2$  параметризацию сферы, где  $\sigma(\lambda, \varphi)$  — точка с долготой  $\lambda$  и широтой  $\varphi$ , причём  $\sigma(0 \times [0, \pi]) = \sigma(2\pi \times [0, \pi])$  — нулевой меридиан, а  $\sigma(0, 0)$  и  $\sigma(0, \pi)$  —  $\bullet$ - и  $\times$ -вершины соответственно. Пусть  $\sigma^k: ([0, 2\pi] \times [0, \pi])^k \rightarrow (S^2)^k$  — произведение параметризаций. Ясно, что сужение отображения  $\sigma^k$  на  $((0, 2\pi) \times (0, \pi))^k$  является топологическим вложением. Обозначим через  $\lambda_{ij} \in [0, 2\pi]$ ,  $\varphi_{ij} \in [0, \pi]$  координаты в  $([0, 2\pi] \times [0, \pi])^k$ , где  $i = 0, 1, \dots, a$ ,  $j = 1, \dots, \nu_i$ .

**Теорема 2.** *Отображение  $L_\Gamma$  — топологическое вложение. Множество  $M = (\sigma^k)^{-1}(L_\Gamma(E_\Gamma)) \cap ([0, 2\pi] \times [0, \pi])^k$  является открытым выпуклым многогранником размерности  $k + a$ .*

**Доказательство.** Если  $L_\Gamma([f_1]) = L_\Gamma([f_2])$ , то множества критических значений накрытий  $f_1$ ,  $f_2$  совпадают и графы  $\Gamma(f_1)$ ,  $\Gamma(f_2)$  изоморфны. Следовательно, по п. 3 теоремы 1  $[f_1] = [f_2]$  и  $L_\Gamma$  инъективно.

Для  $[f] \in E_\Gamma$  внутренность области возмущения  $V$  накрытия  $f$ , очевидно, задаёт окрестность  $\tilde{V}$  точки  $x = L_\Gamma([f])$ . Согласно теореме 1 класс  $[f]$  однозначно определяется графом  $\Gamma$  и набором точек  $f(v_{ij})$ . Поэтому

$$L_\Gamma(E_\Gamma \cap U_{[f], V}) = \tilde{V} \cap L_\Gamma(E_\Gamma).$$

Обратно, любая окрестность  $\tilde{V}$  точки  $x$  задаёт область возмущения  $V$  накрытия  $f$  с  $L_\Gamma(E_\Gamma \cap U_{[f], V}) = \tilde{V} \cap L_\Gamma(E_\Gamma)$ . Учитывая предложение 2, получаем, что  $L_\Gamma$  устанавливает биекцию между базами топологий в точке  $[f]$  и в точке  $x$ . В силу сказанного выше,  $L_\Gamma$  — инъекция, поэтому  $L_\Gamma$  — топологическое вложение.

Из доказательства теоремы 1 следует, что каждый класс  $[f] \in E_\Gamma$  однозначно определяется следующими данными: 1)  $a$  меридианами осоздара  $\Theta(f)$ , причём если  $i$ -й меридиан получается из нулевого поворотом на угол  $x_i$ , то  $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_a < 2\pi$ , и 2) образами мобильных вершин графа  $\Gamma$ , удовлетворяющих условию  $v_{ij} \prec v_{ik} \Leftrightarrow x_{ij} < x_{ik}$ , где  $x_{ij}$  — широта точки  $f(v_{ij})$ . Поэтому, учитывая то, что сужение отображения  $\sigma^k$  на  $((0, 2\pi) \times (0, \pi))^k$ , как отмечено выше, является топологическим вложением, получаем, что  $M$  задаётся в  $([0, 2\pi] \times [0, \pi])^k$  уравнениями  $\lambda_{01} = \lambda_{02} = \dots = \lambda_{0\nu_0} = 0$ ,  $\lambda_{i1} = \lambda_{i2} = \dots = \lambda_{i\nu_i}$ ,  $i = 1, \dots, a$  и указанными

выше неравенствами для долгот и широт образов мобильных вершин графа  $\Gamma$ . Следовательно,  $\overset{\circ}{M}$  является открытым выпуклым многогранником размерности  $k + a$ .  $\square$

**Следствие 1.** *Пространство  $\bar{X}_{\Sigma, n}$  разбивается на открытые клетки  $E_{\Gamma}$ . Для  $a$ -0-ип-графа  $\Gamma$  размерность клетки  $E_{\Gamma}$  равна  $\nu_0 + \sum_{i=1}^a (1 + \nu_i) = k + a$ , где  $\nu_i$  — число мобильных вершин  $i$ -й монохромной части графа  $\Gamma$ .*

**Замечание 2.** Из доказательства теоремы 2 следует, что  $\overset{\circ}{M}$  задаётся в  $([0, 2\pi] \times [0, \pi])^k$  уравнениями и неравенствами для долгот и широт образов мобильных вершин графа  $\Gamma$ , указанными в теореме. Поэтому в качестве координат в  $\overset{\circ}{M}$  можно взять долготы  $x_1 = \lambda_{11}, x_2 = \lambda_{21}, \dots, x_a = \lambda_{a1}$  и широты  $x_{ij} = \varphi_{ij}$  образов мобильных вершин  $v_{ij}$  графа  $\Gamma$ , где  $i = 0, 1, \dots, a$ ,  $j = 1, \dots, \nu_i$ .

**4.3. Характеристическое отображение клетки.** По теореме 2 множество  $\overset{\circ}{M}$  является открытым выпуклым многогранником и потому гомеоморфно открытому шару  $\text{Int } D^{\dim E_{\Gamma}}$ . Обозначим через  $\bar{M}$  замыкание этого множества в  $([0, 2\pi] \times [0, \pi])^k$ . Ясно, что  $\bar{M} \cong D^{\dim E_{\Gamma}}$  — ограниченный замкнутый многогранник.

**Теорема 3.** *Обозначим через  $\bar{E}_{\Gamma}$  объединение клетки  $E_{\Gamma}$  с клетками, отвечающими всем вырождениям 0-ип-графа  $\Gamma$ . Тогда*

- (i)  $\bar{E}_{\Gamma}$  — замыкание клетки  $E_{\Gamma}$ ;
- (ii) *существует характеристическое отображение  $\chi_{\Gamma}: \bar{M} \rightarrow \bar{X}_{\Sigma, n}$  клетки  $E_{\Gamma}$ , то есть  $\chi_{\Gamma}$  переводит  $\bar{M}$  гомеоморфно на  $E_{\Gamma}$ , а  $\partial \bar{M}$  — в объединении клеток размерности  $< \dim E_{\Gamma}$ ;*
- (iii)  $\chi_{\Gamma}(\bar{M}) = \bar{E}_{\Gamma}$ .

**Доказательство.** (i) Пусть  $[f_0]$  — вырождение класса  $[f_1] \in E_{\Gamma}$  и  $V$  — соответствующая область возмущения класса  $[f_0]$ . Для любой другой области возмущения  $V_1$  этого класса композиция  $\psi \circ f_1$ , где  $\psi$  — гомеоморфизм сферы на себя, переводящий  $V$  в  $V_1$ , является возмущением класса  $[f_0]$ , лежащим в  $E_{\Gamma}$  и отвечающим области возмущения  $V_1$ . Поскольку совокупность  $\{U_{[f_0], V}\}_V$  образует базу топологии в точке  $[f_0]$ , эта точка лежит в замыкании клетки  $E_{\Gamma}$ .

Обратно, пусть  $[f_0]$  — точка прикосновения множества  $E_{\Gamma}$ . Тогда для некоторой области возмущения  $V$  класса  $[f_0]$  окрестность  $U_{[f_0], V}$  этой точки пересекается с  $E_{\Gamma}$ . Поэтому  $[f_0] \in \bar{E}_{\Gamma}$ .

(ii) Положим  $\chi_{\Gamma}|_{\bar{M}} = L_{\Gamma}^{-1} \circ \sigma^k: \bar{M} \rightarrow \bar{X}_{\Sigma, n}$  и продолжим  $\chi_{\Gamma}$  на  $\partial \bar{M}$  обратной индукцией по размерности граней многогранника, доказав при этом, что образ каждой открытой грани является клеткой. Пусть на открытую грань  $F_1$  отображение  $\chi_{\Gamma}$  продолжено и  $\chi_{\Gamma}(F_1) = E_{\Gamma_1}$  — клетка. Возьмём

открытую грань  $F_0$ , лежащую на границе грани  $F_1$  с  $\dim F_0 = \dim F_1 - 1$ , и точку  $x \in F_0$ . Чтобы задать класс  $[f_0] = \chi_\Gamma(x)$ , достаточно указать, согласно теореме 1, граф  $\Gamma_0 = \Gamma(f_0)$  и образы его мобильных вершин при отображении  $f_0$ . При этом возможны следующие случаи.

(а) Грань  $F_0$  лежит на границе полупространства  $x_{ij} \leq x_{ik}$  (см. обозначения координат в замечании 2). Из описания образа отображения  $L_\Gamma$  (см. доказательство теоремы 2) следует, что существуют класс  $[f_1] \in E_{\Gamma_1}$  и мобильные вершины  $v_{ij}, v_{ik}$  графа  $\Gamma_1$ , для которых  $f_1(v_{ij}), f_1(v_{ik})$  являются соседними вершинами осоедра  $\Theta(f_1)$ , причём широты последних удовлетворяют неравенству  $x_{ij} < x_{ik}$ . Поэтому  $v_{ij}, v_{ik}$  являются смежными и  $v_{ij} \prec v_{ik}$ . В этом случае граф  $\Gamma_0$  получается из графа  $\Gamma_1$  элементарным вырождением  $mob(v_{ij}, v_{ik})$ , стягивающим все параллельные ребра, соединяющие  $v_{ij}$  с  $v_{ik}$ .

(б) Грань  $F_0$  задаётся уравнением  $x_{i1} = 0$  или  $x_{i\nu_i} = \pi$ . Тогда существуют класс  $[f_1] \in E_{\Gamma_1}$  и такая мобильная вершина  $v$  графа  $\Gamma_1$ , что в осоедре  $\Theta(f_1)$  вершина  $f_1(v)$  смежна с полюсом. Поэтому  $v$  соединена рёбрами либо с одной, либо с несколькими стационарными вершинами одного цвета. Следовательно, граф  $\Gamma_0$  получается из графа  $\Gamma_1$  элементарным вырождением  $stat(v)$ , стягивающим в стационарную вершину все рёбра, соединяющие эти стационарные вершины с  $v$ . При этом если  $\nu_i = 1$ , то в полученном графе  $i$ -я монохромная часть удаляется.

(с) Грань  $F_0$  задаётся уравнением  $x_1 = 0$ ,  $x_i = x_{i+1}$  или  $x_a = 2\pi$ . Тогда граф  $\Gamma_0$  получается из графа  $\Gamma_1$  элементарным вырождением  $edg$ .

Во всех перечисленных случаях элементарные вырождения и координаты точки  $x$  однозначно определяют образы мобильных вершин графа  $\Gamma_0$ . Докажем, что отображение  $\chi_\Gamma$  непрерывно в любой точке  $x \in \partial M$  (и тогда построенное продолжение не будет зависеть от выбора класса  $[f_1] \in E_{\Gamma_1}$  в рассмотренных выше случаях). Пусть  $\chi_\Gamma(x) = [f_0]$ . Внутренность области возмущения  $V$  накрытия  $f_0$ , очевидно, задаёт окрестность  $\tilde{V}$  точки  $L_\Gamma([f_0])$ . Ясно, что  $\chi_\Gamma^{-1}(\bar{E}_\Gamma \cap U_{[f_0], V}) = M \cap (\sigma^k)^{-1}(\tilde{V})$ . Поскольку отображение  $\sigma^k$  непрерывно, множество  $M \cap (\sigma^k)^{-1}(\tilde{V})$  открыто в  $M$ . Остаётся заметить, что  $\{\bar{E}_\Gamma \cap U_{[f_0], V}\}_V$  — база в точке  $[f_0]$  согласно предложению 2. Поэтому  $\chi_\Gamma$  непрерывно в точке  $x$ . Утверждение (iii) сразу следует из (i) и (ii).  $\square$

Грань  $F$  многогранника  $M$  из доказательства теоремы назовём *исключительной*, если она задаётся уравнениями  $x_{i1} = x_{i2} = \dots = x_{i\nu_i} = 0$  или  $x_{i1} = x_{i2} = \dots = x_{i\nu_i} = \pi$ , где  $i \in A \subset \{1, 2, \dots, a\}$ ,  $A \neq \emptyset$ . Исключим из  $([0, 2\pi] \times [0, \pi])^k$  множители, отвечающие координатам

$$\lambda_{ij}, \quad \varphi_{ij}, \quad i \in A, j = 1, \dots, \nu_i$$



и обозначим через  $\text{pr}_A$  проекцию произведения  $([0, 2\pi] \times [0, \pi])^k$  на полученное пространство. Ясно, что каждой исключительной грани отвечает допустимый осоздальный граф, у которого  $i$ -е монохромные части для  $i \in A$  не содержат мобильных вершин, а после удаления этих частей получается 0-in-граф. Элементарные вырождения таких графов определяются так же, как и элементарные вырождения осографов.

**Предложение 4.** *Для каждой исключительной грани  $F$  многогранника  $M$  существуют неисключительные грани этой грани, образы которых при проекции  $\text{pr}_A$  равны  $\text{pr}_A(F)$ . Это те и только те грани, 0-in-граф которых получается из указанного выше осоздального графа грани  $F$  удалением  $i$ -х монохромных частей для  $i \in A$ .*

**Доказательство.** Для доказательства достаточно применить ко всем  $i$ -м монохромным частям,  $i \in A$ , графа  $\Gamma$ , отвечающего грани  $F$ , элементарные вырождения *edg*.  $\square$

**Замечание 3.** Пусть  $F$  — любая грань многогранника  $M$ . Из доказательства теоремы, очевидно, следует, что если  $F$  — неисключительная грань, то сужение отображения  $\chi_\Gamma$  на  $F$ , а если  $F$  — исключительная грань, то отображение  $\chi_\Gamma \circ \text{pr}_A^{-1} : \text{pr}_A(F) \rightarrow \bar{X}_{\Sigma, n}$  является характеристическим отображением некоторой клетки, лежащей на границе клетки  $E_\Gamma$ . Кроме того, для исключительной грани  $F$  имеем  $\dim \text{pr}_A(F) = \dim F - |A|$ , где  $|A|$  — число элементов множества  $A$ .

Из доказательства теоремы очевидно вытекает следующее утверждение.

**Следствие 2.** *Любое возмущение/вырождение осографа есть композиция элементарных возмущений/вырождений.*

**Следствие 3.** *Пространство  $\bar{X}_{\Sigma, n}$  является конечным клеточным пространством и потому компактным.*

**Доказательство.** Ясно, что при фиксированном  $n$  число графов разветвлённых накрытий степени  $n$  конечно.  $\square$

Следствие 3 даёт доказательство компактности пространства  $\bar{X}_{\Sigma, n}$ , независимое от [6, теорема 2.5].

Зафиксируем различные точки  $w_1, \dots, w_r \in S^2$  и разбиения  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  числа  $n$ . Положим  $w = (w_1, \dots, w_r)$ ,  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ . Пусть  $H(\Sigma, n, w, \lambda) \subset X_{\Sigma, n}$  — множество классов разветвлённых накрытий  $f$ , для которых все критические значения в  $S^2 \setminus \{w_1, \dots, w_r\}$  простые, а  $\lambda_i$  — набор локальных кратностей накрытия  $f$  в точках  $f^{-1}(w_i)$ . При  $r = 0$  имеем  $H(\Sigma, n, w, \lambda) =$

$H(\Sigma, n)$ . Пространство  $H(\Sigma, n, w, \lambda)$ , вообще говоря, несвязно (см., в частности, [2, пример 5.5.8]). Все накрытия в  $H(\Sigma, n, w, \lambda)$  имеют одинаковые наборы кратностей  $k_1, \dots, k_r$  критических значений  $w_1, \dots, w_r$ .

Пусть  $H_w$  — любая компонента связности пространства  $H(\Sigma, n, w, \lambda)$ . Из утверждений 1, 3 теоремы 3 получаем следующее утверждение.

**Следствие 4.** *Замыкание  $\bar{H}_w$  множества  $H_w$  в  $\bar{X}_{S,n}$  является клеточным подпространством.*

Для  $[f] \in \bar{H}_w$  включим критические значения  $w_1, \dots, w_r$  в множество стационарных значений, а их прообразы — в множество стационарных вершин графа  $\Gamma(f)$ . Назовём нулевой меридиан и меридианы, проходящие через  $w_1, \dots, w_r$ , *стационарными*. *Монохромной частью* графа  $\Gamma(f)$  назовём прообраз открытой дуги меридиана, соединяющей два стационарных значения. Заметим, что преобразование  $stat(v)$  (см. п. 3.2) применимо и к новым стационарным вершинам.

**4.4. Клеточная структура пространства  $\bar{X}_{S^2,2}$ .** Рассмотрим простейший случай двулистных разветвлённых накрытий сферы сферой и укажем в качестве примера клеточное разбиение пространства  $\bar{X}_{S^2,2}$ . Обозначим через  $P^2 \cong \mathbb{C}P^2$  симметрический квадрат сферы  $S^2$ , то есть факторпространство пространства  $(S^2)^2$  по перестановке координат. Согласно [6, п. 3.7] отображение  $LL: \bar{X}_{S^2,2} \rightarrow P^2$ , для которого образом класса изоморфности  $[f]$  накрытия  $f$  является множество, состоящее из критических значений этого накрытия, взятых с их кратностями, есть гомеоморфизм. Поэтому клеточную структуру пространства  $\bar{X}_{S^2,2}$  можно описать на языке осоедров. Но для полноты мы указываем и соответствующие осоеграфы (см. рис.4). На рисунке клетки обозначены через  $e_{cr}^i$ , где  $i$  размерность клетки, а  $cr$  характеризует набор кратностей критических значений; серыми линиями изображены букеты сфер, жирными линиями — нулевой меридиан и его прообраз, тонкими линиями — остальные меридианы и их прообразы. Числа под меридианами указывают кратности критических значений.

Двумерный остов состоит из трёх касающихся друг друга сфер — замыканий клеток  $e_{020}^2, e_{110}^2, e_{011}^2$  и плоского криволинейного треугольника  $e_{0110}^2$ . Точки касания являются 0-клетками; они соединяются кратчайшими дугами на сферах — 1-клетками, являющимися сторонами треугольника  $e_{0110}^2$ .

Клетка  $e_{ri}^3$  примыкает к  $e_{110}^2, e_{011}^2$  и с четырёх сторон к  $e_{0110}^2$ , клетка  $e_{ii}^3$  примыкает к  $e_{020}^2, e_{110}^2, e_{011}^2$  и с двух сторон к  $e_{0110}^2$ . Клетка  $e^4$  примыкает с двух сторон как к  $e_{ri}^3$ , так и к  $e_{ii}^3$ .

Подпространство  $\bar{X}_{S^2,2} \setminus X_{S^2,2} = e_{020}^2 \cup e_{020}^1 \cup e_{20}^0 \cup e_{02}^0$  является замыканием клетки  $e_{020}^2$  и состоит из классов изоморфности накрытий, область определения которых — особая поверхность — букет двух сфер.

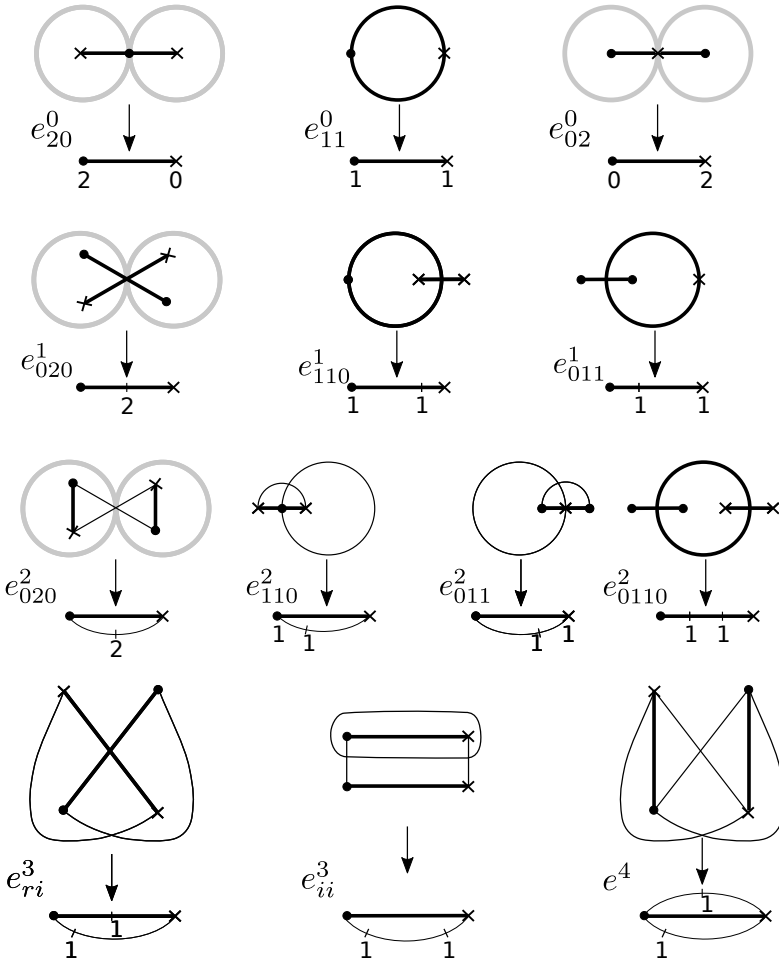


Рис. 4: Клетки пространства  $\bar{X}_{S^2,2}$ .

Для сравнения, построенное в [5] более экономное клеточное разбиение пространства  $\bar{X}_{S^2,2}$ , состоит из 0-клетки, двух 2-клеток, 3-клетки и 4-клетки. Графы соответствующих накрытий лежат на сфере или букете двух сфер и являются прообразами  $a$  вертикальных прямых на  $\mathbb{C} \cup \infty$ ,  $a = 0, 1, 2$ , с лежащими на них критическими значениями накрытия.

**4.5. Отступление: слабо полиэдральное клеточное пространство.**

Запись  $F < M$  будет обозначать то, что многогранник  $F$  является собственной гранью многогранника  $M$ .

**Определение 2.** Пусть  $X$  — оснащённое клеточное пространство, то есть клеточное пространство вместе с выбранным для каждой (замкнутой) клетки  $E$  характеристическим отображением  $\chi_E: D_E \rightarrow X$ . Будем считать, что

- (i)  $D_E$  — компактный выпуклый многогранник размерности  $d = \dim E$ ;
- (ii) для любой грани  $F < D_E$  существуют такие клетка  $E_1 \subset \partial E$  размерности  $\leq \dim F$  и линейное сюръективное отображение  $p_{E,F}: F \rightarrow D_{E_1}$ , переводящее грань в грань, что  $\chi_E|_F = \chi_{E_1} \circ p_{E,F}$  (при этом разным граням многогранника  $D_E$  может отвечать одна и та же клетка  $E_1$ );
- (iii) для граней  $F' < F < D_E$  и  $F_1 = p_{E,F}(F') < D_{E_1} = p_{E,F}(F)$  выполнено равенство  $p_{E,F'} = p_{E_1,F_1} \circ (p_{E,F}|_{F'})$ .

Тогда  $X$  называется *слабо полиэдральным клеточным пространством*.

В силу перечисленных условий области определения характеристических отображений всех клеток пространства  $X$  можно склеить с помощью приклеивающих отображений  $p_{E,F}$ . Ясно, что полученное пространство гомеоморфно  $X$ .

**Предложение 5.** *Пространство  $\bar{H}_w$  и его подпространство  $\bar{H}_w \setminus H_w$  является слабо полиэдральными.*

**Доказательство.** По следствию 4 пространство  $\bar{H}_w$  клеточное и по теореме 3 оснащённое. Для его клетки  $E$  и грани  $F < D_E$  пусть  $p_{E,F}$  — сужение на  $F$  проекции  $\text{rg}_A$  из предложения 4, причём  $A = \emptyset$  и  $p_{E,F} = \text{id}$ , если грань  $F$  неисклительная. Условия предыдущего определения выполнены: (i) очевидно; (ii) следует из замечания 3 и того, что  $\text{rg}_A$  переводит, как видно из доказательства теоремы 3, грань в грань; (iii) — из равенства  $\text{rg}_B \circ \text{rg}_A = \text{rg}_{A \cup B}$  для  $B \subset \{1, 2, \dots, a\} \setminus A$ . То же верно и для  $\bar{H}_w \setminus H_w$ .  $\square$

4.5.1. *Триангуляция слабо полиэдрального клеточного пространства.*

**Лемма 1.** *Пусть  $D$  — компактное выпуклое множество в евклидовом пространстве,  $\chi: D \rightarrow E$  — непрерывная сюръекция на хаусдорфово пространство, являющаяся гомеоморфизмом на внутренности  $\text{Int } D$  множества  $D$ , и  $C = \text{Cyl } \chi|_{\partial D}$  — цилиндр сужения отображения  $\chi$ . Тогда существует гомеоморфизм  $f: D \cup C \rightarrow E$ .*

**Доказательство.** Выберем точку  $O \in \text{Int } D$  и рассмотрим гомотегию  $h_t: D = D_1 \rightarrow D_t$  с центром в точке  $O$  и коэффициентом  $t$ . Учитывая отождествление  $(x, 0)$  с  $x$  и  $(x, 1)$  с  $\chi(x) \forall x \in \partial D$  в  $C$ , положим  $f(z) = \chi(h_{1/2}(z)), z \in D$  и  $f(z) = \chi(h_{(1+t)/2}(x)), z = (x, t) \in C$ . Ясно, что  $D \cup C$  компактно,  $f$  — непрерывная биекция и, следовательно, гомеоморфизм, так как  $E$  хаусдорфово.  $\square$

**Теорема 4.** Слабо полиэдральное клеточное пространство  $X$  триангулируемо.

**Доказательство.** Для каждой клетки  $E$  выберем точку  $a_E \in \text{Int } D_E$ , а для каждой грани  $F < D_E$  и отвечающей ей клетки  $E_1$  точку  $a_F \in \text{Int } F$  с  $p_{E,F}(a_F) = a_{E_1}$ . Звёздные измельчения с центрами в этих точках дают триангуляцию всех многогранников  $D_E$ . По лемме 1 для триангуляции замкнутой клетки  $E$  достаточно триангулировать пространство  $D_E \cup \text{Cyl } \chi_E|_{\partial D_E}$ . Воспользуемся триангуляцией цилиндра симплициального отображения, предложенной в [13, п. 4]. Она заведомо определена после ещё одного звёздного измельчения всех многогранников  $D_E$ .

В силу условий (ii) и (iii) определения 2 триангуляции клеток индуцируют совпадающие триангуляции на их пересечениях и потому задают триангуляцию пространства  $X$ .  $\square$

**Предложение 6.** Пусть  $X$  — слабо полиэдральное клеточное пространство с триангуляцией, указанной в доказательстве теоремы 4,  $Y$  — его клеточное подпространство и  $N$  — (симплициальная) открытая регулярная окрестность этого подпространства. Тогда  $X \setminus N$  — симплициальное подпространство пространства  $X$ , являющееся деформационным ретрактом пространства  $X \setminus Y$ .

**Доказательство.** Из построения триангуляции пространства  $X$  следует, что если все вершины некоторого симплекса лежат в  $Y$ , то и весь симплекс лежит в  $Y$ . Поэтому [12, лемма 70.1] даёт требуемое утверждение.  $\square$

4.5.2. *Двойственное разбиение.* Всюду в этом пункте  $X$  — триангулированное пространство.

*Двойственным разбиением* пространства  $X$  назовём его разбиение на барицентрические звезды (см. [8, п. 2.2.6.6] или [9, п. 8.3]). Объединение звёзд размерности не выше  $t$  назовём  *$t$ -мерным остовом двойственного разбиения*.

Следующее замечание следует из того, что линк симплекса гомеоморфен барицентрическому линку этого симплекса (см. [8, п. 2.2.6.7]).

**Замечание 4.** Пусть в  $X$  линки тех симплексов, которые имеют размерность  $\dim X - 2$ , линейно связны. Тогда

- если размерность открытой звезды из двойственного разбиения пространства  $X$  не больше 2, то звезда является клеткой;
- двумерный остов  $\text{Sk}_2 DX$  двойственного разбиения пространства  $X$  является клеточным пространством.

**Теорема 5.**  $\pi_1(X) = \pi_1(\text{Sk}_2 DX)$ .

**Доказательство.** Поскольку  $X$  триангулировано, можно считать, что образ гомотопии петель не заполняет всю  $d$ -мерную звезду при  $d > 2$ . Поэтому гомотопию можно стянуть на  $\text{Sk}_2 DX$ .  $\square$

#### 4.6. Двойственное разбиение пространства $\bar{H}_w$ .

**Теорема 6.** *В пространстве  $\bar{H}_w$  линки симплексов, имеющих размерность  $\dim_{\mathbb{R}} \bar{H}_w - 2$ , линейно связны.*

**Доказательство.** Пусть  $s \subset \bar{H}_w$  — симплекс размерности  $\dim_{\mathbb{R}} \bar{H}_w - 2$ .

Для доказательства достаточно любые два симплекса  $s_1, s_2 \subset \bar{H}_w$  размерности  $\dim_{\mathbb{R}} \bar{H}_w$ , примыкающие к  $s$ , соединить цепочкой таких же симплексов, в которой последовательные симплексы пересекаются по граням размерности  $\dim_{\mathbb{R}} \bar{H}_w - 1$ , примыкающим к  $s$ . Таким образом, задача локальна в том смысле, что в малой окрестности точки  $[f]$  из открытой части симплекса  $s$  достаточно найти путь, соединяющий точки  $[f_i] \in s_i, i = 1, 2$ . Ясно, что в качестве накрытий  $f_i$  можно взять возмущения накрытия  $f$ . Ниже мы выберем общую область возмущения накрытия  $f$ , с помощью которой получаются  $f_1, f_2$ . В силу следствия 1 в сфере — образе накрытия  $f$  — возможны следующие случаи.

(i) Имеются два мобильных меридиана, содержащих по два простых мобильных значения.

(ii) Имеются мобильный меридиан, содержащий два простых мобильных значения, и стационарный меридиан, содержащий (одно) простое мобильное значение.

(iii) Имеются два стационарных меридиана (возможно совпадающих), содержащих по одному простому мобильному значению.

(iv) Имеется одно двукратное мобильное значение.

(v) Имеется одно стационарное значение, возмущение которого даёт два стационарных и одно простое мобильное значение.

Во всех случаях выберем непересекающиеся круги на сфере, каждый из которых содержит ровно одно указанное значение. Эти круги определяют область возмущения накрытия  $f$ . В первых четырёх случаях существование пути, соединяющего точки  $[f_i] \in s_i, i = 1, 2$ , следует из предложения 1, а в последнем случае — из предложения 3.  $\square$

Следующий результат сразу получается из предложения 6, замечания 4 и теорем 5, 6.

**Следствие 5.** *Пусть  $Y \subset \bar{H}_w$  — клеточное подпространство (например,  $Y = \bar{H}_w \setminus H_w$ ). Удалим из  $\bar{H}_w$  открытые звёзды всех симплексов, лежащих в  $Y$ . Получим симплицитальное подпространство, двумерный остов двойственного разбиения которого является клеточным пространством.*

Фундаментальная группа этого остова совпадает с фундаментальной группой пространства  $\bar{H}_w \setminus Y$ .

Следующее предложение в дальнейшем не используется и приведено для полноты.

**Предложение 7.**  $\bar{H}_w$  является псевдомногообразием, то есть размерностно однородным, неразветвлённым, сильно связным симплицальным пространством (см. [9, п. 8.1]).

**Доказательство.** Пусть  $d = \dim \bar{H}_w$ . Размерностная однородность следует из того, что любая клетка размерности  $< d$  очевидно лежит на границе  $d$ -мерной клетки. В то время как клетка может лежать на границе единственной клетки, любой  $(d - 1)$ -мерный симплекс является гранью ровно двух  $d$ -мерных симплексов в силу указанного выше построения триангуляции пространства  $\bar{H}_w$ , то есть это пространство является неразветвлённым. Согласно следствию 5, из связности пространства  $\bar{H}_w$  следует связность одномерного остова двойственного разбиения этого пространства, что и означает его сильную связность.  $\square$

## §5. Тригональные кривые

Пусть  $S_e$  — (комплексная) поверхность Хирцебруха, то есть рациональная линейчатая поверхность,  $q: S_e \rightarrow \mathbb{C}P^1$  — соответствующее  $\mathbb{C}P^1$ -расслоение с исключительным сечением  $s$ ,  $s^2 = -e < 0$ . Слои расслоения  $q$  называются *вертикальными прямыми*.

При стягивании исключительного сечения в точку поверхность  $S_e$  превращается во взвешенную проективную плоскость  $P(1, 1, e)$  с координатами  $x_0, x_1, y$ , имеющими веса  $1, 1, e$  (см., например, [11, п.1.2.3]). В дальнейшем удобно считать, что эти координаты определены на самой поверхности  $S_e$ . Кривая  $C \subset S_e$ , задаваемая уравнением

$$y^3 + b(x)y + w(x) = 0, \quad (1)$$

где  $x = (x_0, x_1)$ , а  $b$  и  $w$  — однородные многочлены степеней  $2e$  и  $3e$ , называется *тригональной кривой*. При этом мы допускаем случаи  $b = 0$ ,  $w = 0$ , но не  $b = w = 0$ . Многочлены  $b, w$  определяются кривой  $C$  однозначно с точностью до преобразования

$$(b, w) \mapsto (t^2b, t^3w), \quad t \in \mathbb{C}^*, \quad (2)$$

поэтому множество всех тригональных кривых на  $S_e$  есть взвешенное проективное пространство  $T_e = P(2, \dots, 2, 3, \dots, 3) = P(2_{2e+1}, 3_{3e+1})$  комплексной размерности  $5e + 1$ .

Обозначим через  $d = 4b^3 + 27w^2$  дискриминант по  $y$  уравнения (1).

Обобщением тригональной кривой является *трёхчленная кривая* на поверхности  $S_e$ , задаваемая уравнением  $y^n + b(x)y^{n-k} + w(x) = 0$ , где  $1 \leq k < n$ ,  $\text{НОД}(k, n) = 1$ , а  $b$  и  $w$  — однородные многочлены степеней  $ke$  и  $pe$ . Пусть  $d(x) = n^n w^k - (-1)^n (n-k)^{n-k} k^k b^n$  при  $n > k$  и  $d(x) = w + b$  при  $n = k = 1$ . Все результаты, полученные ниже для тригональных кривых, переносятся, с точностью до обозначений, на трёхчленные кривые.

Следующие леммы доказываются стандартным вычислением.

**Лемма 2.** *Точка  $(x, y) \in C$  является особой тогда и только тогда, когда либо  $2y^3 = w(x) \neq 0$  и  $x$  — кратный корень многочлена  $d$ , не являющийся корнем многочленов  $b, w$ , либо  $y = 0$ ,  $x$  — корень многочлена  $b$  и кратный корень многочлена  $w$ .*

**Лемма 3.** *Пусть  $x$  — общий корень многочленов  $b, w$ . Точка  $(x, y) \in C$  неособа тогда и только тогда, когда  $x$  — простой корень многочлена  $w$ . При этом  $(x, y)$  является точкой трёхкратного пересечения с вертикальным слоем, называемой точкой вертикального перегиба.*

Следуя [10, 3.3.1], назовём неособую тригональную кривую  $C \subset S_e$  *общей*, если  $b, w$  не имеют общих корней и все корни этих многочленов простые, и *почти общей*, если выполнено только первое из этих двух условий.

**5.1.  $j$ -инвариант тригональной кривой.** Функция  $j_C: \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ ,  $j_C = \frac{4b^3}{d} = 1 - \frac{27w^2}{d}$ , называется  *$j$ -инвариантом* кривой  $C$ .

Если  $b, w$  не имеют общих корней, то степень отображения  $j_C$  равна  $6e$ . В общем случае эта степень  $s = 6e - \deg \text{НОД}(b^3, w^2)$  задаёт стратификацию  $\{T_{e,s}\}$  пространства  $T_e$ . Неособые кривые старшего страта  $T_{e,6e}$  образуют множество всех почти общих кривых.

**Предложение 8.** *Множество  $T_{e,6e}$  связно.*

**Доказательство.** Множество  $T_{e,6e}$  задаётся в связном пространстве  $T_e$  неравенством нулю результата многочленов  $b, w$  и потому связно.  $\square$

**5.2. Кривые с постоянным  $j$ -инвариантом.** Следуя [4, п. 3.1.1], назовём кривые  $C \in T_{e,0}$ , то есть кривые с постоянным  $j$ -инвариантом, *изотривиальными*, а с непостоянным — *неизотривиальными*.

**Замечание 5.** Согласно [7], пространство  $T_e = \mathbb{P}(2e+1, 3e+1)$  имеет особенности в точках, у которых либо  $2e + 1$  первых, либо  $3e + 1$  последних координат равны 0, то есть в точках, отвечающих тригональным кривым с  $b = 0$  или  $w = 0$ . Поэтому пространство  $T_e \setminus T_{e,0}$  неизотривиальных кривых является неособым многообразием.

Следующее утверждение очевидно.



**Предложение 9.** Множество  $T_{e,0}$  есть объединение подпространств  $b = 0$ ,  $w = 0$  и подмногообразия, состоящего из кривых с  $b = \lambda a^2$ ,  $w = \mu a^3$ , где  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  и  $a$  — многочлен степени  $e$ .  $\square$

**5.3. Данные Римана тригональной кривой.** Для неизотривиальной тригональной кривой  $C$  в осоедре  $\Theta(j_C)$  добавим к его стационарным вершинам  $0$  ( $\bullet$ -вершина) и  $\infty$  ( $\times$ -вершина) точку  $1$  и назовём её  $o$ -вершиной. Обозначим через  $[0, \infty]_C$  подграф графа  $\Theta(j_C)$ , состоящий из нулевого меридиана и лежащих на нём вершин, включая полюсы. *Графом*  $\Gamma(C)$  *тригональной кривой*  $C$  назовём граф  $\Gamma(j_C) \cup j_C^{-1}([0, \infty]_C)$ . При этом все корни многочлена  $w$  называются  $o$ -вершинами и добавляются к стационарным вершинам объединения, а возможные на  $0$ -й монохромной части мобильные вершины степени  $2$  удаляются. Таким образом,  $\Gamma(C)$  —  $0$ -in-граф и осограф.

Напомним, что по определению (см. п. 2.2) индекс точки  $v$  на сфере — области определения  $j$ -инварианта — равен  $\deg_v j_C$ . Поэтому индекс мобильной и  $o$ -вершины графа  $\Gamma(C)$  равен половине её валентности, стационарной — её валентности, делённой на  $a_{j_C}$ .

Из определения  $j$ -инварианта следует, что для  $C \in T_{e,6e}$  индексы  $\bullet$ -вершин  $\equiv 0 \pmod 3$  и  $o$ -вершин  $\equiv 0 \pmod 2$ .

Пусть  $\text{cr}(C)$  — мультимножество, состоящее из всех критических значений функции  $j_C$ , взятых с их кратностями, (то есть функция, задаваемая условием  $t \mapsto \sum_{x \in f^{-1}(t)} (\text{ind } x - 1)$ , где  $t$  — критическое значение функции  $j_C$ , а  $\text{ind}$  — индекс точки  $x$ ). Пару  $(\Gamma(C), \text{cr}(C))$  назовём *данными Римана кривой*  $C$  (ср. [2, п. 1.8]).

Пусть  $\Gamma$  —  $a$ - $0$ -in-граф и  $f: \Gamma \rightarrow \Theta$  — морфизм на  $0$ -in-осоедр. Одну из внутренних точек нулевого меридиана назовём  $o$ -вершиной. Добавим её к стационарным вершинам осоедра  $\Theta$  и назовём все её прообразы в  $\Gamma$  стационарными  $o$ -вершинами. Граф  $\Gamma$  назовём  $o$ -графом (точнее,  $a$ - $o$ -графом). Ясно, что граф тригональной кривой является  $o$ -графом. Назовём  $\bullet$ -вершину (соответственно,  $o$ -вершину)  $o$ -графа *исключительной* (ср. [4, 3.1.2]), если её индекс  $\not\equiv 0 \pmod 3$  (соответственно,  $\not\equiv 0 \pmod 2$ ).

Мультимножество  $\text{cr}$  точек сферы и  $o$ -граф  $\Gamma$  назовём *согласованными*, если существует морфизм  $f: \Gamma \rightarrow \Theta$ , где  $\Theta$  — осоедр, определяемый мультимножеством  $\text{cr}$ , причём кратность каждой точки  $t \in \text{cr}$  равна  $\sum_{x \in f^{-1}(t)} (\text{ind } x - 1)$ .

Следующая конструкция восстанавливает неизотривиальную тригональную кривую по её данным Римана. Пусть задано натуральное число  $e$ ,  $a$ - $o$ -граф  $\Gamma$  с  $(a+1)s$  гранями, где  $s \leq 6e$ , и согласованное с  $\Gamma$  мультимножество  $\text{cr}$  точек сферы. Поскольку  $\Gamma$  — осограф, по теоремам 1, [1, теорема 3] существует рациональная функция  $j = b_1/d_1 = 1 - w_1/d_1$  степени  $s$

с  $\text{НОД}(b_1, w_1) = 1$ , с  $\Gamma(j) = \Gamma$  и с мультимножеством критических точек ст. Поскольку  $j$  не постоянна, согласно [4, теорема 3.20, замечание 3.21] существует многочлен  $g$ , все корни которого с их кратностями — это исключительные вершины графа  $\Gamma$ , и существуют многочлены  $b, w$  с  $b_1g = 4b^3$ ,  $w_1g = 27w^2$ ,  $\deg b = 2e$ ,  $\deg w = 3e$ . Они задают неизотривиальную тригональную кривую  $C \in T_{e,s}$ , для которой  $j = j_C$ ,  $g = \text{НОД}(b^3, w^2)$  и  $\Gamma = \Gamma(C)$ .

Кривая  $C$  единственна с точностью до действия группы  $G = PGL(2, \mathbb{C})$ , а многочлены  $b, w$  определены однозначно с точностью до преобразования (2). Поэтому множество данных Римана тригональных кривых можно отождествить с фактор-пространством  $RD_e = (T_e \setminus T_{e,0})/G$ . Ясно, что его комплексная размерность равна  $5e - 2$ . Обозначим через  $rd: T_e \setminus T_{e,0} \rightarrow RD_e$  сужение на  $T_e \setminus T_{e,0}$  проекции  $pr: T_e \rightarrow T_e/G$ .

Следующий пример показывает, что пространство данных Римана не хаусдорфово. Возьмём данные Римана с графом, указанным на рис. 6.a (на этом и следующих рисунках считается, что граф  $\Theta(j)$  раскрашен как на рис. 5), и устремим  $j(x_2)$  к  $j(x_1) = 0$ . В пределе получим данные Римана

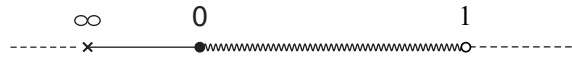


Рис. 5: Раскраска вещественной проективной прямой.

как с графом 6.b, так и с графом 6.c. Действительно, если для тригональной кривой  $C$  на рис. 6.a считать, что  $\bullet$ -вершина  $x_1$  равна 0,  $\circ$ -вершина внутри кривой  $S_1$  равна  $t^2$ , а вторая  $\bullet$ -вершина находится на  $\infty$ , то в аффинных координатах  $j_C(x) = \frac{4x^3}{4x^3 + 27w_0(x-t^2)^2(x-\lambda)^2(x-\mu)^2}$ . С другой стороны,  $j$ -инвариант кривой  $C_t$ , полученной из  $C$  дробно-линейным преобразованием  $x \mapsto t^2x/((1-t)x+t)$  и потому лежащей вместе с  $C$  в одной орбите группы  $PGL(2, \mathbb{C})$ , равен  $\frac{4x^3(x-tx+t)^3}{4x^3(x-tx+t)^3 + 27w_0(x-1)^2(\lambda x + o(t))^2(\mu x + o(t))^2}$ . Поэтому при  $t \rightarrow 0$  эта орбита приближается к кривым с графами 6.b и 6.c.

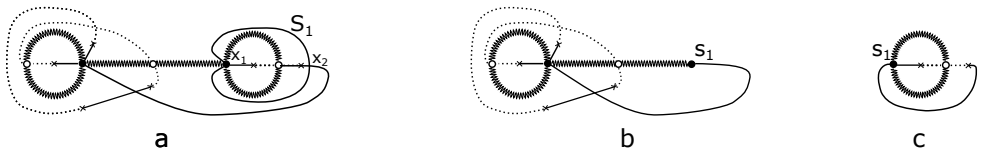


Рис. 6: Вырождения  $\bullet$ -вершины графа а в исключительные вершины графов б и с.

**5.4. Компактификация старшего страта пространства данных Римана тригональных кривых.** Назовём поверхность, являющуюся вырождением сферы, *поверхностью рода 0*. Свяжем с такой поверхностью граф, вершинами которого являются особые точки поверхности (*s-вершины*) и её компоненты (*c-вершины*), а рёбра соединяют компоненты с лежащими на ней особыми точками. Для особой поверхности этот граф является двудольным. Назовём его *cs-графом поверхности рода 0*.

Обозначим через  $F_n$  пространство комплексных рациональных функций  $f: \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$  степени  $n$  и через  $\mathcal{X}_n$  — фактор-пространство  $F_n/PGL(2, \mathbb{C})$ . Пусть  $J_e$  — это множество классов изоморфности  $j$ -инвариантов кривых из  $T_{e,6e}$ . В силу сказанного в п. 5.3 и [1, теорема 3], оно гомеоморфно  $rd(T_{e,6e})$  и  $J_e \subset \mathcal{X}_{6e}$ . Замыкание  $\bar{J}_e \subset \bar{\mathcal{X}}_{6e}$  этого множества состоит из классов  $[j]$ , где  $j$  — разветвлённое накрытие степени  $6e$ , в графе  $\Gamma(j)$  которого число  $\bullet$ -вершин  $\leq 2e$ , а число  $\circ$ -вершин  $\leq 3e$ . Поэтому  $\bar{J}_e$  — *клеточное подпространство пространства  $\bar{\mathcal{X}}_{6e}$*  в силу следствия 4, поскольку  $\bar{J}_e = \bar{H}_w$ , где  $w = (\bullet, \circ)$ .

Определим теперь кривую  $C$ , составленную из тригональных кривых, базой которой является особая рациональная кривая. Пусть эта рациональная кривая распадается на неприводимые компоненты  $L_1, \dots, L_m$ . Для  $i = 1, \dots, m$  рассмотрим поверхности Хирцебруха  $S_{e_i}$  с базой  $L_i$  и тригональные кривые  $C_i \subset S_{e_i}$ , удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) над общей точкой компонент  $L_i, L_l$  имеется общий слой поверхностей  $S_{e_i}, S_{e_l}$ , который пересекает каждую из кривых  $C_i, C_l$  в их общей трёхкратной особой точке  $(x_{il}, 0)$ ;
- 2)  $j$ -инварианты кривых  $C_i, C_l$  совпадают в точке  $x_{il}$ . Легко проверить, что при этих условиях точка  $x_{il}$  является общим корнем многочленов  $\text{НОД}(b_i^3, w_i^2), \text{НОД}(b_l^3, w_l^2)$ , где  $b_i, w_i$  и  $b_l, w_l$  — многочлены, задающие кривые  $C_i$  и  $C_l$ . Назовём кривую  $C = \bigcup_{i=1}^m C_i$  *составной (точнее,  $m$ -составной) тригональной кривой* с базой  $L = \bigcup_{i=1}^m L_i$ . Тригональная кривая с неособой базой является 1-составной тригональной кривой.

Склеивание  $j$ -инвариантов кривых  $C_i$  даёт  $j$ -инвариант  $j_C: L \rightarrow \mathbb{CP}^1$  кривой  $C$ . Поэтому определены данные Римана составной тригональной кривой. *Степенью составной тригональной кривой* называется степень отображения  $j_C$ . Возмущением/вырождением тригональной кривой называется возмущение/вырождение её  $j$ -инварианта.

Пусть  $\bar{T}_{e,6e}$  — множество составных тригональных кривых степени  $6e$ . В силу вышесказанного,  $rd(\bar{T}_{e,6e})$  является компактификацией пространства  $rd(T_{e,6e})$ . Мы отождествляем  $J_e$  с  $rd(T_{e,6e})$  и  $\bar{J}_e$  с  $rd(\bar{T}_{e,6e})$ .

Согласно леммам 2, 3, точки вертикального перегиба тригональной кривой являются неособыми, но кривая с такими точками не лежит в  $T_{e,6e}$ .

Если остальные точки кривой неособы, она является компонентой составной тригональной кривой  $C \in \bar{T}_{e,6e} \setminus T_{e,6e}$ , для которой  $cs$ -граф её базы  $L$  является звёздным с *простейшими концами*, то есть его концевые вершины отвечают компонентам кривой  $L$ , на которых  $j_C$  имеет степень 4 (см. рис. 7 графа тригональной кривой, вырождением которой является одна из таких составных тригональных кривых). Все кривые в  $\bar{T}_{e,6e} \setminus T_{e,6e}$ ,  $cs$ -граф которых отличен от описанного, назовём *особыми составными тригональными кривыми* и добавим их к особым кривым страта  $T_{e,6e}$ , получив множество  $ST_e$  особых кривых пространства  $\bar{T}_{e,6e}$ .

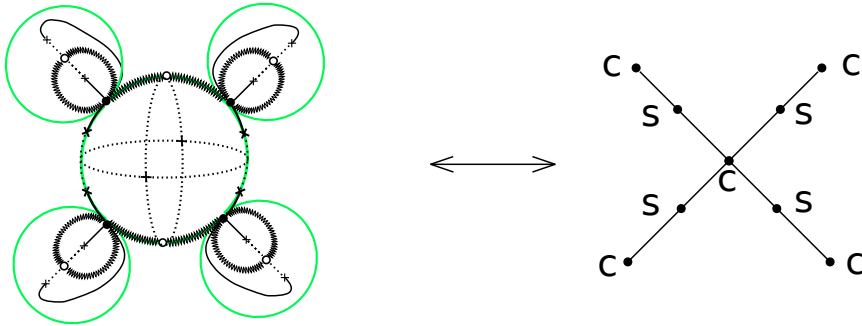


Рис. 7: Слева граф на вырожденной поверхности — объединении сфер, изображённых зелёным. Справа  $cs$ -граф этой поверхности.

**Предложение 10.** *Множество  $rd(ST_e)$  является клеточным подпространством пространства  $rd(\bar{T}_{e,6e})$ .*

**Доказательство.** Кривая  $C \in \bar{T}_{e,6e}$  является особой, если её граф имеет кратные корни дискриминанта  $d$  или её  $cs$ -граф не является звёздным с простейшими концами. Граничные точки открытой клетки в  $rd(ST_e)$ , состоящей из классов особых кривых, отвечают вырождениям этих кривых. Такое вырождение не устраняет кратные корни дискриминанта и не превращает  $cs$ -граф кривой в звёздный граф с простейшими концами, поэтому граница клетки также лежит в  $rd(ST_e)$ .  $\square$

### 5.5. Двойственное разбиение пространства данных Римана.

**Теорема 7.** *Линк 2-мерной звезды из двойственного разбиения пространства  $rd(\bar{T}_{e,6e})$  линейно связан.*

**Доказательство.** В теореме 6 в качестве  $\bar{H}_w$  можно взять  $rd(\bar{T}_{e,6e})$ .  $\square$

Из предложений 5, 10 и теоремы 7 получаем следующий результат.

**Следствие 6.** *Фундаментальная группа фактор-пространства почти общих кривых (соответственно, неособых кривых) вычисляется по схеме, описанной в следствии 5.*

Авторы выражают благодарность рецензенту за советы и замечания, позволившие устранить недочеты, имевшиеся в первоначальном варианте статьи.

### Список литературы

- [1] Звонилов В. И., Оревкин С. Ю., *Компактификация пространства разветвлённых накрытий двумерной сферы*, Тр. Мат. ин-та РАН **298** (2017), 127–138.
- [2] Звонкин А. К., Ландо С. К., *Графы на поверхностях и их приложения*, МЦНМО, М., 2010.
- [3] Orevkov S. Yu., *Riemann existence theorem and construction of real algebraic curves*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **12** (2003), no. 4, 517–531.
- [4] Degtyarev A., *Topology of algebraic curves. An approach via dessins d'enfants*, De Gruyter Stud. Math., vol. 44, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2012.
- [5] Diaz S., Edidin D., *Towards the homology of Hurwitz spaces*, J. Differential Geom. **43** (1996), no. 1, 66–98.
- [6] Natanzon S., Turaev V., *A compactification of the Hurwitz space*, Topology **38** (1999), no. 4, 889–914.
- [7] Dimca A., Dimiev S., *On analytic coverings of weighted projective spaces*, Bull. London Math. Soc. **17** (1985), no. 3, 234–238.
- [8] Рохлин В. А., Фукс Д. Б., *Начальный курс топологии*, Наука, М., 1977.
- [9] Виро О. Я., Фукс Д. Б., *Гомологии и когомологии*, Итоги науки и техн. Совр. пробл. мат. Фундам. направления **24** (1988), 123–240.
- [10] Degtyarev A., Itenberg I., Kharlamov V., *On deformation types of real elliptic surfaces*, Amer. J. Math. **130** (2008), no. 6, 1561–1627.
- [11] Dolgachev I., *Weighted projective varieties*, Lecture Notes in Math., vol. 956, Springer-Verlag, 1982, pp. 34–71.
- [12] Munkres J. R., *Elements of algebraic topology*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1984.
- [13] Cohen M. M., *Simplicial structures and transverse cellularity*, Ann. of Math. **85** (1967), no. 2, 218–245.

Нижегородский государственный  
университет им. Н. И. Лобачевского,  
проспект Гагарина, 23,  
603950, г. Нижний Новгород, Россия  
*E-mail:* zvonilov@gmail.com; zvonilov@itmm.unn.ru

Поступило 11 января 2020 г.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,  
ул. Губкина 8, 119991, Москва, Россия;  
Лаборатория АГГА, МФТИ,  
Институтский пер., 9,  
141701, Московская область, г. Долгопрудный, Россия  
*E-mail:* orevkov@math.ups-tlse.fr; orevkov@mi-ras.ru