

УДК 517.977.5

Соединение особого режима третьего порядка с неособыми участками оптимального управления в задаче минимизации для модели лечения псориаза*

Е. Н. Хайлов^а, Э. В. Григорьева^б

Поступило 16.01.2021; после доработки 12.05.2021; принято к публикации 23.06.2021

Изучается математическая модель лечения псориаза, задаваемая системой трех дифференциальных уравнений на фиксированном временном отрезке. Эти уравнения описывают взаимодействие между популяциями Т-лимфоцитов, кератиноцитов и дендритных клеток, являющихся определяющими при развитии, протекании и лечении этого заболевания. Модель содержит ограниченное управление, отражающее дозу лекарства, подавляющего взаимодействие между Т-лимфоцитами и кератиноцитами. Рассматривается задача минимизации концентрации кератиноцитов в конечный момент заданного отрезка времени. Анализ такой задачи оптимального управления осуществляется с помощью принципа максимума Понтрягина. Показывается, что при определенных соотношениях между параметрами модели соответствующее оптимальное управление может содержать особый режим третьего порядка, соединяющийся с неособыми релейными участками этого управления. Основное внимание уделяется возможным способам такого соединения. Приводятся результаты численных расчетов, подтверждающие полученные аналитические результаты.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tm4218>

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время проблема псориаза приобретает все большую актуальность в связи с ростом заболеваемости, инвалидизации, отягощением процесса протекания этого заболевания. Псориаз является одним из наиболее распространенных дерматозов. Причины возникновения псориаза до сих пор остаются невыясненными, хотя в последние годы достигнут значительный прогресс в изучении механизмов его зарождения, развития и лечения. И здесь не последнюю роль играет математическое моделирование, поскольку оно позволяет описывать поведение различных популяций клеток до заболевания, при его протекании и лечении, не требуя применения подчас сложной и дорогостоящей аппаратуры для наблюдений. При определении эффективных (в том или ином смысле) методик лечения псориаза активно применяется теория оптимального управления.

В этой статье мы не приводим обзора работ, связанных с математическим моделированием псориаза или с поиском эффективных стратегий его лечения на основе теории оптимального управления (такой обзор приведен в [6]). Мы лишь отметим работы [3–5], в которых рассматривается математическая модель, описывающая с помощью трех дифференциальных уравнений взаимосвязи между концентрациями Т-лимфоцитов, кератиноцитов и дендритных клеток,

*Работа выполнена при финансовой поддержке первого автора Российским фондом фундаментальных исследований и Департаментом науки и технологии Правительства Индии (проект 18-51-45003 ИНД_а).

^аФакультет вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.

^бTexas Woman's University, Denton, TX, USA.

E-mail: khailov@cs.msu.su (Е.Н. Хайлов), egrigorieva@twu.edu (Э.В. Григорьева).

которые играют существенную роль при возникновении, протекании и лечении псориаза. В модели присутствует ограниченная управляющая функция, которая задает дозу лекарственного препарата, подавляющего взаимодействие между Т-лимфоцитами и кератиноцитами. В этих работах для такой модели с помощью принципа максимума Понтрягина изучается задача минимизации концентрации кератиноцитов в конечный момент заданного отрезка времени, являющегося периодом лечения псориаза. В них аналитически и численно показывается, что соответствующее оптимальное управление может как быть релейной на всем временном отрезке функцией, так и иметь особый режим второго порядка, который при помощи четтеринга (режима с учащающимися переключениями) соединяется с неособыми релейными участками.

В работе [6] мы демонстрируем, что при определенных соотношениях между параметрами рассматриваемой модели у оптимального управления может возникнуть особый режим третьего порядка. Для него проверяется соответствующее необходимое условие оптимальности, находятся формулы для фазовых переменных и управления на таком особом режиме. Настоящая работа продолжает эти исследования, так как ранее подробно не были изучены способы соединения особого режима третьего порядка с неособыми релейными участками оптимального управления. Здесь этому вопросу уделяется особое внимание. Кроме того, представлены результаты численных экспериментов, подтверждающие полученные теоретические выводы. Особо следует отметить, что для упрощения проводимых аналитических вычислений при помощи масштабирования фазовых переменных и времени в рассматриваемой модели сокращается число параметров с десяти до шести. Также вводится система дифференциальных уравнений для вспомогательных функций, отвечающих функции переключений. Уравнения этой системы облегчают исследование существования особого режима и вычисление производных высших порядков функции переключений. Кроме того, они помогают в анализе способов соединения особого режима и неособых релейных участков. Указанные особенности отличают настоящую работу от [6].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ

Рассмотрим фиксированный отрезок времени $[0, T]$ и систему дифференциальных уравнений на нем

$$\begin{cases} l'(t) = \sigma - \delta l(t)m(t) - \gamma_1 u(t)l(t)k(t) - \mu l(t), \\ k'(t) = \eta l(t)m(t) + \gamma_2 u(t)l(t)k(t) - \lambda k(t), \\ m'(t) = \rho - \beta l(t)m(t) - \nu m(t), \\ l(0) = l_0, \quad k(0) = k_0, \quad m(0) = m_0, \quad l_0, k_0, m_0 > 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

которая описывает взаимодействие между концентрациями Т-лимфоцитов $l(t)$, кератиноцитов $k(t)$ и дендритных клеток $m(t)$ на заданном периоде лечения псориаза $[0, T]$. Именно от взаимодействия этих типов клеток зависят как возникновение и протекание, так и лечение этого заболевания. Здесь $\sigma, \rho, \delta, \eta, \beta, \gamma_1, \gamma_2, \mu, \lambda, \nu$ — заданные положительные параметры системы (2.1). Их биологический смысл подробно описан в работах [3–6]. Отметим, что в них предполагалось выполнение равенства $\eta = \delta + \beta$. В настоящей работе такое предположение не делается.

В системе (2.1) функция $u(t)$ является управлением, отвечающим за дозу лекарственного препарата, который препятствует чрезмерному росту кератиноцитов в результате их взаимодействия с Т-лимфоцитами. Управление $u(t)$ удовлетворяет неравенству

$$0 < u_{\min} \leq u(t) \leq 1. \quad (2.2)$$

Множеством допустимых управлений $\Omega(T)$ мы считаем всевозможные измеримые по Лебегу функции $u(t)$, которые при почти всех $t \in [0, T]$ удовлетворяют неравенству (2.2).

Уменьшим количество параметров в системе (2.1). Для этого выполним масштабирование фазовых переменных и времени по формулам

$$l = \sqrt{\frac{\sigma}{\gamma_2}} \tilde{l}, \quad k = \frac{\sqrt{\sigma\gamma_2}}{\gamma_1} \tilde{k}, \quad m = \frac{\rho}{\sqrt{\sigma\gamma_2}} \tilde{m}, \quad t = \frac{1}{\sqrt{\sigma\gamma_2}} \tilde{t},$$

где $\tilde{l}, \tilde{k}, \tilde{m}, \tilde{t}$ — новые (безразмерные) фазовые переменные и время. При этом $\tilde{T} = \sqrt{\sigma\gamma_2} T$.

Также введем новые параметры

$$\tilde{\delta} = \frac{\rho\delta}{\sigma\gamma_2}, \quad \tilde{\eta} = \frac{\rho\gamma_1\eta}{\sigma\gamma_2^2}, \quad \tilde{\beta} = \frac{\beta}{\gamma_2}, \quad \tilde{\mu} = \frac{\mu}{\sqrt{\sigma\gamma_2}}, \quad \tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{\sqrt{\sigma\gamma_2}}, \quad \tilde{\nu} = \frac{\nu}{\sqrt{\sigma\gamma_2}}$$

и обозначения для начальных условий

$$\tilde{l}_0 = \sqrt{\frac{\gamma_2}{\sigma}} l_0, \quad \tilde{k}_0 = \frac{\gamma_1}{\sqrt{\sigma\gamma_2}} k_0, \quad \tilde{m}_0 = \frac{\sqrt{\sigma\gamma_2}}{\rho} m_0.$$

Наконец, учтем, что

$$\tilde{u}(\tilde{t}) = u\left(\frac{\tilde{t}}{\sqrt{\sigma\gamma_2}}\right)$$

для любого допустимого управления $u(t)$.

Тогда система (2.1) преобразуется в систему уравнений, которая после отбрасывания знака тильды у всех ее переменных и параметров имеет следующий вид:

$$\begin{cases} l'(t) = 1 - \delta l(t)m(t) - u(t)l(t)k(t) - \mu l(t), & t \in [0, T], \\ k'(t) = \eta l(t)m(t) + u(t)l(t)k(t) - \lambda k(t), \\ m'(t) = 1 - \beta l(t)m(t) - \nu m(t), \\ l(0) = l_0, \quad k(0) = k_0, \quad m(0) = m_0, \quad l_0, k_0, m_0 > 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

По сравнению с исходной системой (2.1), содержащей десять параметров, количество параметров в системе (2.3) уменьшилось до шести. Эта система уравнений будет являться объектом наших последующих исследований.

Введем область

$$\Lambda = \{(l, k, m) : l > 0, \quad k > 0, \quad m > 0, \quad l + k + \beta^{-1}\eta m < M\},$$

где

$$\epsilon = \min\{\mu, \lambda, \nu\}, \quad M = l_0 + k_0 + \beta^{-1}\eta m_0 + \epsilon^{-1}(1 + \beta^{-1}\eta).$$

В работе [5] для управляемой системы (2.3) была доказана лемма 2.1, обосновывающая для ее абсолютно непрерывного решения $(l(t), k(t), m(t))$, отвечающего произвольному управлению $u(\cdot) \in \Omega(T)$, справедливость включения

$$(l(t), k(t), m(t)) \in \Lambda, \quad t \in [0, T]. \quad (2.4)$$

Оно означает положительность компонент $l(t), k(t), m(t)$ такого решения, а также их ограниченность и существование на всем отрезке $[0, T]$.

Рассмотрим для системы (2.3) на множестве допустимых управлений $\Omega(T)$ следующую задачу минимизации целевой функции:

$$J(u(\cdot)) = k(T) \rightarrow \min, \quad (2.5)$$

которая означает минимизацию концентрации кератиноцитов в конечный момент T периода лечения псориаза $[0, T]$.

Существование в задаче (2.5) оптимального решения, состоящего из оптимального управления $u_*(t)$ и отвечающего ему оптимального решения $(l_*(t), k_*(t), m_*(t))$ системы (2.3), следует из включения (2.4) и теоремы 4 из [7, гл. 4].

Теперь определим константу $\alpha = \eta - \delta$ и предположим, что справедливо следующее

Условие 1. Пусть имеют место соотношения

$$\alpha \neq 0, \quad \lambda > \mu, \quad \lambda > 2\nu, \quad (2.6)$$

$$\lambda^2(\lambda - \mu) + 4\alpha(\lambda - \nu) = 0, \quad 2\beta\lambda > (\lambda - 2\nu)(\lambda\mu + 2\delta). \quad (2.7)$$

Наконец, введем следующие величины:

$$\widehat{m} = \frac{2}{\lambda}, \quad \widehat{l} = \frac{\lambda - 2\nu}{2\beta}, \quad \widehat{k} = \frac{2\beta\lambda - (\lambda - 2\nu)(\lambda\mu - 2\alpha)}{2\beta\lambda^2}. \quad (2.8)$$

Легко видеть, что в силу соответствующих неравенств в (2.6) и (2.7) эти величины положительны.

3. ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА

Анализ задачи (2.5) будем осуществлять с помощью принципа максимума Понтрягина [8], являющегося для нее необходимым условием оптимальности. Предварительно выпишем соответствующий гамильтониан

$$\begin{aligned} H(l, k, m, u, \psi_1, \psi_2, \psi_3) = & (1 - \delta lm - ulk - \mu l)\psi_1 + (\eta lm + ulk - \lambda k)\psi_2 + \\ & + (1 - \beta lm - \nu m)\psi_3, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где ψ_1, ψ_2, ψ_3 — сопряженные переменные.

Тогда согласно принципу максимума Понтрягина для управления $u_*(t)$ и отвечающего ему решения $(l_*(t), k_*(t), m_*(t))$ системы (2.3) определена функция $\psi_*(t) = (\psi_1^*(t), \psi_2^*(t), \psi_3^*(t))$ такая, что

- $\psi_*(t)$ является нетривиальным решением сопряженной системы

$$\begin{cases} \psi_1'(t) = -u_*(t)k_*(t)(\psi_2^*(t) - \psi_1^*(t)) - m_*(t)(-\delta\psi_1^*(t) + \eta\psi_2^*(t) - \beta\psi_3^*(t)) + \mu\psi_1^*(t), \\ \psi_2'(t) = -u_*(t)l_*(t)(\psi_2^*(t) - \psi_1^*(t)) + \lambda\psi_2^*(t), \\ \psi_3'(t) = -l_*(t)(-\delta\psi_1^*(t) + \eta\psi_2^*(t) - \beta\psi_3^*(t)) + \nu\psi_3^*(t), \\ \psi_1^*(T) = 0, \quad \psi_2^*(T) = -1, \quad \psi_3^*(T) = 0; \end{cases} \quad (3.2)$$

- для оптимального управления $u_*(t)$ справедливы формулы

$$\begin{aligned} u_*(t) = 1, & \quad \text{если } L_0(t) > 0, \\ u_*(t) = \text{любое число из } [u_{\min}, 1], & \quad \text{если } L_0(t) = 0, \\ u_*(t) = u_{\min}, & \quad \text{если } L_0(t) < 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где функция $L_0(t)$, задаваемая соотношением

$$L_0(t) = l_*(t)k_*(t)(\psi_2^*(t) - \psi_1^*(t)), \quad (3.4)$$

является функцией переключений, которая определяет поведение управления $u_*(t)$ согласно формулам (3.3);

- гамильтониан

$$H(l_*(t), k_*(t), m_*(t), u_*(t), \psi_1^*(t), \psi_2^*(t), \psi_3^*(t)) \quad (3.5)$$

является функцией, постоянной почти всюду на отрезке $[0, T]$.

Нахождение системы (3.2) и вывод формул (3.3) более подробно описаны в [6].

Формулы (3.3) и (3.4) показывают, какими могут быть поведение функции переключений $L_0(t)$ и отвечающее ей оптимальное управление $u_*(t)$. Легко видеть, что $L_0(t)$ является абсолютно непрерывной функцией, а значит, она обращается в нуль либо в отдельных точках, либо на некоторых интервалах отрезка $[0, T]$. В первом случае соответствующее оптимальное управление $u_*(t)$ имеет релейный вид и переключается между значениями u_{\min} и 1. Это происходит, если функция $L_0(t)$ меняет знак при переходе через каждый свой нуль. Такие нули этой функции являются переключениями управления $u_*(t)$. Во втором случае на упомянутых интервалах могут возникать особые режимы [2, 9, 10] и оптимальное управление $u_*(t)$ на таких интервалах будет определяться специальным образом. В следующем разделе возможное существование особого режима у оптимального управления $u_*(t)$ будет изучено более подробно.

Теперь отметим важное свойство управления $u_*(t)$, которое было установлено в [6, следствие 1]. Оно гарантирует существование такого значения $t_0 \in [0, T]$, что при всех $t \in (t_0, T]$ справедливо равенство $u_*(t) = u_{\min}$. Это свойство означает, что в конце периода лечения псориаза используются наименьшие дозы лекарственного препарата.

Такое поведение оптимального управления $u_*(t)$ в окрестности точки $t = T$ вместе с формулой (3.1) и начальными условиями для сопряженных переменных $\psi_1^*(t)$, $\psi_2^*(t)$, $\psi_3^*(t)$ из (3.2) позволяют переписать свойство постоянства гамильтониана (3.5) следующим образом:

$$\begin{aligned} & (\psi_1^*(t) + \psi_3^*(t)) + l_*(t)m_*(t)(-\delta\psi_1^*(t) + \eta\psi_2^*(t) - \beta\psi_3^*(t)) + u_*(t)L_0(t) - \\ & - (\mu l_*(t)\psi_1^*(t) + \lambda k_*(t)\psi_2^*(t) + \nu m_*(t)\psi_3^*(t)) = -K_T, \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $K_T = \eta l_*(T)m_*(T) + u_{\min}l_*(T)k_*(T) - \lambda k_*(T) -$ некоторая константа.

4. ОСОБЫЙ РЕЖИМ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Исследуем возможность существования особого режима у оптимального управления $u_*(t)$. Для этого определим систему дифференциальных уравнений для вспомогательных функций, отвечающих функции переключений, и будем поэтапно анализировать эти уравнения при изучении особого режима. Отправной точкой для получения переменных этой системы является функция переключений $L_0(t)$. Выражение для производной каждой вспомогательной функции, как и самой функции $L_0(t)$, содержит введенные ранее вспомогательные функции, а также новую вспомогательную функцию. Например, используя необходимые уравнения систем (2.3) и (3.2), мы находим первые два дифференциальных уравнения требуемой системы:

$$L_0'(t) = a_{11}(t)L_0(t) + L_1(t), \quad (4.1)$$

$$L_1'(t) = a_{21}(t)L_0(t) + a_{22}(t)L_1(t) + L_2(t), \quad (4.2)$$

где вспомогательные функции $L_1(t)$ и $L_2(t)$ определяются равенствами

$$L_1(t) = l_*(t)k_*(t)(m_*(t)(-\delta\psi_1^*(t) + \eta\psi_2^*(t) - \beta\psi_3^*(t)) + (\lambda - \mu)\psi_1^*(t)),$$

$$L_2(t) = l_*(t)k_*(t)m_*^{-1}(t)(\alpha(\lambda - \nu)m_*^2(t) + \lambda(\lambda - \mu)m_*(t) - (\lambda - \mu)),$$

а функции $a_{11}(t)$, $a_{21}(t)$ и $a_{22}(t)$ задаются формулами

$$a_{11}(t) = \eta l_*(t)k_*^{-1}(t)m_*(t) + l_*^{-1}(t) - \delta m_*(t) - \mu,$$

$$a_{21}(t) = -u_*(t)((\eta l_*(t) - \delta k_*(t))m_*(t) + (\lambda - \mu)k_*(t)) + \eta(\lambda - \nu)m_*(t),$$

$$a_{22}(t) = u_*(t)(l_*(t) - k_*(t)) + \eta l_*(t)k_*^{-1}(t)m_*(t) + l_*^{-1}(t) + m_*^{-1}(t) - 2\lambda.$$

Преобразуем функцию $L_2(t)$, привлекая равенство из (2.7) и величину \widehat{m} из (2.8). После необходимых преобразований получаем новую формулу для этой функции

$$L_2(t) = -g(t)(m_*(t) - \widehat{m})^2, \quad (4.3)$$

где $g(t) = 0.25\lambda^2(\lambda - \mu)l_*(t)k_*(t)m_*^{-1}(t)\psi_1^*(t)$ — абсолютно непрерывная функция.

Замечание 1. Отметим, что функции $a_{21}(t)$ и $a_{22}(t)$ зависят от управления $u_*(t)$.

Теперь уже предположим, что существует интервал $\Delta \subset [0, T]$, на котором функция переключений $L_0(t)$ обращается тождественно в нуль. Первая производная $L'_0(t)$ этой функции также равна нулю всюду на этом интервале. Поэтому уравнение (4.1) приводит нас к заключению о том, что функция $L_1(t)$ тоже обращается тождественно в нуль на интервале Δ , как и ее производная $L'_1(t)$. Тогда в силу уравнения (4.2) мы делаем вывод о тождественном равенстве нулю на этом интервале функции $L_2(t)$. Включение (2.4) и необходимое неравенство из (2.6), а также определения функций $g(t)$ и $L_i(t)$, $i = 0, 1, 2$, приводят нас к системе уравнений

$$\begin{cases} \psi_2^*(t) - \psi_1^*(t) = 0, \\ m_*(t)(-\delta\psi_1^*(t) + \eta\psi_2^*(t) - \beta\psi_3^*(t)) + (\lambda - \mu)\psi_1^*(t) = 0, \\ \psi_1^*(t)(m_*(t) - \widehat{m})^2 = 0, \end{cases} \quad (4.4)$$

выполняющейся на интервале Δ . Ее анализ показывает, что если существует хотя бы одно значение $t_0 \in \Delta$, при котором сопряженная переменная $\psi_1^*(t)$ обращается в нуль, то и остальные сопряженные переменные $\psi_2^*(t)$, $\psi_3^*(t)$ также будут равны нулю при $t = t_0$. Сопряженная система (3.2) является линейной однородной системой дифференциальных уравнений, а потому равенство $\psi_*(t_0) = 0$ приводит к противоречивому соотношению $\psi_*(t) = 0$, справедливому при всех $t \in [0, T]$. Следовательно, $\psi_1^*(t) \neq 0$ всюду на интервале Δ . Последнее уравнение системы (4.4) приводит к равенству

$$m_*(t) = \widehat{m}, \quad t \in \Delta. \quad (4.5)$$

Замечание 2. Приведенные рассуждения позволяют заключить, что функция $g(t)$ знакоопределена при всех $t \in \Delta$.

Замечание 3. Легко видеть, что уравнение (4.2) отвечает второй производной функции переключений $L_0(t)$. Более того, на Δ слагаемые $a_{21}(t)L_0(t)$ и $a_{22}(t)L_1(t)$ в (4.2), которые, как следует из замечания 1, содержат управление $u_*(t)$, оказываются равными нулю. Это означает, что порядок q возможного особого режима больше 1 (см. [9, 10]).

Преобразуем первое и третье уравнения системы (2.3), записанные для управления $u_*(t)$ и отвечающих ему компонент $l_*(t)$, $k_*(t)$, $m_*(t)$ решения этой системы. Для этого введем в них величины \widehat{m} и \widehat{l} из (2.8). После необходимых преобразований получим выражения

$$m'_*(t) = -(\beta l_*(t) + \nu)(m_*(t) - \widehat{m}) - 2\beta\lambda^{-1}(l_*(t) - \widehat{l}), \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} l'_*(t) = & -(u_*(t)k_*(t) + \delta m_*(t) + \mu)(l_*(t) - \widehat{l}) - \delta\widehat{l}(m_*(t) - \widehat{m}) + \\ & + (1 - \delta\widehat{l}\widehat{m} - u_*(t)\widehat{l}k_*(t) - \mu\widehat{l}). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Теперь вычислим на интервале Δ производную $L'_2(t)$ функции $L_2(t)$, используя формулы (4.3) и (4.6). В результате получим дифференциальное уравнение

$$L'_2(t) = a_{31}(t)L_2(t) + L_3(t), \quad (4.8)$$

где $a_{31}(t) = g^{-1}(t)g'(t) - 2(\beta l_*(t) + \nu)$, а $L_3(t)$ — новая вспомогательная функция, определяемая равенством

$$L_3(t) = 4\beta\lambda^{-1}g(t)(l_*(t) - \widehat{l})(m_*(t) - \widehat{m}).$$

После этого, привлекая формулы (4.6) и (4.7), найдем на этом интервале производную $L'_3(t)$ функции $L_3(t)$, что приводит нас к следующему дифференциальному уравнению:

$$L'_3(t) = a_{41}(t)L_2(t) + a_{42}(t)L_3(t) + a_{43}(t)(m_*(t) - \widehat{m}) + L_4(t), \quad (4.9)$$

где функции $a_{41}(t)$, $a_{42}(t)$ и $a_{43}(t)$ задаются формулами

$$\begin{aligned} a_{41}(t) &= 4\beta\delta\lambda^{-1}\widehat{l}, \\ a_{42}(t) &= g^{-1}(t)g'(t) - (u_*(t)k_*(t) + \delta m_*(t) + \mu) - (\beta l_*(t) + \nu), \\ a_{43}(t) &= 4\beta\lambda^{-1}g(t)(1 - \delta\widehat{l}\widehat{m} - u_*(t)\widehat{l}k_*(t) - \mu\widehat{l}), \end{aligned}$$

а $L_4(t)$ — следующая вспомогательная функция, определяемая равенством

$$L_4(t) = -8\beta^2\lambda^{-2}g(t)(l_*(t) - \widehat{l})^2.$$

Замечание 4. Отметим, что уравнение (4.9) отвечает четвертой производной функции переключений $L_0(t)$. В силу формулы (4.5) на интервале Δ слагаемые $a_{42}(t)L_3(t)$ и $a_{43}(t)(m_*(t) - \widehat{m})$ в (4.9), которые содержат управление $u_*(t)$, равны нулю. Отсюда немедленно следует, что порядок q возможного особого режима больше 2 (см. [9, 10]).

Из анализа уравнения (4.2) было получено тождественное обращение в нуль функции $L_2(t)$ на интервале Δ . Отсюда мы видим, что всюду на этом интервале производная $L'_2(t)$ этой функции также равна нулю. Поэтому уравнение (4.8) приводит нас к заключению о том, что функция $L_3(t)$ обращается тождественно в нуль на интервале Δ вместе со своей производной $L'_3(t)$. После этого в силу уравнения (4.9) и формулы (4.5) мы делаем вывод о тождественном равенстве нулю функции $L_4(t)$ и, как следствие этого факта, получаем соотношение

$$l_*(t) = \widehat{l}, \quad t \in \Delta. \quad (4.10)$$

Теперь, привлекая формулу (4.7), вычислим на интервале Δ производную $L'_4(t)$ функции $L_4(t)$. В результате приходим к дифференциальному уравнению

$$L'_4(t) = a_{51}(t)L_3(t) + a_{52}(t)L_4(t) + a_{53}(t)(l_*(t) - \widehat{l}) + L_5(t), \quad (4.11)$$

где функции $a_{51}(t)$, $a_{52}(t)$ и $a_{53}(t)$ задаются формулами

$$\begin{aligned} a_{51}(t) &= a_{41}(t) = 4\beta\delta\lambda^{-1}\widehat{l}, \\ a_{52}(t) &= g^{-1}(t)g'(t) - 2(u_*(t)k_*(t) + \delta m_*(t) + \mu), \\ a_{53}(t) &= 16\beta^2\lambda^{-2}\widehat{l}u_*(t)k_*(t)g(t), \end{aligned}$$

а $L_5(t)$ — новая вспомогательная функция, определяемая равенством

$$L_5(t) = -16\beta^2\lambda^{-2}(1 - \delta\widehat{l}\widehat{m} - \mu\widehat{l})g(t)(l_*(t) - \widehat{l}).$$

Заметим, что в силу неравенства из (2.7) выражение $(1 - \delta\widehat{l}\widehat{m} - \mu\widehat{l})$ в определении функции $L_5(t)$ положительно.

Найдем теперь производную $L'_5(t)$ функции $L_5(t)$ на интервале Δ , используя формулу (4.7). Эта производная определяется с помощью равенства

$$\begin{aligned} L'_5(t) &= a_{61}(t)L_4(t) + a_{62}(t)(m_*(t) - \widehat{m}) - \\ &\quad - 16\beta^2\lambda^{-2}(1 - \delta\widehat{l}\widehat{m} - \mu\widehat{l})g(t)(1 - \delta\widehat{l}\widehat{m} - u_*(t)\widehat{l}k_*(t) - \mu\widehat{l}), \end{aligned} \quad (4.12)$$

где функции $a_{61}(t)$ и $a_{62}(t)$ задаются формулами

$$\begin{aligned} a_{61}(t) &= g^{-1}(t)g'(t) - (u_*(t)k_*(t) + \delta m_*(t) + \mu), \\ a_{62}(t) &= 16\beta^2\lambda^{-2}\widehat{l}(1 - \delta\widehat{l}\widehat{m} - \mu\widehat{l})g(t). \end{aligned}$$

Заметим, что уравнение (4.12) отвечает шестой производной функции переключений $L_0(t)$. Легко видеть, что в нем в силу формул (4.5) и (4.10) первые два слагаемых равны нулю, а множитель при управлении $u_*(t)$ в третьем слагаемом имеет вид

$$16\beta^2\lambda^{-2}\widehat{l}(1 - \delta\widehat{l}\widehat{m} - \mu\widehat{l})g(t)k_*(t). \quad (4.13)$$

Включение (2.4) и замечание 2 приводят нас к выводу о том, что на интервале Δ этот множитель принимает либо только положительные, либо только отрицательные значения. Поэтому порядок q возможного особого режима равен 3 (см. [9, 10]). Более того, соответствующее необходимое условие оптимальности в виде условия Келли–Коппа–Мойера (см. [2, 9, 10]) либо выполняется в усиленной форме и тогда особый режим может существовать, либо не выполняется вообще и тогда он не существует. Ввиду (4.13) усиленное условие Келли–Коппа–Мойера записывается следующим образом:

$$16\beta^2\lambda^{-2}\widehat{l}(1 - \delta\widehat{l}\widehat{m} - \mu\widehat{l})g(t)k_*(t) > 0, \quad t \in \Delta. \quad (4.14)$$

В силу формул (4.5) и (4.10) функции $L_4(t)$ и $L_5(t)$ обращаются тождественно в нуль на интервале Δ вместе со своими производными $L'_4(t)$ и $L'_5(t)$ соответственно. Поэтому формула (4.11) выполняется автоматически, а из (4.12) мы находим соотношение

$$u_{\text{sing}}(t) = \widehat{l}^{-1}(1 - \delta\widehat{l}\widehat{m} - \mu\widehat{l})k_*^{-1}(t), \quad t \in \Delta, \quad (4.15)$$

представляющее собой формулу оптимального управления $u_*(t)$ на особом режиме, если $u_{\text{sing}}(t)$ удовлетворяет неравенству (2.2), т.е. является допустимым управлением. В противном случае особый режим снова отсутствует. Естественно предположить в дальнейших рассуждениях, что $u_{\text{sing}}(t)$ — допустимое управление.

Замечание 5. Дифференциальные уравнения (4.1), (4.2), (4.8), (4.9), (4.11) и (4.12) задают требуемую систему уравнений, отвечающую функции переключений $L_0(t)$.

Наконец, из формулы (4.5) и равенств $L_0(t) = 0$, $L_1(t) = 0$, справедливых на интервале Δ , вытекает система уравнений

$$\begin{cases} \psi_2^*(t) = \psi_1^*(t), \\ \widehat{m}(-\delta\psi_1^*(t) + \eta\psi_2^*(t) - \beta\psi_3^*(t)) + (\lambda - \mu)\psi_1^*(t) = 0, \end{cases}$$

из которой мы находим формулы для сопряженных переменных $\psi_1^*(t)$, $\psi_2^*(t)$, $\psi_3^*(t)$ на особом режиме

$$\psi_2^*(t) = \psi_1^*(t), \quad \psi_3^*(t) = (\beta\widehat{m})^{-1}(\alpha\widehat{m} + (\lambda - \mu))\psi_1^*(t), \quad t \in \Delta. \quad (4.16)$$

Подставляя эти соотношения, а также формулы (2.8), (4.5) и (4.10) в выражение (3.6) и затем преобразовывая его надлежащим образом, мы получаем равенство

$$\lambda(k_*(t) - \widehat{k})\psi_1^*(t) = K_T, \quad t \in \Delta. \quad (4.17)$$

Формулы (4.5) и (4.10), а также соотношения (4.16) и (4.17) задают особое множество, на котором находятся фазовые и сопряженные переменные в задаче минимизации (2.5), когда соответствующее оптимальное решение, состоящее из управления $u_*(t)$ и отвечающей ему траектории $(l_*(t), k_*(t), m_*(t))$, имеет на интервале Δ особый режим третьего порядка.

5. СОЕДИНЕНИЕ ОСОБОГО РЕЖИМА С НЕОСОБЫМИ РЕЛЕЙНЫМИ УЧАСТКАМИ

Изучим соединение найденного ранее на интервале Δ особого режима третьего порядка с неособым релейным участком. Благодаря тому, что к концу T отрезка $[0, T]$ примыкает интервал, на котором $u_*(t) = u_{\min}$, такое изучение естественно начать с ситуации, когда точка соединения $\theta \in (0, T)$ является правым концом такого интервала, а потому в ее левой полуокрестности управление $u_*(t)$ имеет особый режим и задается формулой (4.15), а в ее правой полуокрестности это управление является релейной функцией, принимающей значения u_{\min} и 1. Более того, будем предполагать, что

- всюду на интервале Δ управление $u_{\text{sing}}(t)$ удовлетворяет включению

$$u_{\text{sing}}(t) \in (u_{\min}, 1); \quad (5.1)$$

- существует такое малое число $\varepsilon > 0$, что на интервале $(\theta, \theta + \varepsilon)$ оптимальное управление $u_*(t)$ принимает либо только значение u_{\min} , либо только значение 1.

Теперь доопределим по непрерывности управления $u_{\text{sing}}(t)$ и $u_*(t)$ в точке $t = \theta$:

$$u_{\text{sing}}(\theta) = u_{\text{sing}}(\theta - 0), \quad u_*(\theta) = u_*(\theta + 0).$$

После этого вычислим производные $L_0^{(i)}(t)$, $i = 1, \dots, 6$, функции переключений $L_0(t)$ на интервалах Δ и $(\theta, \theta + \varepsilon)$. Заметим, что на этих интервалах соответствующие управления $u_{\text{sing}}(t)$ и $u_*(t)$ имеют производные любого порядка, а потому этим свойством обладают и функции $a_{ij}(t)$, присутствующие в дифференциальных уравнениях (4.1), (4.2), (4.8), (4.9), (4.11) и (4.12). Легко видеть, что соотношение (4.1) является формулой для первой производной $L_0^{(1)}(t)$ функции $L_0(t)$:

$$L_0^{(1)}(t) = b_{11}(t)L_0(t) + L_1(t), \quad (5.2)$$

где мы положим $b_{11}(t) = a_{11}(t)$.

Используя соотношения (4.2) и (5.2), найдем формулу для второй производной $L_0^{(2)}(t)$ функции $L_0(t)$ в виде

$$L_0^{(2)}(t) = b_{21}(t)L_0(t) + b_{22}(t)L_1(t) + L_2(t), \quad (5.3)$$

где

$$b_{21}(t) = a'_{11}(t) + a^2_{11}(t) + a_{21}(t), \quad b_{22}(t) = a_{11}(t) + a_{22}(t).$$

Подобным образом, опираясь на соотношения (4.8) и (5.3), можно получить формулу для третьей производной $L_0^{(3)}(t)$ функции $L_0(t)$:

$$L_0^{(3)}(t) = b_{31}(t)L_0(t) + b_{32}(t)L_1(t) + b_{33}(t)L_2(t) + L_3(t), \quad (5.4)$$

где функции $b_{3j}(t)$, $j = 1, 2, 3$, определяются выражениями, зависящими от соответствующих функций $a_{is}(t)$ и их производных. Ввиду громоздкости мы не приводим здесь эти и подобные им выражения.

Аналогично в силу соотношений (4.9), (4.11), (4.12) и (5.4) находим формулы для оставшихся производных $L_0^{(4)}(t)$, $L_0^{(5)}(t)$, $L_0^{(6)}(t)$ функции $L_0(t)$:

$$L_0^{(4)}(t) = b_{41}(t)L_0(t) + b_{42}(t)L_1(t) + b_{43}(t)L_2(t) + b_{44}(t)L_3(t) + b_{45}(t)(m_*(t) - \widehat{m}) + L_4(t), \quad (5.5)$$

$$L_0^{(5)}(t) = b_{51}(t)L_0(t) + b_{52}(t)L_1(t) + b_{53}(t)L_2(t) + b_{54}(t)L_3(t) + b_{55}(t)(m_*(t) - \widehat{m}) + b_{56}(t)L_4(t) + b_{57}(t)(l_*(t) - \widehat{l}) + L_5(t), \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned}
L_0^{(6)}(t) &= b_{61}(t)L_0(t) + b_{62}(t)L_1(t) + b_{63}(t)L_2(t) + b_{64}(t)L_3(t) + b_{65}(t)(m_*(t) - \widehat{m}) + \\
&+ b_{66}(t)L_4(t) + b_{67}(t)(l_*(t) - \widehat{l}) + b_{68}(t)L_5(t) - \\
&- 16\beta^2\lambda^{-2}(1 - \delta\widehat{l}\widehat{m} - \mu\widehat{l})g(t)(1 - \delta\widehat{l}\widehat{m} - u_*(t)\widehat{l}k_*(t) - \mu\widehat{l}).
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Теперь, поскольку особый режим имеет третий порядок, у производных $L_0^{(i)}(t)$, $i = 1, \dots, 5$, функции $L_0(t)$ все слагаемые, содержащие управление $u_*(t)$, обращаются в нуль как на интервале Δ , так и в точке соединения θ . А потому все эти производные непрерывны в точке $t = \theta$.

Далее рассмотрим различные случаи поведения функции $u_{\text{sing}}(t)$ в точке соединения θ .

Случай 1. Пусть $u_{\text{sing}}(\theta) \in (u_{\min}, 1)$. Это означает, что управление $u_*(t)$ разрывно в точке $t = \theta$. Из формул (5.2)–(5.6) и рассуждений, приведенных ранее, следует, что для функции переключений $L_0(t)$ и ее производных $L_0^{(i)}(t)$, $i = 1, \dots, 5$, справедливы равенства

$$L_0^{(i)}(\theta) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, 5, \tag{5.8}$$

а для производной $L_0^{(6)}(t)$ в силу неравенства (4.14), выполненного и при $t = \theta$, имеет место соотношение

$$\begin{aligned}
L_0^{(6)}(\theta) &= -16\beta^2\lambda^{-2}(1 - \delta\widehat{l}\widehat{m} - \mu\widehat{l})^2g(\theta) + 16\beta^2\lambda^{-2}(1 - \delta\widehat{l}\widehat{m} - \mu\widehat{l})g(\theta)u_*(\theta)\widehat{l}k_*(\theta) < \\
&< -16\beta^2\lambda^{-2}(1 - \delta\widehat{l}\widehat{m} - \mu\widehat{l})^2g(\theta) + 16\beta^2\lambda^{-2}(1 - \delta\widehat{l}\widehat{m} - \mu\widehat{l})g(\theta)u_{\text{sing}}(\theta)\widehat{l}k_*(\theta) = 0,
\end{aligned}$$

если $u_*(\theta) = u_{\min}$, и противоположное соотношение, если $u_*(\theta) = 1$. Из них, в свою очередь, вытекают соотношения

$$L_0^{(6)}(\theta) < 0, \quad \text{если } u_*(\theta) = u_{\min}, \quad \text{и} \quad L_0^{(6)}(\theta) > 0, \quad \text{если } u_*(\theta) = 1,$$

которые вместе с равенствами (5.8) означают, что в точке $t = \theta$ функция переключений $L_0(t)$ имеет локальный максимум при $u_*(\theta) = u_{\min}$ и локальный минимум при $u_*(\theta) = 1$. Этот вывод полностью согласуется с соотношениями (3.3), вытекающими из принципа максимума Понтрягина.

Теперь подставим соотношение (4.15) во второе уравнение системы (2.3), записанное для управления $u_*(t)$ и отвечающих ему компонент $l_*(t)$, $k_*(t)$, $m_*(t)$ решения этой системы. После несложных преобразований, использующих формулы из (2.8), приходим к дифференциальному уравнению

$$k_*'(t) = -\lambda(k_*(t) - \widehat{k}), \quad t \in \Delta. \tag{5.9}$$

Его анализ показывает, что на интервале Δ для функции $k_*(t)$ возможны только следующие три ситуации:

- (i) $k_*(t) = \widehat{k}$;
- (ii) $k_*(t) > \widehat{k}$;
- (iii) $k_*(t) < \widehat{k}$.

В ситуации (i) ввиду соотношения (4.15) мы определим величину

$$\widehat{u}_{\text{sing}} = (\widehat{l}\widehat{k})^{-1}(1 - \delta\widehat{l}\widehat{m} - \mu\widehat{l}),$$

после чего перепишем его в виде

$$u_{\text{sing}}(t) = \widehat{u}_{\text{sing}} \in (u_{\min}, 1), \quad t \in \Delta.$$

Уравнения системы (2.3), формулы (2.8), а также соотношения (4.15) и (5.9) позволяют заключить, что точка $(\widehat{l}, \widehat{k}, \widehat{m})$ является положением равновесия системы (2.3), которое отвечает управлению $u = \widehat{u}_{\text{sing}}$. Кроме того, из формулы (4.17) следует, что в рассматриваемой ситуации $K_T = 0$.

В ситуации (ii) ввиду уравнения (5.9) функция $k_*(t)$ монотонно убывает на интервале Δ , а тогда согласно формуле (4.15) функция $u_{\text{sing}}(t)$ монотонно возрастает на нем. В ситуации (iii), наоборот, функция $k_*(t)$ монотонно возрастает, а потому функция $u_{\text{sing}}(t)$ монотонно убывает всюду на этом интервале.

Из соотношений (4.15) и (5.9) находим формулу

$$u'_{\text{sing}}(t) = \lambda(1 - \delta\widehat{l}\widehat{m} - \mu\widehat{l})\widehat{l}^{-1}k_*^{-2}(t)(k_*(t) - \widehat{k}), \quad t \in \Delta,$$

которая приводит к заключению о том, что $u'_{\text{sing}}(\theta) \neq 0$ в ситуациях (ii) и (iii). Также из (4.17) легко найти, что $K_T \neq 0$.

Таким образом, справедливо следующее

Предложение 1. В случае 1 соединение особого режима третьего порядка с неособым участком, на котором управление $u_*(t)$ является кусочно постоянной функцией, удовлетворяет принципу максимума Понтрягина, а потому оно допустимо.

Этот факт ранее был установлен в работе [6]. Он также согласуется с результатами теоремы из [2, гл. 8, § 2].

Случай 2. Пусть $u_{\text{sing}}(\theta) \in \{u_{\min}; 1\}$ и $u'_{\text{sing}}(\theta) \neq 0$. Это означает, что управление $u_*(t)$ непрерывно в точке соединения θ , но такое соединение не является гладким. Тогда в силу формулы Тейлора на интервале Δ справедливо разложение

$$u_{\text{sing}}(t) = u_{\text{sing}}(\theta) + u'_{\text{sing}}(\theta)(t - \theta) + o(t - \theta), \quad t < \theta,$$

из которого в силу включения (5.1) вытекают соотношения

$$u'_{\text{sing}}(\theta) > 0, \quad \text{если } u_{\text{sing}}(\theta) = 1, \quad \text{и} \quad u'_{\text{sing}}(\theta) < 0, \quad \text{если } u_{\text{sing}}(\theta) = u_{\min}. \quad (5.10)$$

Заметим также, что производная $L_0^{(6)}(t)$ функции $L_0(t)$ непрерывна в точке $t = \theta$.

Вычислим теперь с помощью формул (4.1), (4.2), (4.8), (4.9), (4.11), (4.12) и (5.7) производную $L_0^{(7)}(t)$ функции $L_0(t)$:

$$\begin{aligned} L_0^{(7)}(t) = & b_{71}(t)L_0(t) + b_{72}(t)L_1(t) + b_{73}(t)L_2(t) + b_{74}(t)L_3(t) + b_{75}(t)(m_*(t) - \widehat{m}) + b_{76}(t)L_4(t) + \\ & + b_{77}(t)(l_*(t) - \widehat{l}) + b_{78}(t)L_5(t) - 16\beta^2\lambda^{-2}(1 - \delta\widehat{l}\widehat{m} - \mu\widehat{l})g'(t)(1 - \delta\widehat{l}\widehat{m} - u_*(t)\widehat{l}k_*(t) - \mu\widehat{l}) + \\ & + 16\beta^2\lambda^{-2}(1 - \delta\widehat{l}\widehat{m} - \mu\widehat{l})g(t)u_*(t)\widehat{l}k'_*(t) + 16\beta^2\lambda^{-2}(1 - \delta\widehat{l}\widehat{m} - \mu\widehat{l})g(t)u'_*(t)\widehat{l}k_*(t). \end{aligned}$$

Как и в предыдущем случае, имеют место равенства

$$L_0^{(i)}(\theta) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, 6, \quad (5.11)$$

а для производной $L_0^{(7)}(t)$ в силу неравенства (4.14), выполненного и при $t = \theta$, а также (5.10) имеет место соотношение

$$\begin{aligned} L_0^{(7)}(\theta) = & 16\beta^2\lambda^{-2}(1 - \delta\widehat{l}\widehat{m} - \mu\widehat{l})g(\theta)u_*(\theta)\widehat{l}k'_*(\theta) < \\ < & 16\beta^2\lambda^{-2}(1 - \delta\widehat{l}\widehat{m} - \mu\widehat{l})g(\theta)u_{\text{sing}}(\theta)\widehat{l}k'_*(\theta) + 16\beta^2\lambda^{-2}(1 - \delta\widehat{l}\widehat{m} - \mu\widehat{l})g(\theta)u'_{\text{sing}}(\theta)\widehat{l}k_*(\theta) = 0, \end{aligned}$$

если $u_{\text{sing}}(\theta) = 1$, и противоположное соотношение, если $u_{\text{sing}}(\theta) = u_{\min}$. Из них, в свою очередь, вытекают соотношения

$$L_0^{(7)}(\theta) < 0, \quad \text{если } u_{\text{sing}}(\theta) = 1, \quad \text{и} \quad L_0^{(7)}(\theta) > 0, \quad \text{если } u_{\text{sing}}(\theta) = u_{\min},$$

которые вместе с равенствами (5.11) означают, что в точке $t = \theta$ функция переключений $L_0(t)$ не имеет локального максимума при $u_{\text{sing}}(\theta) = u_{\min}$ и локального минимума при $u_{\text{sing}}(\theta) = 1$. Этот факт означает, что рассматриваемый случай не имеет места.

Таким образом, справедливо следующее

Предложение 2. В случае 2 соединение особого режима третьего порядка с неособым участком, на котором управление $u_*(t)$ является кусочно постоянной функцией, не удовлетворяет принципу максимума Понтрягина, а потому оно недопустимо.

Этот факт также согласуется с результатами теоремы из [2, гл. 8, § 2]. Рассуждения, представленные в [9, 10], говорят о том, что если такое непрерывное соединение особого режима и неособого участка происходит, то неособый участок должен содержать бесконечное число переключений управления $u_*(t)$ между значениями u_{\min} и 1, которые накапливаются к точке соединения θ . К сожалению, строгого доказательства существования четтеринга (счетного числа переключений управления на этом участке) как способа соединения особого режима третьего порядка с неособым релейным участком авторам получить не удалось.

Замечание 6. Результаты, полученные при рассмотрении случаев 1 и 2, остаются справедливыми и при изучении левого конца интервала Δ , если там он соединяется с неособым релейным участком.

Для подтверждения полученных результатов были проведены численные расчеты в среде ВОСОР 2.0.5 для следующих значений параметров и начальных условий системы (2.3):

$$\begin{aligned} \mu &= 0.02, & \lambda &= 1.1, & \nu &= 0.01, & u_{\min} &= 0.3, \\ \delta &= 0.3296972478, & \eta &= 0.02997247708, & \beta &= 0.5017541285, & T &= 124.9, \\ l_0 &= 1.076224328, & k_0 &= 0.3563478388, & m_0 &= 1.818181818. \end{aligned} \quad (5.12)$$

ВОСОР 2.0.5 является специальной средой, реализованной в MATLAB, для решения задач оптимального управления с общими концевыми и фазовыми ограничениями со свободным или фиксированным конечным временем. После дискретизации по времени такие задачи аппроксимируются конечномерными задачами оптимизации, которые затем решаются с помощью программного обеспечения IPOPT, предназначенного для решения задач нелинейной оптимизации большой размерности. Подробное описание такой среды и ее возможностей дано в [1].

Важно отметить, что используемые в IPOPT численные методы требуют выбора начального приближения как для фазовых переменных, так и для управления. Этот факт был нами использован для численного обоснования оптимальности решения, полученного в результате расчетов. Такое обоснование заключается в многократном изменении начального приближения (осуществляется перебор среди узлов заданной сетки на множестве $\bar{\Lambda} \times [u_{\min}, 1]$ изменения фазовых переменных и управления, где $\bar{\Lambda}$ — замыкание множества Λ) и последующих вычислениях для получения одного и того же решения. Кроме того, при каждом таком вычислении среда ВОСОР 2.0.5 позволяет сочетать численные расчеты, стартующие из начального приближения, взятого из узла упомянутой сетки, с повторными численными расчетами, стартующими случайным образом из уже найденного решения. Смысл такого действия все тот же — вычисления для получения того же самого решения. Мы использовали оба этих приема.

Использованные для численных расчетов значения параметров и начальных условий (5.12) демонстрируют особый режим, описанный в ситуации (i) случая 1. Графики приближенных решений $l_*(t)$, $k_*(t)$, $m_*(t)$, а также соответствующего управления $u_*(t)$ в задаче минимизации (2.5) изображены на рис. 1. Представленный особый режим удерживает систему (2.3) в положении равновесия $(\hat{l}, \hat{k}, \hat{m}) = (1.448, 0.356, 1.357)$, которое отвечает особому управлению $\hat{u}_{\text{sing}} = 0.663$. Он соединяется с неособым участком, на котором управление $u_*(t)$ является кусочно постоянной функцией. Графики, изображенные на рис. 1, являются устойчивыми при уменьшении длительности периода лечения псориаза $[0, T]$: два последних “всплеска” концентрации кератиноцитов и отвечающие им интервалы управления $u_*(t)$ со значением 1 сохраняются; длина отрезка, на котором реализуется особый режим, сокращается. При $T \leq 65$ особый режим исчезает совсем и управление $u_*(t)$ превращается в кусочно постоянную функцию.

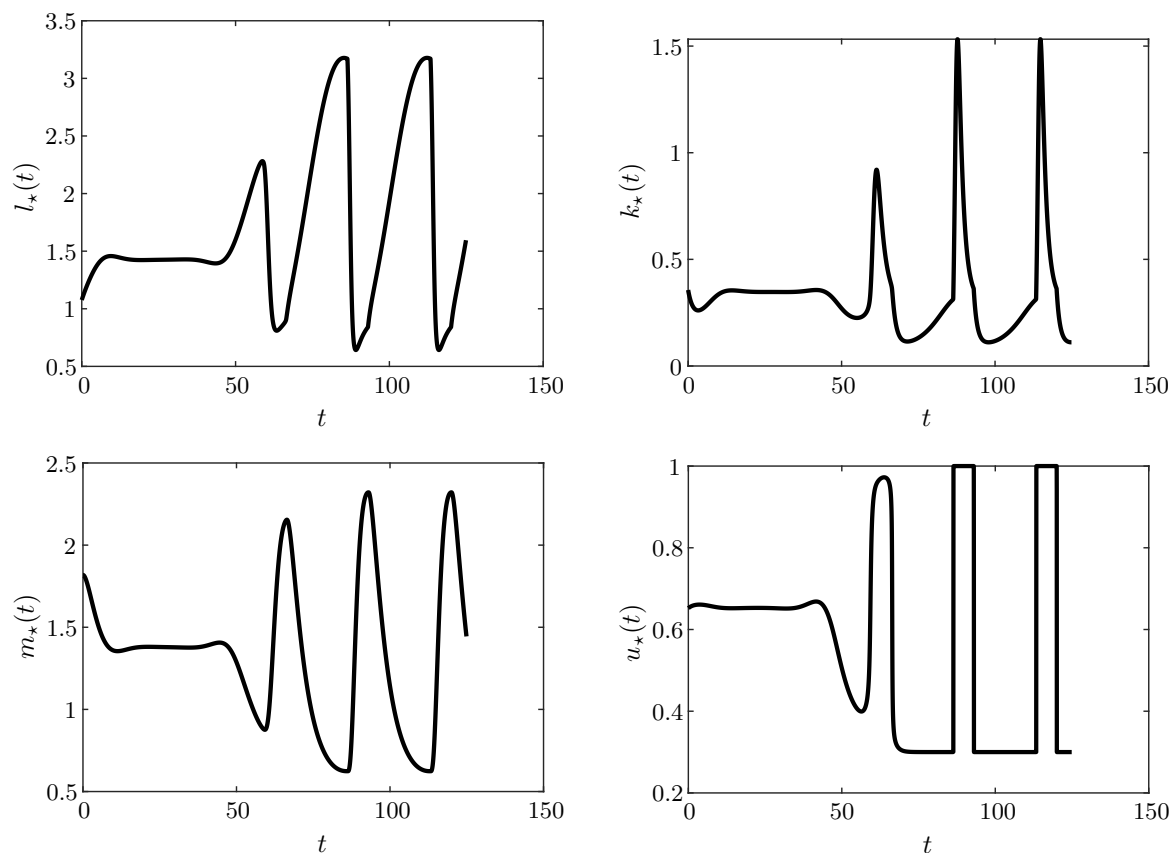


Рис. 1. Графики концентраций Т-лимфоцитов $l_*(t)$, кератиноцитов $k_*(t)$, дендритных клеток $m_*(t)$ и дозы лекарства $u_*(t)$

Следует отметить, что, хотя наша модель лечения псориаза может быть далека от совершенства, найденный для нее особый режим третьего порядка отражает возможное оптимальное лечение. Часто больные псориазом принимают лекарство именно в моменты обострения болезни, а не постоянно. Это соответствует “всплескам” увеличения концентрации кератиноцитов и приемам лекарства как раз в такие моменты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bonnans F., Martinon P., Giorgi D., Grélard V., Maindrault S., Tissot O., Liu J.* BOCOP 2.0.5 – User guide: E-print, 2017. <https://project.inria.fr/bocop/files/2017/05/UserGuide-BOCOP.pdf>.
2. *Габасов Р., Курилова Ф.М.* Особые оптимальные управления. М.: Либроком, 2013.
3. *Grigorieva E., Khailov E.* Optimal strategies for psoriasis treatment // *Math. Comput. Appl.* 2018. V. 23, N 3. Pp. 45.
4. *Grigorieva E.V., Khailov E.N.* Singular and non-singular optimal strategies for psoriasis control model // *Pure Appl. Funct. Anal.* 2019. V. 4, N 2. P. 219–246.
5. *Grigorieva E., Khailov E.* Chattering and its approximation in control of psoriasis treatment // *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B.* 2019. V. 24, N 5. P. 2251–2280.
6. *Хайлов Е.Н., Григорьева Э.В.* Об особом участке оптимального управления третьего порядка в задаче минимизации для математической модели лечения псориаза // *Тр. МИАН.* 2019. Т. 304. С. 298–308.
7. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
8. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
9. *Зеликин М.И., Борисов В.Ф.* Режимы учащающихся переключений в задачах оптимального управления // *Тр. МИАН.* 1991. Т. 197. С. 85–166.
10. *Zelikin M.I., Borisov V.F.* Theory of chattering control with applications to astronautics, robotics, economics, and engineering. Boston: Birkhäuser, 1994.