

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Стефанюк, В. П. Радченко, Теплообмен в плоской трубе при постоянной температуре стенки, *Матем. моделирование и краев. задачи*, 2005, часть 3, 221–224

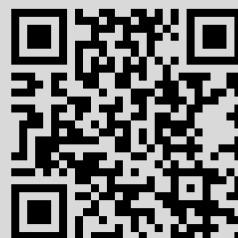
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.86

24 января 2025 г., 13:03:28



## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Даутов Р.З., Паймушин В.Н.* О методе интегрирующих матриц решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка // Изв. вузов. Математика. 1996. № 10. С. 13–24.
2. *Паймушин В.Н.* О некоторых численных методах в задачах механики оболочек сложной геометрии // Исследования по теории пластин и оболочек. Казань, 1990. Вып. 20. С. 10–18.
3. *Степанова Е.М., Петрушенко Ю.Я.* Алгебраический аналог задачи Пуассона на основе интегрирующих матриц, базирующихся на полиномах Лагранжа // Математическое моделирование и краевые задачи. Тр. Всерос. научн. конф-ции, Самара: СамГТУ, 2004. Ч. 1. С. 212.
4. *Петрушенко Ю.Я.* Метод конечных сумм, базирующийся на полиномах Лагранжа, в задачах механики оболочек вращения // Изв.вузов. Авиационная техника, 1993. № 4. С. 70–74.

УДК 536.2

*Е. В. Стефанюк, В. П. Радченко*

### ТЕПЛООБМЕН В ПЛОСКОЙ ТРУБЕ ПРИ ПОСТОЯННОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ СТЕНКИ

Получение аналитических решений задач теплообмена при течении жидкости в трубах и каналах представляет серьезные математические трудности. Точные аналитические решения указанных задач получены лишь для отдельных частных случаев, к тому же при весьма существенных допущениях. В связи с чем разработка приближенных аналитических методов решения таких задач имеет не только научную ценность, но и практическое значение, так как позволяет широко использовать результаты теоретических исследований для инженерных расчетов.

Математическая постановка задачи теплообмена в плоской трубе при граничных условиях первого рода имеет вид [1]

$$\frac{\partial^2 \Theta(y, x)}{\partial y^2} = (1 - y^2) \frac{\partial \Theta(y, x)}{\partial x} \quad (x > 0; \quad 0 \leq y < 1); \quad (1)$$

$$\Theta(y, 0) = 1; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Theta(0, x)}{\partial y} = 0; \quad (3)$$

$$\Theta(1, x) = 0, \quad (4)$$

где  $t$  – температура;  $\eta$  – координата, направленная вдоль течения потока;  $\xi$  – координата, направленная перпендикулярно течению потока;  $h = 2r_0$  – ширина плоской трубы;  $t_0$  – температура на входе в трубу;  $t_c$  – температура стенки трубы;  $a$  – коэффициент температуропроводности жидкости;  $\omega(\xi) = \frac{3}{2} \omega_{cp} \left(1 - \frac{\xi^2}{r_0^2}\right)$ ;  $y = \frac{\xi}{r_0}$ ;  $\Theta = \frac{t - t_0}{t_c - t_0}$ ;

$$x = \frac{8}{3} \frac{1}{Pe} \frac{\eta}{h}; \quad Pe = \frac{\omega_{cp} h}{a}; \quad \omega_{cp} - \text{средняя скорость течения жидкости.}$$

Следуя методу разделения переменных, решение задачи (1) – (4) разыскивается в виде [2, 3]

$$\Theta(y, x) = \varphi(x)\psi(y). \quad (5)$$

Подставляя (5) в (1), получим следующие два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$d\varphi(x)/dx + \mu^2 \varphi(x) = 0; \quad (6)$$

$$d^2\psi(y)/dy^2 + \mu^2 (1 - y^2)\psi(y) = 0, \quad (7)$$

где  $\mu^2$  – некоторая постоянная.

Решение уравнения (6) известно и имеет вид

$$\varphi(x) = A \exp(-\mu^2 x), \quad (8)$$

где  $A$  – неизвестный коэффициент.

Уравнение Штурма-Лиувилля (7) представим в виде

$$\psi''(y) + \lambda(1 - y^2)\psi(y) = 0, \quad (9)$$

где  $\lambda = \mu^2$ .

Граничные условия для уравнения (8) согласно (3), (4) будут

$$\psi'(0) = 0; \quad (10)$$

$$\psi(1) = 0. \quad (11)$$

Следуя методу Бубнова-Галеркина, решение задачи (9) – (11) разыскивается в виде

$$\psi_n(y) = \sum_{k=1}^n b_k \eta_k(y), \quad (12)$$

где  $b_k$  – неизвестные коэффициенты;  $\eta_k(y)$  – координатные функции, определяемые по формуле

$$\eta_k(y) = 1 - y^{2k} \quad (k = \overline{1, n}). \quad (13)$$

Соотношение (12) при использовании координатных функций вида (13) точно удовлетворяет граничным условиям (10), (11). Для нахождения неизвестных коэффициентов  $b_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) составляется невязка уравнения (9) и требуется ортогональность невязки ко всем координатным функциям  $\eta_k(y)$ , т.е.

$$\int_0^1 \left[ \left( \sum_{k=1}^n b_k \eta_k(y) \right)'' + \lambda(1-y^2) \sum_{k=1}^n b_k \eta_k(y) \right] \eta_j(y) dy = 0 \quad (j = \overline{1, n}). \quad (14)$$

Соотношение (14) представляет систему однородных алгебраических линейных уравнений. Однородная система уравнений (14) имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю. Раскрывая определитель, относительно  $\lambda$  получим алгебраический полином  $n$ -ной степени.

Допустим, что найденные из алгебраического полинома собственные числа расположены в порядке возрастания их абсолютных величин и образуют последовательность  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k$ .

Подставляя значения  $\lambda_k$ , ( $k = \overline{1, n}$ ) в систему уравнений (14), получим ее нетривиальное решение.

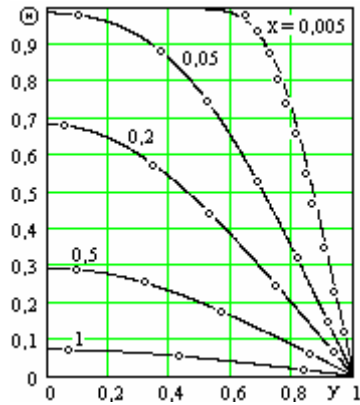
Приближенное решение задачи (1) – (4) с учетом (8), (12), записывается в виде

$$\Theta_n(y, x) = \sum_{k=1}^n A_k \psi_k(y) \exp(-\lambda_k x). \quad (15)$$

Неизвестные коэффициенты  $A_k$  находятся из начального условия (2). Для этого составляется невязка уравнения (2) и требуется ортогональность невязки ко всем собственным функциям. Отсюда приходим к следующей системе алгебраических линейных уравнений:

$$\int_0^1 \left[ \sum_{k=1}^n A_k \psi_k(y) \exp(-\lambda_k \cdot 0) - 1 \right] \psi_j(y) dy = 0. \quad (j = \overline{1, n}) \quad (16)$$

После нахождения  $A_k$  решение задачи (1) – (4) в замкнутом виде находится из (15).



Графики распределения относительной избыточной температуры:

— расчет по формуле (15)

(6-е приближение);

○ — точное решение [1]

На графиках рисунка представлены результаты расчетов безразмерной температуры по формуле (15) в шестом приближении в сравнении с точным решением [1].

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Петухов Б.С.* Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М.: Энергия, 1967. 412 с.
2. *Кудинов В.А., Карташов Э.М., Калашиников В.В.* Аналитические решения задач теплопереноса и термоупругости для многослойных конструкций: Учеб. Пособие для вузов. М.: Высшая школа, 2005, 430 с.
3. *Кудинов В.А., Аверин Б.В., Стефанюк Е.В., Назаренко С.А.* Аналитические методы теплопроводности. Самара: СамГТУ, 2004. 209 с.

УДК 517.9

*А.Ю. Сысоев*

#### **ТЕПЛОВОЙ ВЗРЫВ В ГОРЮЧЕМ ГАЗЕ, СОДЕРЖАЩЕМ КАПЛИ ЖИДКОГО ТОПЛИВА**

Изучению задачи о тепловом взрыве в смеси, состоящей из воспламеняющегося газа и капель горючей жидкости, посвящено достаточно много публикаций. В последние годы предлагаются все более сложные модели этого явления, анализ которых в основном опирается на использование современных вычислительных средств. При этом последовательно учитываются тепло- и массоперенос и процессы горения в смеси газа и капель горючего. Однако такой подход не позволяет учитывать вклад каждого фактора в отдельности и не дает возможности понять относительное влияние каждого из этих процессов. Альтернативный подход основывается на аналитическом анализе дифференциальных уравнений в некоторых предельных случаях. Этот подход не может заменить численное исследование модели, но может эффективно дополнить его.

Настоящая работа посвящена теоретическому изучению явления теплового взрыва, возникающего в воспламеняющейся газовой смеси с добавлением летучих капель горючего. Рассматриваемая физическая модель представляет собой развитие модели, предложенной в работе [1]. Исследуемая математическая модель представляет собой сингулярно возмущенную систему четырех существенно нелинейных диф-