Функциональный анализ и его приложения,
т. 11, вып. 4, 1977, 6—18.

УДК 517.946

КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧАХ РАССЕЯНИЯ

Б. Р. Вайнберг

Пусть $\psi(x, k)$ — решение задачи о рассеянии плоской волны в неоднородной среде, т. е.

$$[\Delta + k^2 q(x)]\,\psi(x, k) = 0, \quad x \in R^n, \tag{1}$$

где $q(x) \in C^\infty(R^n)$, $q(x) > 0$, $q(x) = 1$ при $r = |x| > a$, $\psi(x, k) = e^{ikx_n} + u(x, k)$, функция $u(x, k)$ удовлетворяет условиям излучения:

$$u = f(\theta, k)\, r^{(1-n)/2}\, e^{ikr}\,(1 + O(r^{-1})), \quad r \to \infty, \quad \theta = x/r.$$

В работе будет получена асимптотика $\psi(x, k)$ при $k \to \infty$, $|x| < b < \infty$ и асимптотика амплитуды рассеяния $f(\theta, k)$ при $k \to \infty$. Хорошо изучены аналогичного типа нестационарные задачи (см. [8] и имеющуюся там литературу). Стационарные обладают двумя дополнительными трудностями: 1) Эти задачи, по существу, являются двупараметрическими. Интересующее нас решение уравнения (1) выделяется условиями на бесконечности, и приходится изучать асимптотические разложения сразу по двум параметрам: $k \to \infty$, $r \to \infty$. В аналогичных нестационарных задачах благодаря конечности скорости распространения возмущений достаточно рассматривать решения в ограниченной части пространства. 2) После построения формального асимптотического решения возникает трудность в обосновании того, что оно является асимптотикой истинного решения, так как рассматриваемые значения параметра k принадлежат непрерывному спектру. В нестационарных задачах в этом месте помогают хорошо известные энергетические оценки.

С помощью канонического оператора В. П. Маслова [7], [8] можно получить формальное асимптотическое решение $\psi_N(x, k)$ уравнения (1):

$$[\Delta + k^2 q(x)]\,\psi_N(x, k) = O(k^{-N+n/2}).$$

В общем случае каустики лагранжевого многообразия, отвечающего рассматриваемой задаче, уходят на бесконечность. Поэтому мы не знаем точного поведения функции ψ_N и правой части в предыдущем равенстве при $r \to \infty$. А до тех пор, пока это не выяснено, нет никаких оснований утверждать, что ψ_N близко к интересующему нас конкретному решению ψ уравнения (1), так как уравнение (1) без граничных условий на бесконечности имеет бесконечное множество решений. Предлагаемый в настоящей работе метод позволяет, не заботясь о поведении построенных приближений при $r \to \infty$, оценить разность $\psi - \psi_N$ в шаре $|x| < b$ при $k \to \infty$ и доказать, что в этом шаре ψ_N является асимптотикой ψ при $k \to \infty$. Полученные результаты применяются затем для вывода и обоснования квазиклассической асимптотики амплитуды рассеяния (см. также [4] — [12] и имеющуюся там литературу). Результаты настоящей работы были анонсированы автором в [2].

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука»,
«Функциональный анализ и его приложения», 1977

План работы таков. Сначала мы укажем асимптотики функций $\psi(x, k)$, $f(\theta, k)$ и приведем некоторые известные утверждения, необходимые нам для доказательств, а затем дадим обоснование выписанных асимптотик. Константы a, b считаются фиксированными, и мы не будем следить за зависимостью каких-либо величин от этих констант.

Отвечающие задаче (1) уравнение Гамильтона — Якоби и система Гамильтона имеют вид:

$$|\nabla S|^2 - q(x) = 0, \quad S|_{x_n=-d} = -d, \quad S'_{x_n}|_{x_n=-d} = 1, \quad d \geqslant a, \tag{2}$$

$$\frac{dx}{ds} = 2p, \quad \frac{dp}{ds} = \nabla q(x), \quad x(0) = y\,(y_n = -d), \quad p(0) = (0, \ldots, 0, 1). \tag{3}$$

Обозначим через $\Lambda^n \subset R^{2n}_{x,p}$ лагранжево многообразие, образованное траекториями системы (3). Решая задачу (2), получаем функцию $S = S(x, p) \in C^\infty(\Lambda^n)$:

$$S(x, p) = -d + \int_l \langle p, dx \rangle, \tag{4}$$

где l — траектория системы (3), приходящая в точку (x, p). Очевидно, $S(x, p)$ не зависит от выбора d при $d \geqslant a$.

Всюду ниже предполагается выполненным

Условие А. Для любого $c < \infty$ существует такое T, что при $s > T$ решения системы (3) с начальными условиями $x(0) = y$, $p(0) = p_0$, $|y| < a$, $|p_0|^2 = q(y)$ лежат в области $|x| > c$.

Пусть K_{Λ^n} — канонический оператор В. П. Маслова [7], [8], действующий из пространства $C^\infty(\Lambda^n)$ в $C^\infty(R^n_x)$. Если многообразие Λ^n однозначно проектируется на R^n_x и, значит, $p = p(x)$ на Λ^n, то для любой функции $\varphi \in C^\infty(\Lambda^n)$ имеем: $K_{\Lambda^n}[\varphi] = \varphi e^{ikS}|_{p=p(x)}$. Напомним определение оператора K_{Λ^n} в общей ситуации. Разобьем множество $\{1, 2, \ldots, n\}$ на два непересекающихся подмножества $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ и $\beta = \{\beta_1, \ldots, \beta_{n-s}\}$. Пусть $|\alpha| = s$. Через x_α, p_α, x_β, p_β обозначим векторы из соответствующих компонент векторов x и p. Фиксируем локально конечное покрытие Λ^n открытыми на Λ^n ограниченными множествами U_j (картами), для которых $\bar{U}_j$ однозначно проектируется на какую-то из координатных лагранжевых плоскостей (p_α, x_β), $\alpha = \alpha(j)$, так что на U_j $x_\alpha = x_\alpha(p_\alpha, x_\beta)$, $p_\beta = p_\beta(p_\alpha, x_\beta)$. Через J_j обозначим модуль якобиана

$$J_j = \left| \frac{D(p_\alpha, x_\beta)}{D(y)} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{D(p_\alpha, x_\beta)}{D(y', s)} \right|, \quad y' = (y_1, \ldots, y_{n-1}). \tag{5}$$

Пусть $\{e_j\}$ — разбиение единицы на Λ^n, подчиненное покрытию $\{U_j\}$: $e_j \in C_0^\infty(U_j)$, $\Sigma e_j \equiv 1$ на Λ^n, и пусть $g_j(x) \in C^\infty(R^n_x)$, $g_j(x) = 1$ в некоторой окрестности проекции $\bar{U}_j$ на R^n_x, причем любой шар $|x| \leqslant c$ пересекается не более чем с конечным числом множеств $\operatorname{supp} g_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots$ Возможность удовлетворить последнему требованию следует из условия А, так как в силу этого условия часть Λ^n, которая при проектировании на R^n_x попадает в шар $|x| \leqslant c$, компактна.

Будем говорить, что точка $Q \in \Lambda^n$ не особая, если некоторая ее окрестность гомеоморфно проектируется на некоторую область в R^n_x. Множество особых точек обозначим через $\Sigma(\Lambda^n)$, его проекция на R^n_x называется каустикой. Пусть Q_0 — точка на Λ^n с координатами $x = (0, \ldots, 0, -d)$, $p = (0, \ldots, 0, 1)$ и U' — та из областей U_j, которая содержит Q_0. Через γ_j обозначим индекс В. П. Маслова — индекс цепочки карт, соединяющей U' и U_j (подробнее см. [7], [8]). Величина γ_j — это

целочисленная константа, которая в случае, когда $U_j \cap \Sigma(\Lambda^n) = \phi$, равна индексу пересечения любого пути, соединяющего Q_0 и U_j, с $\Sigma(\Lambda^n)$.

Для любой функции $\varphi \in C^\infty(\Lambda^n)$ положим

$$K_{\Lambda^n}[\varphi] = \sum_j \left(\frac{k}{-2\pi i}\right)^{\frac{|\alpha|}{2}} g_j \int\limits_{U_j} e_j e^{ik[S-\langle x_\alpha(p_\alpha, x_\beta), p_\alpha\rangle + \langle x_\alpha, p_\alpha\rangle] - i\frac{\pi}{2}\gamma_j} J_j^{-\frac{1}{2}} \varphi dp_\alpha. \tag{6}$$

Оператор K_{Λ^n}: $C^\infty(\Lambda^n) \to C^\infty(R_x^n)$ зависит (несущественно) от выбора разбиения $\{e_j\}$, функций g_j и координат (p_α, x_β) в U_j. В дальнейшем предполагается, что указанные функции и координаты зафиксированы.

Применив оператор $\Delta + k^2 q(x)$ к $K_{\Lambda^n}[\varphi]$, получим [8]:

$$[\Delta + k^2 q(x)] K_{\Lambda^n}[\varphi] = K_{\Lambda^n}\left[\left(\sum_{j=-1}^{N} k^{-j} V^j\right)\varphi\right] + O(k^{-N-1+n/2}), \quad k \to \infty, \tag{7}$$

где V^j — дифференциальные операторы на Λ^n, причем $V^{-1}\varphi = i\frac{\partial\varphi}{\partial s}$, где s — параметр вдоль траекторий системы (3). Коэффициентом при k^2 является оператор V^{-2} умножения на функцию $q(x) - |\nabla S|$, которая равна тождественно нулю в силу выбора S.

Будем искать формальное асимптотическое решение уравнения (1) в виде

$$\psi_N(x, k) = K_{\Lambda^n}\left[\sum_{s=0}^{N} \varphi_s k^{-s}\right]. \tag{8}$$

Подставим эту функцию в уравнение, воспользуемся формулой (7) и соберем члены при одинаковых степенях k. Приравняв их к нулю, получим рекуррентную систему уравнений переноса для определения функций φ_s:

$$\frac{d}{ds}\varphi_0 = 0, \quad i\frac{d}{ds}\varphi_1 = -V^0\varphi_0, \quad i\frac{d}{ds}\varphi_2 = -V^0\varphi_1 - V^1\varphi_0, \ldots \tag{9}$$

Пусть функции φ_s — решения этой системы с начальными условиями $\varphi_0|_{s=0} = 1$, $\varphi_j|_{s=0} = 0$ при $j > 0$. Тогда в любом шаре $|x| < b$

$$[\Delta + k^2 q(x)]\,\psi_N(x, k) = O(k^{-N+n/2}).$$

Лучами будем называть проекции траекторий системы (3) в R_x^n. Пусть $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — вектор с целочисленными неотрицательными компонентами, $|\nu| = \Sigma\nu_i$, $D_x^\nu = \frac{\partial^{|\nu|}}{\partial x_1^{\nu_1} \ldots \partial x_n^{\nu_n}}$.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* А. *Тогда при любых* N, ν *и* $|x| < b$

$$|D_x^\nu[\psi(x, k) - \psi_N(x, k)]| < C(N, \nu)\, k^{-N-1+|\nu|+n/2}, \quad k > 1. \tag{10}$$

В частности, если область $V \subset R_x^n$ *не содержит каустик и в каждую ее точку приходит* m *лучей системы* (3), *то равномерно на любом компакте, принадлежащем* V,

$$\psi(x, k) = \sum_{j=1}^{m} J_j^{-1/2}(x)\, e^{ikS_j(x) - i\frac{\pi}{2}\gamma_j} + O(k^{-1}), \tag{11}$$

где $S_j(x) = -d + \int\limits_{l_j} \langle p, dx\rangle$, l_j — *траектории системы* (3), *лучи которых*

приходят в точку x, $J_j(x) = \left|\frac{D(x)}{D(y)}\right|$ *определено в* (5) *и индексы* j *у функций* $S_j(x)$, $J_j(x)$ *и константы* γ_j *соответствуют той области* $U_s \subset \Lambda^n$, *в которую приходит траектория* l_j.

Так как до тех пор, пока траектория системы (3) не попадает в область $|x| < a$, решение системы (3) имеет вид:

$$x' = y', \quad x_n = -d + 2s, \qquad p = (0, \ldots, 0, 1),$$

то из условия А следует существование такого s_0, что при $s > s_0$ все траектории системы (3) лежат в области $|x| > a$. А так как $q(x) = 1$ при $|x| > a$, то, решая систему (3) при $|x| > a$, получаем, что при $s > s_0$

$$p = p(y'), \qquad x = 2p(y')\,s + \alpha(y'), \quad p(y'),\ \alpha(y') \in C^\infty(R^{n-1}_{y'}). \tag{12}$$

Далее, из той же системы (3) следует, что $|p|^2 = q(x)$ и, значит, $|p| = 1$ при $|x| > a$.

Обозначим через P отображение $R^{n-1}_{y'}$ на единичную сферу в R^n, задаваемое функцией $p = p(y')$, и через $I(y')$ — модуль якобиана этого отображения:

$$I(y') = \frac{d\sigma_p}{dy'}, \tag{13}$$

где $d\sigma_p$ — элемент площади сферы $|p| = 1$, заметаемый векторами $p(y')$, когда y' принадлежит элементарному объему dy'. Величина $I(y')$ — это угловая плотность лучей системы (3) на бесконечности. Будем через θ обозначать единичные векторы в R^n, через $\Omega_\varepsilon(\theta)$ обозначим множество векторов θ' единичной сферы, для которых $|\theta' - \theta| < \varepsilon$.

Лемма 1. *Пусть по направлению* $\theta = \theta_0$ *на бесконечность уходит* m *лучей системы* (3) *с* $y' = y'_{(j)}$, $1 \leqslant j \leqslant m$, причем $I(y'_{(j)}) \neq 0$. *Тогда существуют такое* $\varepsilon > 0$, *непересекающиеся окрестности* $\omega_j \subset R^{n-1}_{y'}$ *точек* $y'_{(j)}$ *и такое* $r_0 < \infty$, *что* 1) *отображение* $P : \overline{\omega}_j \to \overline{\Omega}_\varepsilon(\theta_0)$ *является гомеоморфизмом и* $I(y') \neq 0$ *при* $y' \in \overline{\omega}_j$; 2) *по каждому направлению* $\theta \in \Omega_\varepsilon(\theta_0)$ *на бесконечность уходит ровно* m *лучей системы* (3); 3) *лучи системы* (3) *при* $y' \in \overline{\omega}_j$ *и* $|x| > r_0$ *не содержат точек каустики.*

Будем обозначать через $y'_{(j)}(\theta)$, $\theta \in \Omega_\varepsilon(\theta_0)$, точку $y' \in \omega_j$, для которой $p(y') = \theta$, и через $I_j(\theta)$ — величину $I(y'_{(j)}(\theta))$. Пусть

$$F_j(y', s, \theta) = S(x, p) - \langle \theta, x \rangle, \quad y' \in \omega_j,$$

где (x, p) — это решение системы (3), т. е. при $s > s_0$ функции x и p имеют вид (12). Пусть при $\theta \in \Omega_\varepsilon(\theta_0)$

$$F_j(\theta) = F_j(y'_{(j)}(\theta), s, \theta)|_{s > s_0}. \tag{14}$$

Тот факт, что последняя функция не зависит от s, легко следует из (4) и (12).

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* А *и условие леммы* 1. *Тогда при достаточно малом* $\varepsilon > 0$, $\theta \in \Omega_\varepsilon(\theta_0)$ *и* $k \to \infty$

$$f(\theta, k) = \sum_{j=1}^{m} I_j^{-1/2}(\theta)\, e^{ikF_j(\theta) - i\frac{\pi}{2}\gamma_j} + O(k^{-1}), \tag{15}$$

где γ_j — *индекс пересечения траектории системы* (3), *для которой* $y' = y'_j(\theta_0)$, *с* $\Sigma(\Lambda^n)$, *и остаточный член оценивается равномерно по* θ *при* $\theta \in \Omega_\varepsilon(\theta_0)$.

При желании в ходе доказательства теоремы 2 можно получить следующие члены в асимптотическом разложении функции f.

Доказательства теорем 1, 2 опираются на полученные в [1] оценки при $t \to \infty$ для локальной энергии решений нестационарных задач с финитными начальными данными, которые, в свою очередь, следуют из полученных там же оценок резольвенты стационарных задач при $k \to \infty$. Эти оценки, а также асимптотики получены в гораздо более общей ситуации, чем в рассматриваемом здесь случае. В применении к нашей задаче получаем следующий результат. Пусть

$$\begin{gathered} Lw(x,t) \equiv \left[q(x)\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right] w(x,t) = 0, \quad t > 0, \\ w(x,0) = 0, \quad w_t'(x,0) = f(x). \end{gathered} \tag{16}$$

Теорема 3. (См. [1].) *Пусть выполнено условие* A *и* $f(x) = 0$ *при* $|x| > a$. *Тогда существуют такие* T_1, T_2, *что решение задачи* (16) *при* $|x| < b$, *любых* α, j *и* $t > (|\alpha| + j)\, T_1 + T_2$ *имеет оценки*

$$\left|\frac{\partial^j}{\partial t^j} D_x^\alpha w\right| \leqslant C(\alpha, j)\, t^{-j} \| f \|_{L^2(R^n)}.$$

При нечетном n *можно заменить* t^{-j} *на* $e^{-\delta t}$ *с некоторым* $\delta > 0$.

Замечание. Для того чтобы убедиться в том, что это утверждение является частным случаем теорем 8, 11 из [1], нужно только, во-первых, напомнить, что в рассматриваемом случае оператор $\hat{R}_k$ (см. [1]) не имеет полюсов при $\operatorname{Im} k \geqslant 0$, $k \neq 0$, и, во-вторых, доказать, что

$$\| \hat{R}_k \| < C\, |\ln k|, \qquad k \to 0. \tag{17}$$

Напомним определение оператора $\hat{R}_k$. Пусть $s \geqslant 0$ — целое, $H^s(\Omega)$ — пространство Соболева функций в $\Omega \subseteq R_x^n$, H_a^s — подпространство пространства $H^s(R_x^n)$, состоящее из функций, равных нулю при $|x| > a$, R_k — оператор:

$$R_k = (\Delta + k^2 q(x))^{-1} \colon H^s(R_x^n) \to H^{s+2}(R_x^n), \qquad \operatorname{Im} k > 0.$$

Тогда $\hat{R}_k = I_2 R_k I_1 : H_a^s \to H^{s+2}(|x| < b)$, где I_1: $H_a^s \to H^s(R_x^n)$, $I_2 : H^{s+2}(R_x^n) \to H^{s+2}(|x| < b)$ — естественные вложения.

Обозначим через $\hat{R}_k^0$ оператор $\hat{R}_k$ при $q(x) \equiv 0$. Очевидно, $\hat{R}_k = \hat{R}_k^0 + k^2 \hat{R}_k^0 (1 - q)\, \hat{R}_k$. А так как $\| \hat{R}_k^0 \| \leqslant C\, |\ln k|$, $k \to 0$, то из последнего равенства следует, что

$$\| \hat{R}_k \| \leqslant C\, |\ln k| + C_1\, |k^2 \ln k|\, \| \hat{R}_k \|, \qquad k \to 0,$$

что и доказывает справедливость оценки (17).

Рассмотрим нестационарную задачу, описывающую падающую плоскую волну:

$$\begin{gathered} \left[q(x)\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right] v(x,t) = 0, \qquad t > 0, \\ v(x,0) = e^{ikx_n}\, \theta|_{t=0}, \quad v_t'(x,0) = e^{ikx_n}(-ik\theta - \theta')|_{t=0}, \end{gathered} \tag{18}$$

где $\theta = \theta(x_n - t + a)$, $\theta(\tau) \in C^\infty(R^1)$, $\theta(\tau) = 0$ при $t > 0$, $\theta(\tau) = 1$ при $\tau < -1$. Пусть $\varphi(\tau) \in C_0^\infty[0, 1]$ и $\int_0^1 \varphi(\tau)\, d\tau = 1$. Из теоремы 3 следует (см. [3])

Теорема 4. *Пусть выполнено условие* A. *Тогда*

$$v = \psi(x, k)\, e^{-ikt} + v_1,$$

где при некоторых T', T'', *любых* N *и* α, $|x| < b$ *и* $T > (|\alpha| + N)\, T' + T''$

$$\left| D_x^\alpha \int_0^\infty v_1 e^{ikt} \varphi(t - T)\, dt \right| < C(N, \alpha) k^{-N}, \quad k > 1.$$

Эта теорема сводит отыскание асимптотики $\psi(x, k)$ к решенной [8] задаче об отыскании асимптотики решения в ограниченной области соответствующей нестационарной задачи (18).

Доказательство теоремы 1. Напомним, как строится асимптотика решения задачи (18).

Выпишем отвечающие задаче (18) уравнение Гамильтона — Якоби и систему Гамильтона:

$$-(\hat{S}'_t)^2 q(x) + |\nabla \hat{S}|^2 = 0 \quad (\nabla = \nabla_x); \qquad \hat{S}|_{t=0} = x_n, \qquad \hat{S}'_t|_{t=0} = \frac{-1}{\sqrt{q(x)}}, \tag{19}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = 2p, \quad \dfrac{dt}{ds} = -2\lambda q(x), \quad \dfrac{dp}{ds} = \lambda^2 \nabla q(x), \quad \dfrac{d\lambda}{ds} = 0; \\ x(0) = y, \quad t(0) = 0, \quad p(0) = (0, \ldots, 0, 1), \quad \lambda(0) = \dfrac{-1}{\sqrt{q(y)}}. \end{cases} \tag{20}$$

Через Λ^{n+1} обозначим лагранжево многообразие, образованное траекториями системы (20), через $\hat{S} = \hat{S}(x, t, p, \lambda) \in C^\infty(\Lambda^{n+1})$ — решение задачи (19):

$$\hat{S}(x, t, p, \lambda) = y_n, \tag{21}$$

где y определяет траекторию системы (20), приходящую в точку $(x, t, p, \lambda) \in \Lambda^{n+1}$. Пусть $K_{\Lambda^{n+1}}$: $C^\infty(\Lambda^{n+1}) \to C^\infty(R^{n+1}_{x,t})$ — канонический оператор, который строится по Λ^{n+1} совершенно так же, как выше строился K_{Λ^n} по многообразию Λ^n. Тогда (см. [8]) существуют такие $g_s(x, t, p, \lambda) \in C^\infty(\Lambda^{n+1})$, что разность между решением $v(x, t)$ задачи (18) и функцией

$$v_N(x, t) = K_{\Lambda^{n+1}} \left[\sum_{s=0}^{N} g_s k^{-s} \right]$$

при любых N, α, j, $T < \infty$, $|x| < b$, $t < T$ и $k > 1$ имеет оценки:

$$\left| \frac{\partial^j}{\partial t^j} D_x^\alpha (v - v_N) \right| \leqslant C(N, \alpha, j, T)\, k^{-N-1+|\alpha|+j+n/2}. \tag{22}$$

Функции g_s определяются из соответствующих уравнений переноса.

Лемма 2. *Сдвиг* $t \to t + \tau$, $\tau > 0$, *переводит решения системы* (20) *с* $x(0) = y$, $y_n \leqslant -a$ *в решения с* $x(0) = y - (0, \ldots, 0, \tau)$, *а проектирование* $t \to 0$, $\lambda \to 0$ *переводит их в решения системы* (3) *с* $x(0) = y$. *При этом в соответствующих точках* Λ^{n+1} *и* Λ^n *с* $y_n \leqslant -a$ *имеет место равенство* $\hat{S}(x, t, p, \lambda) = S(x, p) - t$ *и равны якобианы*:

$$\left| \frac{D(x, t)}{D(y, s)} \right| = 2 \left| \frac{D(x)}{D(y)} \right|. \tag{23}$$

Действительно, первое утверждение леммы проверяется непосредственно. Далее, пусть $\hat{l}$ — траектория системы (20) с $y_n < -a$, приходящая в точку (x, t, p, λ), и $\hat{l}$ — ее проекция в $R^{2n}_{x,p}$, т. е. соответствующая

траектория системы (3). Тогда из (3) следует, что $\langle p, dx\rangle = 2|p|^2 ds = 2q(x)\,ds$ и, значит,

$$S(x, p) = y_n + \int_l \langle p, dx\rangle = y_n + 2\int_l q(x)\,ds =$$
$$= y_n + 2\int_{\hat{l}} q(x)\,ds = y_n + t = \hat{S}(x, t, p, \lambda) + t.$$

Предпоследнее равенство следует непосредственно из (20), последнее — из (21).

Докажем справедливость равенства (23). Нетрудно проверить непосредственно из (3), (20), что если изменить начальные данные, уменьшив y_n на $\tau > 0$, и вычислить решение в точке $s + \tau/2$, то при $y_n \leqslant -a$ решения изменятся следующим образом: x не изменится, а t увеличится на τ, т. е. при $y_n \leqslant -a$ и $s \geqslant 0$ решения систем (3), (20) следующим образом зависят от аргументов y_n, s: x зависит только от $y_n + 2s$, а t есть сумма $2s$ и функции от $y_n + 2s$. Поэтому, если в определителе $\left|\frac{D(x, t)}{D(y, s)}\right|$ из последнего столбца вычесть удвоенный предпоследний и затем раскрыть определитель по элементам последнего столбца, то мы получим равенство (23). Лемма 2 доказана.

Оператор $K_{\Lambda^{n+1}}$ мы построим так, чтобы на функциях $\varphi \in C_0^\infty(\Lambda_1^{n+1})$ иметь

$$K_{\Lambda^{n+1}}[\varphi] = e^{-ikt} K_{\Lambda^n}[\varphi(t)], \tag{24}$$

где $\Lambda_1^{n+1} \subset \Lambda^{n+1}$ — многообразие, образованное траекториями системы (20) с $y_n < -a - 1$, а $\varphi(t) \in C^\infty(\Lambda^n)$ — значение функции φ при фиксированном t, перенесенное с помощью леммы 2 с Λ_1^{n+1} на соответствующую часть Λ^n и продолженное нулем на все Λ^n. Для этого следующим образом выберем функции $\hat{e}_j$, $\hat{g}_j$, с помощью которых строится оператор $K_{\Lambda^{n+1}}$, аналогичные функциям e_j, g_j в формуле (9), по которым строился оператор K_{Λ^n}. Пусть $f(y_n) \in C^\infty(R^1)$, $f(y_n) = 0$ при $y_n > -a - 1/3$, $f(y_n) = 1$ при $y_n < -a - 2/3$. Разбиение единицы $\Sigma \hat{e}_j \equiv 1$ на Λ^{n+1} построим следующим образом. Пусть $\{f_j\}$ — какое-то разбиение единицы на $\Lambda^{n+1} \setminus \Lambda_1^{n+1}$, такое, что supp f_j однозначно проектируется на одну из координатных лагранжевых плоскостей. Тогда в качестве набора $\{\hat{e}_j\}$ возьмем все функции $\{(1 - f) f_j\}$ и функции $\{fe_j\}$, где $\{e_j\}$ — разбиение единицы на Λ^n, по которому строился оператор K_{Λ^n}. При этом в качестве локальных координат в карте, отвечающей функции fe_j, будем брать (p_α, x_β, t), где (p_α, x_β) — координаты лагранжевой плоскости, отвечающей карте $U_j \subset \Lambda^n$. Для тех же карт положим $\hat{g}_j = g_j$. Из леммы 2 следует возможность указанного построения оператора $K_{\Lambda^{n+1}}$ и справедливость равенства (24).

Аналогично формуле (7) имеем:

$$\left[\Delta - q(x)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] K_{\Lambda^{n+1}}[\varphi] = K_{\Lambda^{n+1}}\left[\left(\sum_{j=-1}^{N} k^{-j}\hat{V}^j\right)\varphi\right] + O(k^{-N-1+n/2}).$$

Из формул (7) и (24) следует, что на Λ_1^{n+1}

$$\hat{V}^{-1} = V^{-1} + 2iq(x)\frac{\partial}{\partial t}, \quad \hat{V}^0 = V^0 - q(x)\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad \hat{V}^j = V^j, \quad j > 0.$$

Уравнения переноса, из которых определяются функции $g_s(x, t, p, \lambda)$, имеют вид (9) с заменой V^j на $\hat{V}^j$, и в силу последнего равенства в точках Λ_1^{n+1} им удовлетворяют функции $\varphi_s(x, p)$, которые были определены при

построении $\psi_N(x, k)$. Так как функции $\varphi_s(x, p)$ удовлетворяют также начальным условиям, то $g_s = \varphi_s$ в точках Λ_1^{n+1}. Отсюда и из (24), если $h(y_n) = f(y_n + 1)$, где функция $f(y_n)$ определена выше, то

$$v_N(x, t) = K_{\Lambda^{n+1}}\left[h \sum_{s=0}^{N} \varphi_s k^{-s}\right] + K_{\Lambda^{n+1}}\left[(1-h) \sum_{s=0}^{N} g_s k^{-s}\right] =$$

$$= e^{-ikt} K_{\Lambda^n}\left[h(t) \sum_{s=0}^{N} \varphi_s k^{-s}\right] + K_{\Lambda^{n+1}}\left[(1-h) \sum_{s=0}^{N} g_s k^{-s}\right] =$$

$$= e^{-ikt}\psi_N(x, k) + e^{-ikt} K_{\Lambda^n}\left[(1-h(t)) \sum_{s=0}^{N} \varphi_s k^{-s}\right] + K_{\Lambda^{n+1}}\left[(1-h) \sum_{s=0}^{N} g_s k^{-s}\right].$$

Далее, $K_{\Lambda^n}[\varphi] = O(k^{-\infty})$ на любом компакте в R_x^n, не пересекающемся с проекцией $\operatorname{supp} \varphi$ в R_x^n. Аналогичное свойство имеется и для оператора $K_{\Lambda^{n+1}}$. А так как в силу условия А при любом b и достаточно большом $T_0 = T_0(b)$ проекция $\operatorname{supp}(1-h)$ в $R_{x,t}^{n+1}$ не пересекается с полуцилиндром $|x| \leqslant b$, $t \geqslant T_0$, то на любом компакте в этом полуцилиндре

$$v_N(x, t) = e^{-ikt}\psi_N(x, k) + O(k^{-\infty}). \tag{25}$$

Это вместе с теоремой 4 и оценкой (22) доказывает справедливость оценки (10). Равенство (11) является очевидным следствием (10). Теорема 1 доказана.

Замечание. Из оценок (22), (25) и теоремы 1 следует, что при некотором $T = T(b, N + |\alpha| + j)$ и любом $T_1 \geqslant T$ функция v_1, определенная в теореме 4, имеет в области $|x| \leqslant b$, $T \leqslant t \leqslant T_1$ оценки

$$\left|\frac{\partial^j}{\partial t^j} D_x^\alpha v_1\right| \leqslant C(N, \alpha, j, T_1) k^{-N}, \qquad k > 1.$$

Доказательство леммы 1. Первое утверждение леммы есть очевидное следствие теоремы о неявной функции. Таким образом, при любом $\theta \in \Omega_\varepsilon(\theta_0)$ существует ровно по одной точке y' в каждой из окрестностей ω_j, для которых луч системы (3) уходит на бесконечность по направлению θ. Уменьшив, если это необходимо, ε, можно добиться того, чтобы других лучей системы (3), уходящих на бесконечность по направлению θ, не было. Действительно, предположив противное, получаем последовательность точек $y' = z'_{(n)}$, не принадлежащих ни одной из окрестностей ω_j и таких, что отвечающие им лучи системы (3) уходят на бесконечность по направлению $\theta = \theta_n$, причем $\theta_n \to \theta_0$ при $n \to \infty$. При $|y'| > a$ лучами системы (3) являются прямые $x' = y'$, и для них $\theta = (0, \ldots, 0, 1)$. Так как это направление не может совпадать с θ_0 (по направлению θ_0 идет только конечное число лучей), то $|z'_{(n)}| \leqslant a$ при достаточно большом n. Но тогда $z'_{(n)}$ имеет предельную точку $y' = \bar{y}'$, причем $\bar{y}'$ не совпадает ни с одним из $y'_{(j)}$, так как $z'_{(n)}$ лежат вне ω_j. В силу непрерывности $\theta(y')$ луч системы (3) с $y' = \bar{y}'$ уходит на бесконечность по направлению θ_0, что противоречит условиям леммы.

Для доказательства леммы 1 остается показать, что в некоторой окрестности бесконечности лучи системы (3) с $y' \in \bar{\omega}_j$ не содержат каустических точек. Обозначим через $\hat{J}_j$ величину (5):

$$\hat{J}_j = \left|\frac{D(x)}{D(y)}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{D(x)}{D(y', s)}\right|, \qquad y' \in \bar{\omega}_j, \tag{26}$$

где x имеет вид (12), а знак $\hat{}$ указывает на то, что в качестве координатной лагранжевой плоскости в данном случае берется R_x^n. Пусть $z = 2p(y')s$.

Тогда, очевидно, при $s \to \infty$

$$\hat{J}_j = \frac{1}{2}\left|\frac{D(z)}{D(y', s)}\right|(1 + O(s^{-1})) = \frac{1}{2}\frac{dz}{dy'ds}(1 + O(s^{-1})).$$

А так как $dz = (2s)^{n-1}\, d\sigma_p d|z| = 2\,(2s)^{n-1}\, d\sigma_p ds$, то из последнего равенства и (13) получаем, что при $s \to \infty$

$$\hat{J}_j = I(y')\,(2s)^{n-1}\,(1 + O(s^{-1})), \qquad y' \in \overline{\omega}_j, \tag{27}$$

откуда следует последнее утверждение леммы.

Доказательство теоремы 2. Пусть ψ — решение задачи рассеяния, так что функция $u = \psi - e^{ikx_n}$ удовлетворяет условиям излучения на бесконечности и уравнению

$$(\Delta + k^2)\, u = 0, \quad |x| \geqslant a.$$

Пусть $G = G(x, k)$ — удовлетворяющее условиям излучения на бесконечности фундаментальное решение оператора Гельмгольца:

$$G(x, k) = -\frac{i}{4}\left(\frac{k}{2\pi r}\right)^{(n-2)/2} H^{(1)}_{(n-2)/2}(kr),$$

где $H^{(1)}_{(n-2)/2}$ — функция Ханкеля первого рода. Из формулы Грина для функций $G(x - y, k)$ и u при $|y| > R > a$ получаем

$$u(y) = \int\limits_{r=R}\left(G\frac{\partial u}{\partial r} - u\frac{\partial G}{\partial r}\right)dS, \tag{28}$$

где $G = G(x - y, k)$, $r = |x|$, dS — элемент площади поверхности сферы $r = R$. Пусть $y/|y| = \theta$. При фиксированном x и $y \to \infty$

$$G(x - y, k) = \beta_n e^{-ik\langle\theta, x\rangle}\,|y|^{(1-n)/2} e^{ik|y|}\,(1 + O(|y|^{-1})),$$

$$\frac{\partial G}{\partial r}(x - y, k) = -ik\beta_n\left\langle\theta, \frac{x}{r}\right\rangle e^{-ik\langle\theta, x\rangle}\,|y|^{(1-n)/2}\, e^{ik|y|}\,(1 + O(|y|^{-1})),$$

где

$$\beta_n = \beta_n(k) = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{k}{2\pi i}\right)^{(n-3)/2}. \tag{29}$$

Подставляя эти выражения в (28), получаем

$$f(\theta, k) = \beta_n \int\limits_{r=R}\left[\frac{\partial u}{\partial r} + ik\left\langle\theta, \frac{x}{r}\right\rangle u\right] e^{-ik\langle\theta, x\rangle} dS.$$

Пусть $h(r) \in C_0^\infty\,[R, R + 1]$, $\int\limits_R^{R+1} h(r)\,dr = 1$. Тогда, так как $f(\theta, k)$ не зависит от R, то

$$f(\theta, k) = \beta_n \int\limits_{R<r<R+1} h(r)\left[\frac{\partial u}{\partial r} + ik\left\langle\theta, \frac{x}{r}\right\rangle u\right] e^{-ik\langle\theta, x\rangle} dx. \tag{30}$$

Как уже отмечалось при доказательстве леммы 1, $\theta_0 \neq (0, \ldots, 0, 1)$. Значит, при достаточно малом $|\theta - \theta_0|$ фаза $x_n - \langle\theta, x\rangle$ не имеет стационарных точек, и интеграл (30), если в нем заменить функцию u на e^{ikx_n}, будет иметь порядок $O(k^{-\infty})$ при $k \to \infty$. Таким образом, полагая в (30)

$u = \psi - e^{ikx_n}$, получаем

$$f(\theta, k) = \beta_n \int\limits_{R<r<R+1} h(r)\left[\frac{\partial\psi}{\partial r} + ik\left\langle\theta, \frac{x}{r}\right\rangle\psi\right] e^{-ik\langle\theta, x\rangle}dx + O(k^{-\infty}).$$

Теперь из теоремы 1 следует, что

$$f(\theta, k) = \beta_n \int\limits_{R<r<R+1} h(r)\left[\frac{\partial\psi_N}{\partial r} + ik\left\langle\theta, \frac{x}{r}\right\rangle\psi_N\right] e^{-ik\langle\theta, x\rangle}dx + \\ + O(k^{-N+n-5/2}), \quad k \to \infty, \tag{31}$$

где функция ψ_N имеет вид (8), функции φ_s определяются из уравнений переноса, а оператор K_{Λ^n} дается формулой (6).

Таким образом, функция $f(\theta, k)$ представляется в виде конечной суммы интегралов вида

$$k^{(|\alpha|+n-1)/2-s} \int\limits_{Q_j} f_{j,s}(x, p_\alpha)\, e^{ik[G_j(x, p_\alpha)-\langle\theta, x\rangle]-i\frac{\pi}{2}\gamma_j} dp_\alpha dx,$$

где Q_j — область в пространстве $R^{n+|\alpha|}_{x,p_\alpha}$, определяемая условиями: $(x, p) \in U_j$, $R < r < R+1$; $f_{j,s}(x, p_\alpha) \in C_0^\infty(Q_j)$; функция $ikG_j - i\frac{\pi}{2}\gamma_j$ совпадает с фазовой функцией в интеграле (6); $0 \leqslant s \leqslant N+1$.

До сих пор мы не накладывали никаких ограничений на выбор покрытия $\{U_j\}$ многообразия Λ^n, лишь бы $\bar{U}_j$ однозначно проектировалось на одну из координатных лагранжевых плоскостей. Сейчас мы выберем это покрытие специальным образом. Пусть U_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, — области на Λ^n, определяемые условиями $y' \in \omega_j$, $|x| > r_0$, где ω_j и r_0 определены лемме 1. Пусть ω'_j — подобласть ω_j такая, что $P\omega'_j = \Omega_{\varepsilon/2}(\theta_0)$. Покрывие $\{U_j\}$ на Λ^n выберем так, чтобы первые m областей были указанного вида, а остальные области U_j не пересекались ни с одной из областей $U'_j = \{(x, p) \in \Lambda^n : y' \in \omega'_j, |x| > r_0 + 1\}$. Канонический оператор K_{Λ^n} мы построим по этому специальному покрытию $\{U_j\}$, причем в качестве лагранжевой координатной плоскости (p_α, x_β) при $j \leqslant m$ выберем R^n_x. Возможность этого обеспечивается леммой 1. При этом константы γ_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, в формуле (6) будут иметь вид, указанный в теореме 2. Величина $R > a$ в формуле (31) была произвольной. Возьмем $R > r_0 + 1$, $N = n - 1$. Тогда, очевидно,

$$f(\theta, k) = ik\beta_n \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{Q_j} e_j(x)\, h(r)\, \hat{J}_j^{-1/2}\left[\left\langle p, \frac{x}{r}\right\rangle + \right. \\ \left. + \left\langle\theta, \frac{x}{r}\right\rangle\right](1 + O(k^{-1}))\, e^{ik[S_j(x)-\langle\theta, x\rangle]-i\frac{\pi}{2}\gamma_j} dx + \\ + \sum_{j>m}\sum_{s=0}^{N+1} k^{(|\alpha|+n-1)/2-s} \int\limits_{Q_j} f_{j,s}(x, p_\alpha)\, e^{ik[G_j(x, p_\alpha)-\langle\theta, x\rangle]-i\frac{\pi}{2}\gamma_j} dp_\alpha dx + O(k^{-1}), \tag{32}$$

где $e_j(x) \in C_0^\infty(U_j)$, $\hat{J}_j$ дается формулой (26); функция $S_j(x)$ определена в теореме 1; $p = p(x)$ таково, что $(x, p) \in \Lambda^n$; функция $O(k^{-1})$, стоящая под знаком интеграла, зависит от x и является многочленом от k^{-1}; $f_{j,s}(x, p_\alpha) = 0$ при $(x, p) \in \bigcup\limits_{1\leqslant j\leqslant m} U'_j$, т. е. при $y' \in \bigcup\limits_{1\leqslant j\leqslant m} \omega'_j$, $r > r_0 + 1$. А так

как $f_{j,s}(x, p_\alpha) \in C_0^\infty(Q_j)$ и $r > R > r_0 + 1$ в точках Q_j, то при $j > m$

$$f_{j,s}(x, p_\alpha) = 0 \quad \text{при} \quad y' \in \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant m} \omega_j'. \tag{33}$$

Применим к интегралам (32) при $j > m$ метод стационарной фазы. Имеем:

$$d[S - \langle x_\alpha(p_\alpha, x_\beta), p_\alpha\rangle] = \langle p_\beta, dx_\beta\rangle - \langle x_\alpha, dp_\alpha\rangle, \quad (x, p) \in \Lambda^n.$$

Значит,

$$dG_j = \langle p, dx\rangle + \langle x_\alpha - x_\alpha(p_\alpha, x_\beta), dp_\alpha\rangle - \langle \theta, dx\rangle, \quad p_\beta = p_\beta(p_\alpha, x_\beta).$$

Из леммы 1 и (33) следует, что при $\theta \in \overline{\Omega}_{\varepsilon/4}(\theta_0)$ на носителе функций $f_{j,s}(x, p_\alpha)$, $j > m$, нет точек стационарной фазы. Получаем, что при $\theta \in \overline{\Omega}_{\varepsilon/4}(\theta_0)$

$$f(\theta, k) = ik\beta_n \sum_{j=1}^{m} \int_R^{R+1} \int_{|x|=r} e_j(x) h(r) \widehat{J}_j^{-1/2} \left\langle p + \theta, \frac{x}{r}\right\rangle \times$$

$$\times (1 + O(k^{-1})) e^{ik[S_j(x) - \langle \theta, x\rangle] - i\frac{\pi}{2}\gamma_j} d\sigma\, dr + O(k^{-1}), \tag{34}$$

где $d\sigma$ — элемент площади сферы $|x| = r$. В интегралах по сферам $|x| = r$ перейдем к координатам y'. Для точек сферы $|x| = r$ в силу (12) при $r \to \infty$ имеем:

$$x = p(y') r + q(y', r), \quad |q| + |D^\alpha_{y', r} q| < C(\alpha), \tag{35}$$

что вместе с (13) дает:

$$\frac{d\sigma}{dy'} = I(y') r^{n-1}(1 + O(r^{-1})), \quad r \to \infty, \tag{36}$$

где функция $O(r^{-1})$ зависит, конечно, от y'. Так как $e_j(x) \in C_0^\infty(U_j)$, то $e_j(x) = 0$ при $y' \notin \omega_j$. Таким образом, из (34), (27) и (36) получаем

$$f(\theta, k) = ik\beta_n \sum_{j=1}^{m} \int_R^{R+1} h(r) P_j(r, k, \theta) r^{(n-1)/2} dr + O(k^{-1}), \tag{37}$$

$$P_j = \int_{\omega_j} e_j I^{1/2}(y')(1 + O(r^{-1})) \left\langle p + \theta, \frac{x}{r}\right\rangle (1 + O(k^{-1})) \times$$

$$\times e^{ik[S_j(x) - \langle \theta, x\rangle] - i\frac{\pi}{2}\gamma_j} dy', \tag{38}$$

где $p = p(y')$, а x дается формулой (35). Интегралы (38) вычислим с помощью метода стационарной фазы. Имеем:

$$\frac{\partial(S_j - \langle \theta, x\rangle)}{\partial y_i} = \sum_{k=1}^{n} (p_k - \theta_k) \frac{\partial x_k}{\partial y_i}, \quad i < n,$$

где x имеет вид (35). Таким образом, точка $y' = y'_{(j)}(\theta)$, в которой $p = \theta$, является точкой стационарной фазы, причем

$$\frac{\partial(S_j - \langle \theta, x\rangle)}{\partial y_i} = r\left[\sum_{k=1}^{n} (p_k(y') - \theta_k) \frac{\partial p_k(y')}{\partial y_i} + h_{i,j}(y', r)\right], \quad i < n, \tag{39}$$

$$h_{i,j}(y'_{(j)}(\theta), r) = 0; \; |D^\alpha_{y'} h_{i,j}(y', r)| < Cr^{-1}, \quad r \to \infty. \tag{40}$$

Обозначим через B матрицу с элементами $b_{i,s}$, $1 \leqslant i,\ s \leqslant n-1$:

$$b_{i,s} = \left[\frac{\partial}{\partial y_s} \sum_{k=1}^{n} (p_k - \theta_k) \frac{\partial p_k}{\partial y_i}\right]\Bigg|_{y'=y'_{(j)}(\theta)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial p_k}{\partial y_s} \frac{\partial p_k}{\partial y_i}\right)\Bigg|_{y'=y'_{(j)}(\theta)}.$$

Если $P = \{p_{i,s}\}$ — матрица размера $(n-1) \times n$ с элементами

$$p_{i,s} = \frac{\partial p_s(y')}{\partial y_i}\Bigg|_{y'=y'_{(j)}(\theta)},$$

то $B = PP^*$. Допишем к матрице P в качестве последней строчки вектор $p\,(y'_{(j)}\,(\theta))$. Получающуюся квадратную матрицу обозначим через A. Так как $|\,p\,| = 1$ при $|\,x\,| > R$, то при $|\,x\,| > R$

$$\sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial p_k}{\partial y_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_i} |\,p\,|^2 = 0,$$

откуда следует, что

$$AA^* = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, если $z = p\,(y')s$, то из соотношения $dz = s^{n-1}\,d\sigma_p ds$ и формулы (13) получаем

$$|\det A\,| = s^{1-n} \left|\frac{D\,(z)}{D\,(y',\,s)}\right| = s^{1-n} \frac{dz}{dy'ds} = \frac{d\sigma_p ds}{dy'ds} = I_j\,(\theta).$$

Из последних двух равенств вытекает, что при $\theta \in \overline{\Omega}_\varepsilon\ (\theta_0)$ матрица B положительно определена и $\det B = I_j^2(\theta)$. Но тогда из (39), (40) следует, что при $\theta \in \overline{\Omega}_\varepsilon\ (\theta_0)$, достаточно большом r_1 и $r > r_1$

1) матрица $H \equiv \left\{\dfrac{\partial^2 (S_j - \langle\theta,\,x\rangle)}{\partial y_i \partial y_s}\right\}\Bigg|_{y'=y'_{(j)}(\theta)}$, $1 \leqslant i,\ s \leqslant n-1$ положительно определена и

$$\det H = r^{n-1} \det B + O\,(r^{n-2}) = r^{n-1}\, I_j^2\,(\theta) + O\,(r^{n-2}),$$

2) существует такая не зависящая от r окрестность $\hat{\omega}_j\,(\theta)$ точки $y'_{(j)}\,(\theta)$, в которой единственной точкой стационарной фазы в интеграле (38) является точка $y' = y'_{(j)}\,(\theta)$.

При достаточно большом $r_2 \geqslant r_1$ и $r > r_2$ уже во всей окрестности ω_j единственной точкой стационарной фазы в интеграле (38) будет точка $y'_{(j)}\,(\theta)$. Действительно, точки стационарной фазы для интеграла (38) можно определять из условия $\nabla\ (S_j - \langle\theta,\ x\rangle) \perp n$, $|\,x\,| = r$, где n — единичный вектор нормали к сфере $|\,x\,| = r$. Так как $\nabla S_j\,(x) = p\,(y')$ и в силу (35) $n = p\,(y') + O\,(r^{-1})$, то это условие можно переписать так: $\langle p - \theta,\ p + O\,(r^{-1})\rangle = 0$. Далее, $|\,p\,| = |\,\theta\,| = 1$, и $p = \theta$ при $y' \in \overline{\omega}_j$ только в точке $y'_{(j)}\,(\theta)$. Значит, функция $\langle p - \theta,\ p\rangle$ не обращается в нуль в $\overline{\omega_i \setminus \hat{\omega}_j\,(\theta)}$. А так как эта функция непрерывна, то, очевидно, $\langle p - \theta,\ p + O\,(r^{-1})\rangle \neq 0$ при $y' \in \overline{\omega_j \setminus \hat{\omega}_j\,(\theta)}$ и r достаточно большом.

Окончательно получаем, что при $\theta \in \Omega_\varepsilon\,(\theta_0)$ и достаточно большом (но фиксированном) R асимптотика интегралов (38) определяется невырожденной стационарной точкой $y' = y'_{(j)}\,(\theta)$. Так как при $y' = y'_{(j)}\,(\theta)$, $\theta \in \Omega_{\varepsilon/2}\,(\theta_0)$, x, p, определяемом из (35), и достаточно большом r справедливы равенства

$$e_j = 1, \quad \langle p + \theta,\ x/r\rangle = 2 + O\,(r^{-1}), \quad S_j\,(x) - \langle\theta,\ x\rangle = F_j(\theta),$$

где $F_j(\theta)$ имеет вид (14), то при $\theta \in \Omega_{\varepsilon/2}(\theta_0)$

$$P_j = \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{(n-1)/2} 2I_j^{1/2}(\theta)\,(\det H)^{-1/2} e^{ikF_j(\theta)-i\frac{\pi}{4}(2\gamma_j-n+1)}(1+O(r^{-1}))(1+O(k^{-1}))=$$

$$= \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{(n-1)/2} 2r^{(1-n)/2} I_j^{-1/2}(\theta)\, e^{ikF_j(\theta)-i\frac{\pi}{4}(2\gamma_j-n+1)}(1+O(r^{-1}))(1+O(k^{-1})).$$

Подставляя это равенство в (37) и учитывая формулу (29), получаем, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ и $\theta \in \Omega_\varepsilon(\theta_0)$

$$f(\theta, k) = \sum_{j=1}^{m} \int_R^{R+1} I_j^{-1/2}(\theta)\, e^{ikF_j(\theta)-i\frac{\pi}{2}\gamma_j} h(r)(1+O(r^{-1}))\,dr + O(k^{-1}),$$

где $R > \max(r_0, r_2)$ — любое и $O(k^{-1})$ зависит, вообще говоря, от R. Так как $f(\theta, k)$ не зависит от R, то и главный член асимптотики этой функции не должен зависеть от R. Поэтому в последнем равенстве можно в главном члене асимптотики перейти к пределу при $R \to \infty$, оставив остаточный член отвечающим любому фиксированному значению $R > \max(r_0, r_2)$. При этом получаем разложение (15). Теорема 2 доказана.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 4 ноября 1976 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнберг Б. Р., О коротковолновой асимптотике решений стационарных задач и асимптотике при $t \to \infty$ решений нестационарных задач, УМН **XXX**, вып. 2 (1975), 3—55.
2. Вайнберг Б. Р., Квазиклассические приближения в задачах рассеяния, УМН **XXXII**, вып. 1 (1977), 236—237.
3. Вайнберг Б. Р., О стационарных задачах теории рассеяния и поведении при больших значениях времени решений нестационарных задач, Труды Всесоюзной конференции по уравнениям с частными производными, М., изд-во МГУ, 1977.
4. Кузьменко А. В., Представление волновой функции функциональным интегралом и квазиклассическое приближение в задаче рассеяния, ТМФ 29, № 1 (1976), 52—58.
5. Кучеренко В. В., Квазиклассическая асимптотика функции точечного источника для стационарного уравнения Шредингера, ТМФ 1, № 3 (1969), 384—406.
6. 6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Квантовая механика (нерелятивистская теория), М., «Наука», 1975.
7. Маслов В. П., Теория возмущений и асимптотические методы, М., изд-во МГУ, 1965.
8. Маслов В. П., Федорюк М. В., Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики, М., «Наука», 1976.
9. Маслов В. П., Задача о рассеянии в квазиклассическом приближении, ДАН СССР **151**, № 2 (1963), 306—309.
10. Мигдал А. Б., Крайнов В. П., Приближенные методы квантовой механики, М., «Наука», 1966.
11. Покровский В. Л., Халатников И. М., К вопросу о надбарьерном отражении частиц высоких энергий, ЖЭТФ **40**, № 6 (1961), 1713—1719.
12. Maida A., High Frequency Asymptotics for the Scattering Matrix and the Inverse Problem of Acoustical Scattering, Comm. on pure and appl. math. 29, № 3 (1976), 261—291.