



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Захаров, И. В. Собянина, Об одномерных интегродифференциальных уравнениях задач дифракции на экранах, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1986, том 26, номер 4, 632–636

<https://www.mathnet.ru/zvmmf4028>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.174

27 апреля 2025 г., 13:52:26



## ОБ ОДНОМЕРНЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ НА ЭКРАНАХ

ЗАХАРОВ Е. В., СОБЯНИНА И. В.

(Москва)

В предположении единственности доказано существование решения одномерного сингулярного интегродифференциального уравнения, возникающего в теории дифракции  $H$ -поляризованного электромагнитного поля на идеально проводящих экранах. Дано математическое обоснование метода кусочно-постоянной аппроксимации и коллокации для численного решения данного уравнения. Получена равномерная оценка скорости сходимости приближенного решения к точному.

В [1] задача дифракции  $H$ -поляризованного электромагнитного поля на цилиндрическом идеально проводящем экране была сведена к решению одномерного сингулярного интегродифференциального уравнения относительно плотности электрического тока  $j(t)$ , наведенного на поверхности:

$$(1) \quad \frac{1}{4\omega\epsilon h_\tau(\tau)} \frac{d}{d\tau} \int_{-b}^b j(t) \frac{\partial}{\partial t} H_0^{(2)}(kL) dt - \\ - \frac{\omega\mu}{4h_\tau(\tau)} \int_{-b}^b j(t) s(\tau, t) H_0^{(2)}(kL) dt = E_\tau^0(\tau),$$

где

$$h_\tau(\tau) = \{[\xi'(\tau)]^2 + [\eta'(\tau)]^2\}^{1/2}, \quad s(\tau, t) = \xi'(\tau)\xi'(t) + \eta'(\tau)\eta'(t),$$

$$L(\tau, t) = \{[\xi(\tau) - \xi(t)]^2 + [\eta(\tau) - \eta(t)]^2\}^{1/2};$$

контур поперечного сечения экрана задан параметрически:

$$\xi = \xi(t), \quad \eta = \eta(t), \quad t \in [-b, b];$$

$E_\tau^0(\tau)$  — известная функция. В [1] предложен и реализован также алгоритм численного решения уравнения (1). В настоящей статье в предположении единственности решения уравнения (1) доказано существование решения в некотором классе функций. Для численного решения (1) методом кусочно-постоянной аппроксимации и коллокации дана оценка скорости сходимости приближенного решения к точному при увеличении числа точек разбиения отрезка  $[-b, b]$ .

1. В дальнейшем удобнее рассматривать (1) в более абстрактной форме:

$$(2) \quad \frac{d}{dx} \int_{-b}^b \frac{\varphi(t)}{t-x} dt + \int_{-b}^b K(x, t) \varphi(t) dt = f(x), \quad -b < x < b.$$

Первое слагаемое в левой части уравнения — производная от сингулярного интеграла с ядром Коши, понимаемого в смысле главного значения [2]. Если контур поперечного сечения экрана достаточно гладкий ( $\xi''(t) \in H^\mu$ ,  $\eta''(t) \in H^\mu$ ) и без особых точек ( $[\xi'(t)]^2 + [\eta'(t)]^2 \neq 0$ ), то ядро  $K(x, t)$  имеет интегрируемую особенность при совпадении аргументов:

$$(3) \quad K(x, t) = K_0(x, t) (|x-t|^\lambda)^{-1}, \quad K_0(x, t) \in H^\alpha, \quad f(x) \in H^\alpha, \quad \alpha < 1 - \lambda < \mu,$$

где  $H^\alpha$  — пространство Гельдера с показателем  $\alpha$ .

Введем в рассмотрение пространство  $H^{1, \beta}$  функций  $\varphi(x)$ , обращающихся в нуль на концах отрезка  $\varphi(-b) = \varphi(b) = 0$  таких, что  $\varphi'(x) = \varphi'^*(x) (b^2 - x^2)^{-1/2}$ , причем  $\varphi'^*(x) \in H^\beta$ . Если в  $H^{1, \beta}$  ввести норму следующим образом:

$$\|\varphi\|_{H^{1, \beta}} = \|\varphi\|_C + \|\varphi'^*\|_{H^\beta}.$$

где

$$\|\varphi\|_C = \max_{x \in [-b, b]} |\varphi(x)|,$$

$$\|\psi\|_{H^\beta} = \max_{x \in [-b, b]} |\psi(x)| + \max_{x, x_0 \in [-b, b]} \frac{|\psi(x) - \psi(x_0)|}{|x - x_0|^\beta},$$

то  $H_*^{1, \beta}$  станет банаховым пространством.

Заметим, что из единственности решения дифракционной задачи (см. [3]) непосредственно следует, что уравнение (1) не может иметь двух различных решений, ограниченных на концах отрезка  $[-b, b]$ . Имеет место

**Теорема 1.** Если однородное уравнение, соответствующее (2), имеет только тривиальное решение, а правая часть  $f(x)$  и ядро  $K(x, t)$  удовлетворяют условию (3), то решение уравнения (2) существует в классе  $H_*^{1, \beta}$ , где

$$(4) \quad \beta = \min \{ \alpha - \varepsilon, 1/2 - \varepsilon \};$$

здесь  $\varepsilon > 0$  — произвольная сколь угодно малая константа.

**Доказательство.** Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение

$$(5) \quad \int_{-b}^b \frac{\varphi(t)}{t-x} dt + \int_{-b}^b K_1(x, t) \varphi(t) dt = F(x) + C,$$

где

$$K_1(x, t) = \int_{-b}^x K(\xi, t) d\xi, \quad F(x) = \int_{-b}^x f(\xi) d\xi,$$

$C$  — произвольная константа, причем из условий (3) непосредственно следует  $K_1(x, t) \in H^\alpha$ ,  $F'(x) \in H^\alpha$ . Уравнение (5) эквивалентно в классе  $H^\alpha$  уравнению Фредгольма II рода [2]

$$(6) \quad \varphi(x) - \int_{-b}^b N(x, t) \varphi(t) dt = \hat{F}(x), \quad \text{т. е.} \quad \varphi - A\varphi = \hat{F},$$

и дополнительному условию

$$(7) \quad \int_{-b}^b (b^2 - x^2)^{-1/2} \left[ \int_{-b}^b K_1(x, t) \varphi(t) dt - F(x) \right] dx = \pi C,$$

где

$$(8) \quad N(x, t) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-b}^b \left( \frac{b^2 - x^2}{b^2 - \tau^2} \right)^{1/2} \frac{K_1(\tau, t)}{\tau - x} d\tau,$$

$$(9) \quad \hat{F}(x) = -\frac{1}{\pi^2} \int_{-b}^b \left( \frac{b^2 - x^2}{b^2 - \tau^2} \right)^{1/2} \frac{F(\tau) + C}{\tau - x} d\tau =$$

$$= -\frac{1}{\pi^2} \int_{-b}^b \left( \frac{b^2 - x^2}{b^2 - \tau^2} \right)^{1/2} \frac{F(\tau)}{\tau - x} d\tau,$$

так как

$$\int_{-b}^b (b^2 - \tau^2)^{-1/2} \frac{d\tau}{\tau - x} = 0.$$

Покажем, что любое решение уравнения (6) из класса  $H^\alpha$  принадлежит пространству  $H_*^{1, \beta}$ , где  $\beta$  определяется формулой (4). Представим  $\hat{F}(x)$  в виде

$$(10) \quad \widehat{F}(x) = -\frac{1}{\pi^2} \int_{-b}^x d\xi \int_{-b}^b \left( \frac{b^2 - \tau^2}{b^2 - \xi^2} \right)^{1/2} \frac{f(\tau)}{\tau - \xi} d\tau.$$

Из (9), (10) на основании свойств сингулярных интегралов [2] имеем  $\widehat{F}(x) \in H_*^{1,\beta}$ . Аналогично из (8) для  $N(x, t)$  получаем

$$(11) \quad N(x, t) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-b}^x d\xi \int_{-b}^b \left( \frac{b^2 - \tau^2}{b^2 - \xi^2} \right)^{1/2} \frac{K(\tau, t)}{\tau - \xi} d\tau,$$

откуда следует (см. [2]), что функция

$$N_x''(x, t) = (b^2 - x^2)^{1/2} \frac{\partial N(x, t)}{\partial x}$$

имеет такую же особенность при совпадении аргументов, что и  $K(x, t)$  из (3), а именно:

$$(12) \quad N_x''(x, t) = K_2(x, t) (|x-t|)^{-1},$$

причем  $K_2(x, t) \in H^{\beta}$ . В силу того, что интегральный оператор с ядром (12) переводит пространство  $L_{\infty}[-b, b]$  в  $H^{\beta}[-b, b]$  (см. [4]), для любой функции  $\varphi(x) \in H^{\alpha}$  образ оператора  $A$  из (6) принадлежит  $H_*^{1,\beta}$ , откуда следует, что решение  $\varphi = A\varphi + \widehat{F}$  уравнения (6) из класса  $H^{\alpha}$  принадлежит классу  $H_*^{1,\beta}$ . На основании доказанного можно утверждать, что (5) эквивалентно уравнению (6) и функциональному условию (7) в классе  $H_*^{1,\beta}$ .

Докажем эквивалентность уравнений (2) и (6) в классе  $H_*^{1,\beta}$ . Пусть  $\varphi_0(x) \in H_*^{1,\beta}$  — решение (6), тогда  $\varphi_0(x)$  удовлетворяет уравнению (5) при  $C = C_0$  (константа  $C_0$  однозначно определяется из условия (7)), а следовательно,  $\varphi_0(x)$  — решение уравнения (2), так как последнее получено в результате дифференцирования правой и левой частей (5). Заметим, что в классе функций  $H_*^{1,\beta}$  первое слагаемое в левой части (2) имеет смысл (см. [5]). Пусть теперь  $\varphi_0(x)$  — решение уравнения (2). Заменяя  $x$  в (2) на  $\xi$  и проинтегрировав правую и левую части по  $\xi$  от  $-b$  до  $x$ , получим, что  $\varphi_0(x)$  является решением уравнения (5) с константой

$$C = \int_{-b}^b \frac{\varphi_0(t)}{b+t} dt.$$

Последний интеграл существует, так как  $\varphi_0(x) \in H_*^{1,\beta}$ . Но из сказанного выше следует, что  $\varphi_0(x)$  — решение уравнения (6). Итак, эквивалентность (2) и (6) в классе  $H_*^{1,\beta}$  доказана.

Оператор  $A$  с ядром (11) компактен в пространстве  $H_*^{1,\beta}$ , следовательно, из условия теоремы о единственности решения уравнения (2) и из доказанной эквивалентности (2) и (6) в банаховом пространстве  $H_*^{1,\beta}$  согласно альтернативе Фредгольма следует существование решения (6), а значит, и (2) при любой правой части, удовлетворяющей условию (3). Теорема доказана.

2. Перейдем к анализу алгоритма численного решения уравнения (2), основанного на методе кусочно-постоянной аппроксимации и коллокации [1].

Пусть точки  $x_1 = -b, x_2, \dots, x_{n+1} = b$  разбивают отрезок  $[-b, b]$  на  $n$  равных частей  $[x_i, x_{i+1}]$  длиной  $h = 2b/n, x_i = -b + h(i-1)$ . Будем искать решение (2) в виде линейной комбинации базисных функций  $\lambda_i(t)$  с неизвестными коэффициентами  $\varphi_n(x_{0i})$ :

$$\varphi_n(t) = \sum_{i=1}^n \varphi_n(x_{0i}) \lambda_i(t),$$

где  $\varphi_n(x_{0i})$  — значение приближенного решения в узлах интерполяции при  $x_{0i} = x_i + h/2, i = 1, 2, \dots, n$ ,

$$\lambda_i(t) = \begin{cases} 1, & t \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & t \in [x_i, x_{i+1}]. \end{cases}$$

Подставив  $\varphi_n(t)$  в (2) и потребовав равенства левой и правой частей (2) в  $n$  точках коллокации  $x_{0j}$ ,  $j=1, 2, \dots, n$ , совпадающих с узлами интерполяции, получим систему  $n$  линейных алгебраических уравнений относительно  $n$  неизвестных  $\varphi_n(x_{0i})$ . Поскольку

$$\frac{d}{dx} \int_{-b}^b \frac{\lambda_i(t)}{t-x} dt = (x-x_{i+1})^{-1} - (x-x_i)^{-1},$$

то система имеет вид

$$(13) \quad \sum_{i=1}^n \varphi_n(x_{0i}) [(x_{0j}-x_{i+1})^{-1} - (x_{0j}-x_i)^{-1}] + \sum_{i=1}^n \varphi_n(x_{0i}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} K(x_{0j}, t) dt = f(x_{0j}).$$

В этом методе, как и в методе саморегуляризации, который используется для решения уравнений Фредгольма I рода со слабой особенностью в ядре, важным моментом является выбор точек коллокации, совпадающих с узлами интерполяции искомой функции, находящимися в середине частичных отрезков разбиения. Как видно из (13), коэффициенты матрицы растут по модулю при приближении к главной диагонали. Заметим, что аналогичные системы возникают в задачах аэродинамики при решении уравнения Прандтля методом дискретных вихрей [6]. Справедлива

**Теорема 2.** Пусть уравнение (2) имеет единственное решение  $\varphi(x)$ . Тогда система линейных алгебраических уравнений (13) однозначно разрешима при достаточно большом числе точек разбиения  $n$  и решение  $\varphi_n(x_{0i})$  системы (13) сходится к точному решению  $\varphi(x_{0i})$  уравнения (2) во всех точках коллокации  $x_{0i}$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ , при  $n \rightarrow \infty$ , причем справедлива равномерная оценка

$$(14) \quad \max_{1 \leq i \leq n} |\varphi_n(x_{0i}) - \varphi(x_{0i})| \leq Ch^\beta,$$

где  $h$  — длина частичного отрезка разбиения,  $C$  — здесь и далее некоторая константа, не зависящая от  $h$ ,  $\beta$  определяется формулой (4).

**Доказательство.** По доказанной выше эквивалентности уравнений (2) и (6),  $\varphi(x)$  является решением уравнения Фредгольма II рода (6). По блочному методу заменим уравнение (6) функциональным уравнением

$$(15) \quad \tilde{\varphi}(x) - \sum_{j=1}^n \tilde{\varphi}(x_{0j}) \int_{x_j}^{x_{j+1}} N(x, t) dt = \hat{F}(x), \quad \text{т. е.} \quad \tilde{\varphi} - \tilde{A}\tilde{\varphi} = \hat{F}.$$

В силу того что  $\hat{F}(x) \in H_*^{1, \beta}$ , а ядро  $N(x, t)$  имеет вид (11), (12), уравнения (6), (15) можно рассматривать как операторные в пространстве  $H_*^{1, \beta}$ , причем операторы  $A$  и  $\tilde{A}$  близки по норме [4]:

$$(16) \quad \|A - \tilde{A}\|_{H_*^{1, \beta}} \leq Ch^\beta.$$

Из оценки (16) следует, что при достаточно больших  $n$  уравнение (15) однозначно разрешимо в силу однозначной разрешимости (6), причем имеет место неравенство

$$(17) \quad \|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{H_*^{1, \beta}} \leq Ch^\beta.$$

Для нахождения решения (15) необходимо и достаточно решить систему линейных алгебраических уравнений, которая получается при  $x=x_{0i}$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ :

$$(18) \quad \tilde{\varphi}(x_{0i}) - \sum_{j=1}^n \tilde{\varphi}(x_{0j}) \int_{x_j}^{x_{j+1}} N(x_{0i}, t) dt = \hat{F}(x_{0i}), \quad \text{т. е.} \quad (E - \hat{A}_n) \tilde{\varphi}_n = \hat{F}_n,$$

где  $E$  — единичная матрица. Из эквивалентности (18), (15) следует (см. [7]), что норма обратной матрицы ограничена независимо от  $n$ , так как уравнение (6) является уравнением Фредгольма II рода, и, как следствие (17), справедлива оценка

$$(19) \quad \max_{1 \leq i \leq n} |\tilde{\varphi}(x_{0i}) - \varphi(x_{0i})| \leq Ch^\beta.$$

Обращая главную часть исходной системы (13), которая представлена первой суммой, так, как это сделано в [6] при обосновании метода дискретных вихрей, и используя основные оценки, полученные в [6], приведем систему (13) к эквивалентной системе алгебраических уравнений:

$$(20) \quad \varphi_n(x_{0i}) - \left[ \sum_{j=1}^n \varphi_n(x_{0j}) \right] \frac{1}{\pi^2} \int_{-b}^{x_{0i}} d\xi \int_{-b}^b \left( \frac{b^2 - x_0^2}{b^2 - \xi^2} \right)^{1/2} \times \\ \times \left[ (x_0 - \xi)^{-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} K(x_0, \tau) d\tau \right] dx_0 = \\ = - \frac{1}{\pi^2} \int_{-b}^{x_{0i}} d\xi \int_{-b}^b \left( \frac{b^2 - x_0^2}{b^2 - \xi^2} \right)^{1/2} \frac{f(x_0)}{x_0 - \xi} dx_0 + \theta_n(x_{0i}),$$

где

$$\max_{1 \leq i \leq n} |\theta_n(x_{0i})| \leq Ch^\beta.$$

Сравнивая системы (18) и (20) и учитывая ограниченность нормы обратной матрицы  $(E - \hat{A}_n)^{-1}$  и оценку (19), получаем, что система линейных алгебраических уравнений (20), а следовательно, и исходная система (13) однозначно разрешима при достаточно больших  $n$ , причем скорость сходимости приближенного решения к точному решению уравнения (2) может быть оценена с помощью неравенства (14):

$$\max_{1 \leq i \leq n} |\varphi_n(x_{0i}) - \varphi(x_{0i})| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |\varphi_n(x_{0i}) - \tilde{\varphi}(x_{0i})| + \\ + \max_{1 \leq i \leq n} |\tilde{\varphi}(x_{0i}) - \varphi(x_{0i})| \leq Ch^\beta,$$

где  $\beta$ ,  $0 < \beta < 1$ , определяется по формуле (4). Теорема доказана.

#### Литература

1. Давыдов А. Г., Захаров Е. В., Пименов Ю. В. Метод решения задач дифракции электромагнитных волн на бесконечно тонких цилиндрических экранах. — Докл. АН СССР, 1981, т. 261, № 2, с. 338–341.
2. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
3. Хенл Х., Мауэ П., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964.
4. Бакушинский А. Б. Некоторые вопросы приближенного решения интегральных уравнений со «слабой» особенностью. — В кн.: Вычисл. методы и программирование. Вып. X. М.: Изд-во МГУ, 1968, с. 9–15.
5. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
6. Лифанов И. К. О методе дискретных вихрей для крыла бесконечного размаха и уравнении Прандтля для крыла конечного размаха. — Изв. вузов. Матем., 1980, № 6, с. 44–51.
7. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.

Поступила в редакцию 28.VI.1984