

8. Ломакин Е.В., Работнов Ю.Н. Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела // Изв. АН СССР. Механ. твердого тела. 1978. N 6. 28–34.
9. Ломакин Е.В. Определяющие соотношения деформационной теории для дилатирующих сред // Изв. РАН. Механ. твердого тела. 1991. N 6. 66–75.
10. Rice J., Rosengren J.F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material // J. Mech. and Phys. Solids. 1968. 16. 1–12.
11. Hutchinson J.W. Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material // J. Mech. and Phys. Solids. 1968. 16. 13–31.
12. Белякова Т.А., Ломакин Е.В. Упругопластическое деформирование дилатирующей среды вблизи вершины трещины в условиях плоского напряженного состояния // Изв. РАН. Механ. твердого тела. 1996. N 5. 99–109.

Поступила в редакцию  
22.12.2010

УДК 53.089.6

## “ТЕЛЕСКОПИЧЕСКАЯ” СИСТЕМА В ЗАДАЧЕ КАЛИБРОВКИ БЕСПЛАТФОРМЕННЫХ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ НАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМ

А. В. Деревянкин<sup>1</sup>, А. И. Матасов<sup>2</sup>

Исследован алгоритм стендовой калибровки бесплатформенных инерциальных навигационных систем, разработанный в Московском институте электромеханики и автоматике. Построена математическая модель процесса калибровки и предложен способ представления рассматриваемой задачи калибровки в форме стандартной задачи оценивания при помощи так называемой “телескопической” системы. На базе исходного алгоритма построен новый, позволяющий повысить точность оценивания параметров блока акселерометров и блока гироскопов в ходе калибровки. Определена предельная точность оценивания параметров.

*Ключевые слова:* бесплатформенные инерциальные навигационные системы, калибровка, фильтр Калмана.

An algorithm for the bench-test calibration of strapdown inertial navigation systems is studied. This algorithm was developed at the Moscow Institute of Electromechanics and Automatics. A mathematical model for the calibration process is constructed. A method for representing the calibration problem in the form of a standard estimation problem is proposed. This method exploits a so-called “telescopic” system. On the basis of the original algorithm, a new calibration algorithm is constructed; this new algorithm allows one to improve the estimation performance of the parameters of an inertial sensor unit. The maximum achievable accuracy for the parameters of the unit is determined.

*Key words:* strapdown inertial navigation systems, calibration, Kalman filter.

**1. Введение.** Проблема калибровки бесплатформенных инерциальных навигационных систем (БИНС) исследуется начиная с 1970-х гг. во многих научных учреждениях и на специализированных предприятиях, в том числе и в МГУ (см., например, [1–13]). Тем не менее общая теория, которая держала бы подробное математическое исследование этой проблемы, до сих пор отсутствует. Многие алгоритмы, разработанные на предприятиях, позволяют успешно решать конкретные задачи. Вместе с тем соответствующее математическое обоснование не всегда отличается достаточной строгостью; это не дает возможности оценить применимость алгоритмов к другим схожим задачам, предложить методы модернизации этих алгоритмов и определить предельно достижимую точность калибровки. В связи с этим описание алгоритмов калибровки со строгих математических позиций представляется полезным.

**2. Исходный алгоритм оценивания.** В данной работе проведено математическое исследование алгоритма стендовой калибровки БИНС, разработанного в Московском институте электромеханики и ав-

<sup>1</sup> Деревянкин Алексей Викторович — науч. сотр. ФГУП “Научно-производственный центр автоматки и приборостроения им. Н.А. Пилюгина”, e-mail: aw.ois@viniti.ru.

<sup>2</sup> Матасов Александр Иванович — доктор физ.-мат. наук, проф., вед. науч. сотр. лаб. управления и навигации мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: alexander.matasov@gmail.com.

томатики (МИЭА). Рассматриваемый алгоритм состоит из 14 отдельных операций, в которых параметры погрешностей блоков чувствительных элементов БИНС (блока акселерометров и блока гироскопов) последовательно определяются при помощи простейшего линейного оценителя по скоростной информации, полученной в режиме навигации после осуществления выставки и выполнения специальных поворотов корпуса БИНС, установленной на поворотном стенде. Основание последнего неподвижно относительно Земли. Между каждыми двумя операциями работа БИНС в режиме навигации прерывается; затем производится поворот БИНС на стенде в новое положение и ее выставка. Под выставкой системы понимается определение в начальный момент времени взаимной ориентации приборного трехгранника, жестко связанного с корпусом БИНС, и географического трехгранника, оси которого ориентированы по географической вертикали и сторонам света. Учесть многократные переустановки и выставки системы простым способом не представляется возможным. Поэтому основная сложность задачи состоит в погружении рассматриваемой последовательности операций в русло стандартной постановки задач оценивания. Это позволяет учесть всю имеющуюся измерительную информацию и применить для решения задачи калибровки стандартный оптимальный метод оценивания (фильтр Калмана). В соответствии с этим целью описываемого в настоящей работе исследования является подробная математическая формализация рассматриваемого калибровочного эксперимента, которая дает возможность проверить корректность алгоритма калибровки и определить предельно достижимые точности оценивания параметров. Для решения указанной задачи предлагается новый подход, заключающийся в построении так называемой “телескопической” системы; опишем принцип ее построения.

**3. “Телескопическая” система.** Для каждой операции фазовый вектор уравнений ошибок БИНС включает в себя переменную часть  $x(t) \in \mathbb{R}^7$ , состоящую из полных ошибок определения координат, динамических ошибок определения относительной скорости и кинематических ошибок. Эти компоненты необходимо дополнить постоянной частью  $p \in \mathbb{R}^{27}$ , которая представляет собой инструментальные погрешности блоков чувствительных элементов БИНС. В рассматриваемой модели эти погрешности включают в себя смещения чувствительных масс акселерометров, масштабные коэффициенты, смещения нулей и коэффициенты перекосов осей чувствительности. Поведение фазового вектора описывается известными уравнениями ошибок БИНС [14] при помощи линейной динамической системы вида

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)p + C(t)q(t), \dot{p} = 0,$$

где  $A(t) \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$ ,  $B(t) \in \mathbb{R}^{7 \times 27}$  и  $C(t) \in \mathbb{R}^{7 \times 6}$  — заданные матрицы;  $q(t) \in \mathbb{R}^6$  — вектор шумов системы.

Построим на основе уравнений ошибок БИНС “телескопическую” систему, объединяющую все 14 операций. Данное построение заключается в том, что переменная часть  $x(t)$  фазового вектора системы расщепляется на 14 (по числу операций) субвекторов  $x_k(t) \in \mathbb{R}^7$ ,  $k = 1, 2, \dots, 14$ ; при этом поведение субвектора  $x_k(t)$  подчиняется уравнениям ошибок БИНС на промежутке времени, соответствующем  $k$ -й операции, а вне этого промежутка субвектор  $x_k(t)$  является постоянным. Размерность полного фазового вектора

$$X = (x_1^T(t), x_2^T(t), \dots, x_{14}^T(t), p^T)^T,$$

таким образом, равна  $14 \cdot 7 + 27 = 125$  (индекс “ $T$ ” обозначает транспонирование). Полный промежуток времени, на котором осуществляется калибровка, представляет собой объединение 14 непересекающихся промежутков времени  $[T_0, T_1]$ ,  $[T_1, T_2]$ ,  $\dots$ ,  $[T_{13}, T_{14}]$ , следующих один за другим и соответствующих рассматриваемым 14 операциям. Отметим, что такое построение позволяет учесть и начальные ковариационные связи, порождаемые выставкой; последние представляют собой линейные зависимости между кинематическими ошибками в начальный момент времени и погрешностями блока акселерометров. В рассматриваемой задаче детальный учет этих ковариационных связей принципиален.

Приведем динамические уравнения “телескопической” системы в матричном виде:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \begin{cases} A_1(t)x_1(t) + B_1(t)p + C_1(t)q(t), & t \in [T_0, T_1]; \\ 0, & t \notin [T_0, T_1], \end{cases} \\ \dot{x}_2(t) &= \begin{cases} A_2(t)x_2(t) + B_2(t)p + C_2(t)q(t), & t \in [T_1, T_2]; \\ 0, & t \notin [T_1, T_2], \end{cases} \\ &\dots \\ \dot{x}_{14}(t) &= \begin{cases} A_{14}(t)x_{14}(t) + B_{14}(t)p + C_{14}(t)q(t), & t \in [T_{13}, T_{14}]; \\ 0, & t \notin [T_{13}, T_{14}], \end{cases} \\ \dot{p} &= 0. \end{aligned}$$

Отметим, что при матрицах  $A(t)$ ,  $B(t)$  и  $C(t)$  также появился нижний индекс, обозначающий номер операции, поскольку выражения для этих матриц на разных временных промежутках имеют, вообще говоря, разный вид, зависящий от ориентации БИНС в соответствующей операции.

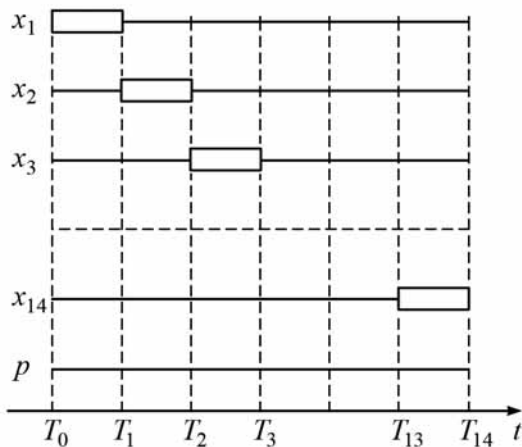


Схема “телескопической” системы

Формализация порождает новый алгоритм, который строится на базе тех же поворотов корпуса БИНС и тех же измерений, что использовались в исходном алгоритме. Отличие нового алгоритма от исходного заключается в том, что оценка вектора состояния системы осуществляется теперь при помощи фильтра Калмана.

Следующий, более стандартный этап решения задачи заключается в вычислении переходной матрицы системы и в построении дискретной системы, эквивалентной исходной непрерывной динамической системе. Эта процедура также оказывается сопряженной с некоторыми сложностями, поскольку из-за учета разнесения чувствительных масс акселерометров матрица системы содержит первую и вторую производные угла поворота станда: этот угол как функция времени в явном виде неизвестен, а его производные, кроме того, могут принимать весьма большие значения в начале и в конце поворота. Тем не менее выражения для соответствующего блока переходной матрицы удалось получить аналитически. После вычисления переходной матрицы и формирования дискретной системы задается начальная ковариационная матрица. После этого осуществляется оценка фазового вектора “телескопической” системы посредством фильтра Калмана.

**5. Анализ полученных результатов. Сравнение алгоритмов.** В ходе исследования рассматриваемой задачи был проведен ковариационный анализ, который позволил проверить корректность алгоритмов и исследовать зависимость точности оценивания от характерных значений инструментальных и непараметрических ошибок и от различных варьируемых параметров задачи, например от продолжительности временных промежутков, на которых осуществляются операции. Было проведено сравнение оценок, доставляемых двумя рассмотренными выше алгоритмами, которое показало, что при небольших временах осуществления операций как новый, так и исходный алгоритмы дают приемлемую точность оценивания параметров. Относительная ошибка оценивания при помощи нового алгоритма составляет десятые доли процента, а исходного — 2–3%. Если время осуществления операций увеличивается, то в этом случае точность оценивания параметров блока новым алгоритмом, основанным на применении фильтра Калмана, возрастает (что согласуется со здравым смыслом), в то время как точность исходного алгоритма начиная с определенного момента катастрофически падает (это объясняется тем, что расчетные формулы исходного алгоритма были изначально выведены в предположении о малой продолжительности промежутков времени, на которых производится оценивание).

Сравнение двух алгоритмов показывает, что новый алгоритм позволяет добиться более высокой точности оценивания, чем исходный. К тому же исходный алгоритм был ориентирован на оценку лишь 15 из 27 параметров блоков. В то же время новый алгоритм дает возможность оценить и оставшиеся 12 параметров, хотя и с худшей (однако все равно приемлемой) точностью: относительная ошибка оценивания составляет при этом несколько десятков процентов. Отметим, однако, что соотношения исходного алгоритма отличаются существенно большей простотой реализации и также обеспечивают приемлемую точность оценивания при небольших временах осуществления операций.

**Заключение.** В работе на структурном уровне представлен новый подход к исследованию задач стандовой калибровки БИНС, заключающийся в построении так называемой “телескопической” систе-

На рисунке схематически изображена “телескопическая” система. Напомним, что здесь  $x_1, x_2, \dots, x_{14}$  — субвекторы, представляющие собой “копии” переменной части фазового вектора уравнений ошибок БИНС;  $p$  — постоянная часть фазового вектора, состоящая из неизвестных оцениваемых параметров;  $T_0, T_1, \dots, T_{14}$  — границы промежутков времени, на которых осуществляются рассматриваемые 14 операций. Прямоугольники обозначают промежутки времени, на которых изменение соответствующего субвектора подчиняется уравнениям ошибок БИНС, а прямые линии — промежутки времени, на которых соответствующий субвектор является постоянным.

**4. Новый алгоритм оценивания.** С введением “телескопической” системы задача оказывается погруженной в русло стандартной постановки задачи оценивания; калибровка в рассматриваемой задаче осуществляется путем оценивания вектора состояния “телескопической” системы. Такая

мы, использование которой позволяет формализовать процесс калибровки, содержащий многократные переустановки и выставки системы, путем описания соответствующей задачи оценивания стандартным образом. На базе “телескопической” системы предложен новый алгоритм оценивания параметров задачи, основанный на фильтре Калмана; точность этого алгоритма превосходит точность исходного. Разработанная математическая формализация привносит методическую ясность в задачу калибровки и может быть применена как для модификации рассмотренных алгоритмов, так и для исследования других алгоритмов стендовой калибровки.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ N 11-08-00004-а.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Браславский Д.А., Поликовский Е.Ф., Якубович А.М.* Метод калибровки трехосного блока акселерометров. Заявка на изобретение N 2422425/23 с приоритетом от 24 ноября 1976 г.
2. *Бобрик Г.И., Матасов А.И.* Оптимальное гарантирующее оценивание параметров блока ньютонометров // Изв. РАН. Механ. твердого тела. 1993. N 5. 8–14.
3. *Гусинский В.З., Лесючевский В.М., Литманович Ю.А., Столбов А.А.* Алгоритм калибровки трехосного блока акселерометров, предназначенного для использования в БИНС // Гироскопия и навигация. 2000. 4 (31). 86.
4. *Ермаков В.С., Дунаев Д.А., Широков А.А. и др.* Калибровка бесплатформенных инерциальных систем навигации и ориентации // Вестн. Перм. гос. техн. ун-та. Аэрокосмическая техника. 2004. N 18. 25–30.
5. *Парусников Н.А., Тихомиров В.В., Трубников С.А.* Определение инструментальных погрешностей инерциальной навигационной системы на неподвижном основании // Фунд. и прикл. матем. 2005. 11, N 7. 159–166.
6. *Syed Z. F., Aggarwal P., Goodall C., Niu X., El-Sheimy N.* A new multi-position calibration method for MEMS inertial navigation systems // Measurement Sci. and Technol. 2007. 18. 1897–1907.
7. *Измайлов Е.А., Лепе С.Н., Молчанов А.В., Поликовский Е.Ф.* Скалярный способ калибровки и балансировки бесплатформенных инерциальных навигационных систем // Сб. мат-лов Юбилейной XV Санкт-Петербург. конф. по интегрированным навигационным системам. СПб.: Изд-во ЦНИИ “Электроприбор”, 2008. 145–154.
8. *Голован А.А., Парусников Н.А.* Математические основы навигационных систем. Ч. II: Приложения методов оптимального оценивания к задачам навигации. М.: Изд-во МГУ, 2008.
9. *Болотин Ю.В., Деревянкин А.В., Матасов А.И.* Итерационная схема калибровки блока акселерометров при помощи гарантирующего подхода // Изв. РАН. Механ. твердого тела. 2008. N 3. 48–61.
10. *Вавилова Н.Б., Парусников Н.А., Сазонов И.Ю.* Калибровка бескарданных навигационных систем при помощи грубых одностепенных стендов // Современные проблемы математики и механики. Прикладные исследования. Т. 1. М.: Изд-во МГУ, 2009. 212–223.
11. *Парусников Н.А.* Задача калибровки бескарданной инерциальной навигационной системы // Изв. РАН. Механ. твердого тела. 2009. N 4. 3–9.
12. *Деревянкин А.В., Матасов А.И.* Методика калибровки блока акселерометров при грубой информации о его угловом положении. 2-е изд. М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2010.
13. *Сазонов И.Ю., Шаймарданов И.Х.* Калибровка бесплатформенной инерциальной навигационной системы на микромеханических датчиках акселерометров и гироскопов // Вопросы оборонной техники. Сер. 9: Специальные системы управления, следящие приводы и их элементы. 2010. 3 (244)–4 (245). 73–82.
14. *Голован А.А., Парусников Н.А.* Математические основы навигационных систем. Ч. I: Математические модели инерциальной навигации. 3-е изд. М.: Изд-во МГУ, 2011.

Поступила в редакцию  
18.04.2011

УДК 536.25:537.36:538.4

## СКОРОСТЬ И ЭФФЕКТИВНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ СУСПЕНЗИИ ПРИ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОМ ДРЕЙФЕ

Е. В. Тимохин<sup>1</sup>

Рассматривается термокапиллярный дрейф однородной суспензии сферических капель с постоянными свойствами несущей и внутрикапельной жидкости. Получены формулы для скорости дрейфа и эффективной теплопроводности суспензии.

<sup>1</sup> Тимохин Евгений Владимирович — асп. каф. газовой и волновой динамики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: tjenia@mail.ru.