С. В. Туляков, Эргодическое свойство пространства функций с единственным инвариантным средним,
Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 1996, номер 2, 8–13

2) сложность как при точной, так и при 1-приближенной реализации функций из этих классов есть

$$\rho N(1+\log(\omega(1/N))/\log N)(1+o(1))$$

(здесь N — степень двойки).

Замечание 3. Мы рассматривали 1-приближение в равномерной метрике ($\|f\|=\max_{x\in I_N}|f(x)|$). Переход к метрикам «в среднем», т. е. $\|f\|_p=\left(\frac{1}{N}\sum_{x\in I_N}|f(x)|^p\right)^{1/p}$, вообще говоря, позволяет уменьшить Approx и L^{Approx}, но порядок этих величин останется таким же; более того, константы в оценках Approx и L^{Approx} можно взять одни и те же для всех p, $1\leqslant p\leqslant\infty$.

Замечание 4. Из теорем 2 и 3 можно вывести существование классов $H^N_{n,\omega}$ с заданным ростом величины $L^{\mathrm{Approx}}(H^N_{n,\omega})$ при $N\to\infty$.

Пользуясь случаем, автор выражает глубокую благодарность своему учителю О. Б. Лупанову за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 93-01-01527.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров А. Н. Различные подходы к оценке трудности приближенного задания и вычисления функций//Proc. Intern. Congr. Math. Stockholm, 1963. 230—250.
2. Офман Ю. О приближенной реализации непрерывных функций на автоматах// //Докл. АН СССР. 1963. **152**, № 4. 823—826.
3. Офман Ю. Об алгоритмической сложности дискретных функций//Докл. АН СССР. 1962. **145**, № 1. 48—51.
4. Тогер А. В. О сложности некоторых функциональных классов//Докл. АН СССР. 1971. **199**, № 4. 789—791.
5. Асарин Е. А. О сложности равномерных приближений непрерывных функций// //Успехи матем. наук. 1984. **39**, № 3. 157—169.
6. Аманжаев Г. Г. Дискретные функции с заданным модулем непрерывности// //Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1992. № 5. 86—89.
7. Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М. ε-Энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах//Успехи матем. наук. 1959. **14**, № 2 (86). 3—86.
8. Лупанов О. Б. Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования//Проблемы кибернетики. Вып. 14. М., 1965. 31—110.

Поступила в редакцию
16.02.94

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 2

УДК 519.46

С. В. Туляков

ЭРГОДИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО ПРОСТРАНСТВА ФУНКЦИЙ С ЕДИНСТВЕННЫМ ИНВАРИАНТНЫМ СРЕДНИМ

Мы устанавливаем существование сильного предела последовательности степеней некоторых точечных средних на абелевой локально компактной группе и совпадение этого предела с естественным проектором на пространство постоянных функций. Так как в предельном переходе по последовательности степеней не участвует операция усреднения, то в данной ситуации этот результат является одной из сильнейших форм эргодической теоремы и может рассматриваться как дискретный вариант интегральной формулы для среднего, полученной в [1].

Введем следующие обозначения. Пусть G — топологическая группа, $B(G)$ — множество ограниченных функций на группе G, $f\in B(G)$.

Обозначим ${}_gf=f(gh)$, $f_g(h)=f(hg)$, где $g,h\in G$.

Определение 1. Оператор $I:B(G)\to R$ называется инвариантным средним на группе G, если $I({}_gf)=I(f)$ и $I(f_g)=I(f)$ для любых $f\in B(G)$ и $g\in G$, $I(f)\geqslant 0$ при $f\geqslant 0$ и $I(1)=1$.

Определение 2. Группа G аменабельна, если на ней существует инвариантное среднее.

Напомним, что любая абелева группа является аменабельной.

Для аменабельной группы G положим $L_0=\prod\limits_{\alpha}\operatorname{Ker}(I_\alpha)$, где пересечение берется по всевозможным инвариантным средним I_α группы G. Пусть $L=L_0+\{c\cdot 1\}$, т. е. любая функция из L является суммой функции из L_0 и константы. Иначе говоря, L состоит из таких функций $f\in\in B(G)$, что $I_\alpha(f)=I_\beta(f)$ для любых инвариантных средних I_α и I_β.

В [2] было доказано следующее свойство функций из пространства L для локально компактной группы G.

Лемма. *Функция $f\in L$ в том и только том случае, когда для любого $\varepsilon>0$ существуют набор $g_1,\dots,g_n$ элементов группы G и числа $c_1,\dots,c_n\in C$, $\sum\limits_{k=1}^{n}c_k=1$, такие, что $\left|\sum\limits_{i=1}^{n}c_i\,{}_{g_i}f-I(f)\right|<\varepsilon$ на всей группе G, где I — некоторое инвариантное среднее на G.*

Эта лемма будет существенно использована при доказательстве теоремы.

Определение 3. Функция f равномерно непрерывна слева на группе G, если для любого $\varepsilon>0$ существует такая окрестность U единичного элемента группы G, что для любых $g\in U$ и $h\in G$ выполняется неравенство $|f(h)-{}_gf(h)|<\varepsilon$.

Теорема. *Пусть G — локально компактная абелева группа, L — пространство функций, определенное выше. Для $h_1,\dots,h_m$ введем оператор $T:L\to L$ по формуле $T(f)=\frac{1}{m}\sum\limits_{i=0}^{m}{}_{h_i}f$. Пусть $h_1=e,\dots,h_m$ таковы, что подгруппа, порожденная $\{h_1,\dots,h_m\}$, всюду плотна в G и пусть функция $f\in L$ равномерно непрерывна слева. Тогда $|T^kf-I(f)|\Rightarrow 0$ равномерно на G при $k\to\infty$.*

Доказательство. Можно считать, что $I(f)=0$. Иначе, взяв $f'=f-I(f)$, убеждаемся, что прибавление константы к функции f на формулировку теоремы не влияет.

Итак, надо доказать, что для любого $\varepsilon>0$ найдется такое N, что для любого $n>N$ выполняется $|T^nf|<\varepsilon$. Зафиксируем ε.

Применим лемму. Так как $f\in L$, то найдется такой набор $u_1,\dots,u_k$ элементов группы G, что

$$\left|\sum_{i=1}^{k}c_i\,{}_{u_i}f\right|<\varepsilon/4 \text{ на } G, \tag{1}$$

где $c_1,\dots,c_k\in C$ и $\sum\limits_{i=1}^{k}c_i=1$.

Из определения 3 следует, что если функция равномерно непрерывна слева, то и ${}_g f$ равномерно непрерывна слева для любого $g \in G$. Поэтому для любого i, $1 \leqslant i \leqslant k$, существует окрестность U_i единичного элемента, такая, что для любого $v_i \in U_i$ выполнено $|{}_{u_i}f - {}_{v_i u_i}f| < \varepsilon/4$ на G. Но это значит, что существуют $V_i = U_i u_i$, такие, что для любого $g \in V_i$ имеет место неравенство $|{}_{u_i}f - {}_g f| < \varepsilon/4$. Так как множество $\{h_1, ..., h_m\}$ всюду плотно в G, то можно выбрать элементы $g_i = h_1^{l_{1i}} \dots \dots h_m^{l_{mi}}$, $i = 1, \dots, k$, и $g_i \in V_i$. При этом $|{}_{u_i}f - {}_{g_i}f| < \varepsilon/4$, и, учитывая (1), получаем

$$\left| \sum_{i=1}^{k} c_i \, {}_{g_i}f \right| < \varepsilon/2. \tag{2}$$

Используя то, что в число образующих $h_1, ..., h_m$ входит единичный элемент h_1, предполагаем, что существует $\nu : l_{1i} + ... + l_{mi} = \nu$ для любого i.

Введем некоторые обозначения. Положим $P = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i \, {}_{g_i}f$. Тогда условие (2) будет выглядеть так: $\|P\| < \varepsilon/2$, где $\|\cdot\|$ — равномерная норма на G. Пусть $H(n)$ — множество слов длины n из $h_1, ..., h_m$, например $H(2) = \{h_1 h_1, h_1 h_2, h_2 h_1, h_2 h_2, \dots, h_m h_m\}$. Очевидно, $|H(n)| = m^n$. Считаем слова из $H(n)$ элементами группы G и n достаточно большим.

Обозначим $S(n) = \dfrac{1}{m^{n-\nu}} \sum\limits_{y_l \in H(n-\nu)} {}_{y_l}P$. Так как $\|P\| < \varepsilon/2$, то и

$$\|S(n)\| \leqslant \frac{1}{m^{n-\nu}} \sum_{y_l \in H(n-\nu)} \|{}_{y_l}P\| = \frac{1}{m^{n-\nu}} \sum_{y_l \in H(n-\nu)} \|P\| = \|P\| < \varepsilon/2.$$

А следовательно, $\|T^n f\| \leqslant \|T^n f - S(n)\| + \|S(n)\| \leqslant \|T^n f - S(n)\| + \varepsilon/2$. Оценим норму $\|T^n f - S(n)\|$.

Переформулируем задачу. Надо показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что для любого $n > N$

$$\|T^n f - S(n)\| \leqslant \varepsilon. \tag{3}$$

Распишем (3). Так как $T^n f = \dfrac{1}{m^n} \sum\limits_{y_i \in H(n)} {}_{y_i}f$, то

$$\|T^n f - S(n)\| = \left\| \frac{1}{m^n} \sum_{y_i \in H(n)} {}_{y_i}f - \frac{1}{m^{n-\nu}} \sum_{y_l \in H(n-\nu)} {}_{y_l}P \right\| =$$

$$= \left\| \frac{1}{m^n} \sum_{j=1}^{k} c_j \sum_{y_i \in H(n)} {}_{y_i}f - \frac{1}{m^{n-\nu}} \sum_{j=1}^{k} c_j \sum_{y_l \in H(n-\nu)} {}_{y_l g_i}f \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{k} |c_j| \cdot \frac{1}{m^n} \left\| \sum_{y_i \in H(n)} {}_{y_i}f - m^\nu \sum_{y_l \in H(n-\nu)} {}_{y_l g_i}f \right\|.$$

Отсюда видно, что для проверки (3) достаточно показать, что

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall j = 1, \ldots, k\ \frac{1}{m^n} \Big\| \sum_{y_i \in H(n)} y_i f - m^\nu \sum_{y_l \in H(n-\nu)} y_l g_i f \Big\| \leqslant \varepsilon \tag{4}$$

при достаточно больших n. Опустим индекс j у g_j; $g = h_1^{l_1} \ldots h_m^{l_m}$.

Пусть мы доказали следующее утверждение:

$$\forall \varepsilon_1 > 0,\ \forall j = 1, \ldots, m\ \frac{1}{m^n} \Big| m \sum_{y_l \in H(n-1)} h_j y_l f - \sum_{y_i \in H(n)} y_i f \Big| < \varepsilon_1 \tag{5}$$

при достаточно больших n. Тогда справедливо (4). Действительно,

$$\frac{1}{m^n} \Big\| \sum_{y_i \in H(n)} y_i f - m^\nu \sum_{y_l \in H(n-\nu)} y_l h_1^{l_1} \ldots h_m^{l_m} f \Big\| \leqslant \frac{1}{m^n} \Big\| \sum_{y_i \in H(n)} y_i f -$$

$$- m \sum_{y_l \in H(n-1)} y_l h_1 f \Big\| + \frac{1}{m^n} \Big\| m \sum_{y_i \in H(n-1)} y_i h_1 f - m^2 \sum_{y_l \in H(n-2)} y_l h_1^2 f \Big\| + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{m^n} \Big\| m^{\nu-1} \sum_{y_i \in H(n-\nu+1)} y_i h_1^{l_1} \ldots h_{m-1}^{l_{m-1}} h_m^{l_m - 1} f - m^\nu \sum_{y_l \in H(n-\nu)} y_l h_1^{l_1} \ldots h_m^{l_m} f \Big\| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_1 + m\varepsilon_1 + \ldots + m^{\nu-1}\varepsilon_1 = \varepsilon_1 (m^\nu - 1).$$

Таким образом, взяв $\varepsilon_1 = \varepsilon/(m^\nu - 1)$, получим (5) $\Rightarrow$ (4).

Проверим (5). Обозначим через $D(n)$ m раз взятое множество $\{h_j, y_l, y_l \in H(n-1)\}$. Очевидно, $|D(n)| = m^n$. Тогда (5) запишется в виде

$$\frac{1}{m^n} \Big| \sum_{y_l \in D(n)} y_l f - \sum_{y_i \in H(n)} y_i f \Big| \leqslant \varepsilon_1. \tag{6}$$

Будем сопоставлять друг с другом элементы множеств $D(n)$ и $H(n)$, покажем, что число элементов этих множеств, которым не нашлось пары, мало по сравнению с m^n — мощностью этих множеств. Тогда в силу того что функция f ограничена, будет выполняться (6).

Заметим сначала, что элементов типа $h_1^{l_1} \ldots h_j^0 \ldots h_m^{l_m}$ в $D(n)$ нет, а в $H(n)$ их содержится мало: $\left(\frac{m-1}{m}\right)^n$ от общего количества, и $\left(\frac{m-1}{m}\right)^n \to 0$ при $n \to \infty$.

Считаем элементы типа $h_1^{l_1} \ldots h_j^{l_j+1} \ldots h_m^{l_m}$. В множестве $D(n)$ их $m\,\frac{(n-1)!}{l_1! \ldots l_m!}$, а в $H(n)$ — $\frac{n!}{l_1! \ldots (l_j+1)! \ldots l_m!}$. Общее количество слов, не нашедших себе пары, в обоих множествах равно

$$\sigma = \Big| \sum_{\substack{l_1, \ldots, l_m \\ l_1 + \ldots + l_m = n-1}} \frac{n!}{l_1! \ldots (l_j+1)! \ldots l_m!} - \frac{m(n-1)!}{l_1! \ldots l_m!} \Big|. \tag{7}$$

Нам осталось доказать, что $\frac{\sigma}{m^n} \to 0$ при $n \to \infty$. Имеем

$$\frac{\sigma}{m^n} = \frac{1}{m^n} \sum_{\substack{l_1, \ldots, l_m \\ l_1 + \ldots + l_m = n-1}} \Big| \frac{n}{l_j + 1} - m \Big| \frac{(n-1)!}{l_1! \ldots l_m!} =$$

$$=\frac{1}{m^n}\sum_{l_j=0}^{n-1}\left|\frac{n}{l_j+1}-m\right|\frac{(n-1)\dots(n-l_j)}{l_j!}\times$$

$$\times\sum_{\substack{l_1,\dots,l_{j-1},l_{j+1},\dots,l_m\\ l_1+\dots+l_{j-1}+l_{j+1}+\dots+l_m=n-l_j-1}}\frac{(n-l_j-1)!}{l_1!\dots l_{j-1}!\,l_{j+1}!\dots l_m!}=$$

$$=\frac{1}{m^n}\sum_{l_j=0}^{n-1}\left|\frac{n}{l_j+1}-m\right|\frac{(n-1)!}{l_j!\,(n-l_j-1)!}(m-1)^{n-l_j-1}=$$

$$=\sum_{l_j=0}^{n-1}\left|\frac{n}{l_j+1}-m\right|\frac{(n-1)!}{l_j!\,(n-l_j-1)!}\left(\frac{m-1}{m}\right)^{n-l_j-1}\left(\frac{1}{m}\right)^{l_j+1}=$$

$$=\sum_{l_j=0}^{n-1}\left|\frac{n}{m(l_j+1)}-1\right|C_{n-1}^{l_j}p^{n-l_j-1}q^{l_j},$$

где $p=(m-1)/m$, $q=1/m$.

Замечаем, что если бы в выражении (7) не было модуля, то, ввиду того что количество элементов в $D(n)$ и $H(n)$ одно и то же, оно в точности было бы равно количеству элементов вида $h_1^{l_1}\dots h_j^0\dots h_m^{l_m}$ в множестве $H(n)$, т. е. было бы мало по сравнению с $|H(n)|$. Следовательно, если разбить сумму (7) на две, в одну из которых входят слагаемые с отрицательными выражениями под модулем, а в другую — с положительными, то достаточно будет показать, что хотя бы одна из этих сумм, деленная на m^n, стремится к нулю.

Рассмотрим сумму членов с отрицательными выражениями под модулем: $\frac{k}{m(l_j+1)}-1<0$.

Покажем, что

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\ \forall n>N\quad\sum_{\substack{l_j=0,\dots,n-1\\ \frac{n}{m(l_j+1)}-1<0}}\left(\frac{n}{m(l_j+1)}-1\right)C_{n-1}^{l_j}p^{n-l_j-1}q^{l_j}<\varepsilon. \tag{8}$$

Разобьем эту сумму:

$$\sigma=\sum_{1-\frac{n}{m(l_j+1)}<\frac{\varepsilon}{2}}\left(\frac{n}{m(l_j+1)}-1\right)C_{n-1}^{l_j}p^{n-l_j-1}q^{l_j}+$$

$$+\sum_{1-\frac{n}{m(l_j+1)}>\frac{\varepsilon}{2}}\left(\frac{n}{m(l_j+1)}-1\right)C_{n-1}^{l_j}p^{n-l_j-1}q^{l_j}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\sum_{l_j=0}^{n-1}C_{n-1}^{l_j}p^{n-l_j-1}q^{l_j}+\sum_{1-\frac{n}{m(l_j+1)}<\frac{\varepsilon}{2}}C_{n-1}^{l_j}p^{n-l_j-1}q^{l_j}=$$

$$=\frac{\varepsilon}{2}+\sum_{\frac{n}{m(1-\varepsilon/2)}<l_j+1}C_{n-1}^{l_j}p^{n-l_j-1}q^{l_j}. \tag{9}$$

Обозначим $\tau = \frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{2}}$, $\tau > 1$. Запишем последнее слагаемое в (9) в терминах теории вероятностей: $\sum\limits_{n > l_j > \frac{n}{m}\tau} C_{n-1}^{l_j} p^{n-l_j-1} q^{l_j} = P(A)$ — вероятность события $A =$ «в $n-1$ испытании Бернулли с вероятностью успеха $q = 1/m$ выпало больше чем $n\tau/m$ успехов». Но в силу центральной предельной теоремы для любого $\tau > 1$ $P(A) \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, $\exists N\ \forall n > N \sum\limits_{n > l_j > \frac{n}{m}\tau} C_{n-1}^{l_j} p^{n-1-l_j} q^{l_j} < \varepsilon/2$. Таким образом, доказано неравенство (8), а поэтому и вся теорема.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shtern A. I. Almost convergence and its applications to the Fourier—Stieltjes localization//Russ. J. Math. Phys. 1993. **1**, N 1. 115—125.
2. Day M. Amenable semigroups//Ill. Math. J. 1957. **1**, N 4. 509—544.

Поступила в редакцию
24.06.94

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 2

УДК 519.635.8

Е. В. Чижонков

К СХОДИМОСТИ МЕТОДА ИСКУССТВЕННОЙ СЖИМАЕМОСТИ

Идея искусственной сжимаемости, предложенная Н. Н. Яненко [1] в качестве составной части метода дробных шагов, получила широкое распространение при решении стационарных уравнений Стокса и Навье—Стокса в переменных скорость—давление [2]. В зарубежной литературе она встречается при расчете течений вязкой несжимаемой жидкости под другим названием (алгоритм Эрроу—Гурвица). Особенность подхода заключается в добавлении к уравнению неразрывности $\operatorname{div}\mathbf{u}=0$ выражения вида αp_t, описывающего «искусственную сжимаемость». При этом влияние двух итерационных параметров на сходимость метода оказывается весьма сложным, поэтому условия, обеспечивающие сходимость, являются объектом тщательного изучения [3]. В первую очередь они важны при решении практических задач. Как правило, для выбора параметров, близких к оптимальным, оказывается достаточным сделать несколько пробных расчетов в области сходимости метода.

В настоящей работе для краевых условий первого рода получено необходимое и достаточное условие сходимости алгоритма в линейном случае (для задачи Стокса), которое носит единый характер для широкого круга областей поиска решения. Кроме того, для оптимальных параметров приведены аналитические формулы, зависящие от единственного параметра, связанного с формой области.

Для удобства изложения все рассуждения проводятся на дифференциальном уровне.