



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

B. G. Grebenshchikov, Stability of stationary systems of linear differential equations of neutral type with delay that depends linearly on time,

Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 1991, Number 7, 69–71

<https://www.mathnet.ru/eng/ivm5120>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.81

May 23, 2025, 08:21:32



ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ, ЛИНЕЙНО ЗАВИСЯЩИМ ОТ ВРЕМЕНИ

Данная работа посвящена изучению свойств решений систем вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(\mu t) + Rx(\mu t), t \geq t_0 > 0, \mu = \text{const}, 0 < \mu < 1. \quad (1)$$

Здесь A, B, R — постоянные матрицы размерности $l \times l$, $x(t)$ есть l -мерная вектор-функция времени t . На начальном множестве $E_0: [\mu t_0, t_0]$ задана непрерывная вектор-функция $\varphi(t)$, имеющая непрерывную производную [1]. Запоздывание $\gamma(t) = (1 - \mu)t$ есть линейная функция времени.

Пусть корни характеристического уравнения $|A - \lambda E| = 0$ имеют отрицательную вещественную часть, т. е.

$$\text{Re } \lambda < -\beta_1, \beta_1 = \text{const}, \beta_1 > 0. \quad (2)$$

Далее, пусть собственные значения ρ матрицы $A^{-1}B$ удовлетворяют неравенству

$$|\rho| < 1. \quad (3)$$

Наконец, пусть корни p характеристического уравнения $|E - Re^{-\sigma(p+1)}| = 0$, $\sigma = -\ln \mu$ имеют отрицательную вещественную часть, т. е. справедливо неравенство

$$\text{Re } p < -\beta_2, \beta_2 = \text{const}, \beta_2 > 0. \quad (4)$$

Сделаем замену времени $\tau = \ln(t/t_0)$. Получаем систему нейтрального типа с постоянным запаздыванием

$$\dot{z}(\tau) = t_0 e^\tau [Az(\tau) + Bz(\tau - \sigma)] + Rz(\tau - \sigma), \tau \geq 0. \quad (5)$$

Теорема. Нулевое решение системы (5) экспоненциально устойчиво, если только выполнены неравенства (2)–(4). Отсюда нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво.

Приведем краткую схему доказательства. Покажем вначале, что при выполнении неравенства (2) решение системы (5) допускает экспоненциальную оценку [2], т. е. справедливо неравенство

$$\|z(\tau)\| \leq Ke^{\beta_3 \tau} \max \{ \|\varphi_*(0)\|_1, \|\dot{\varphi}_*(0)\|_1 \}, \quad (6)$$

где $K = \text{const}$, $K > 0$, $\beta_3 = \text{const}$, $\beta_3 > 0$, $\varphi_*(\tau) = \varphi(e^\tau)$,

$$\|\varphi_*(\theta)\|_1 = \sup_{-\sigma \leq \theta \leq 0} \|\varphi_*(\theta)\|, \|z(\tau)\| = \sum_{i=1}^l |z_i(\tau)|,$$

$z_i(\tau)$ — компоненты вектор-функции $z(\tau)$.

Для доказательства данной оценки заметим, что система (5) эквивалентна следующей системе с запаздыванием:

$$\begin{aligned} \dot{z}(\tau) = & R^{m+1} \dot{\varphi}(\tau - (m+1)\sigma) + t_0 e^\tau \mu^m R^m [Az(\tau - m\sigma) + B\varphi(\tau - (m+1)\sigma)] + \\ & + t_0 e^\tau \mu^{m-1} R^{m-1} [Az(\tau - (m-1)\sigma) + Bz(\tau - m\sigma)] + \dots + t_0 e^\tau [Az(\tau) + Bz(\tau - \sigma)], \end{aligned} \quad (7)$$

где $R^i = R^{i-1}R$, $m\sigma < \tau \leq (m+1)\sigma$.

Записывая решение системы (7) в форме Коши [3] при $0 < \tau \leq \sigma$, учитывая неравенство (2), получаем оценку

$$\sup_{0 < \tau \leq \sigma} \|z(\tau)\| \leq \left(C + \frac{Cb}{\beta_2} \right) \|\varphi_*(\theta)\|_1 + \frac{CR_1}{\beta_1 t_0} \|\dot{\varphi}_*(\theta)\|_1,$$

где $\|e^{A(t-s)}\| \leq Ce^{-\beta_1(t-s)}$, $C = \text{const}$, $C \geq 1$, $\|B\| \leq b$, $\|R\| \leq R_1$. Аналогичным образом, используя аппарат теории разностных уравнений [4], получаем при $m\sigma < \tau \leq (m+1)\sigma$ оценку

$$\begin{aligned} \sup_{m\sigma < \tau \leq (m+1)\sigma} \|z(\tau)\| \leq & \left[R_1 + C + \frac{Cb + R_1 Ca}{\beta_1} \right]^m \left[C + \frac{CR_1 + CR_1 a}{\beta_1 t_0} + \right. \\ & \left. + \frac{2Cb}{\beta_1} \right] \max \{ \|\varphi_*(\theta)\|_1, \|\dot{\varphi}_*(\theta)\|_1 \}, \end{aligned}$$

где $\|A\| \leq a$.

Полагая $\beta_3 = (1/\sigma) \ln (R_1 + C + (Cb + R_1Ca)/\beta_1)$, $K = C + 2CR_1/\beta_1 + (CR_1 + CR_1a)/(\beta_1 t_0)$, получаем оценку (6).

Поскольку для решения системы (5) справедлива экспоненциальная оценка (6), применим при исследовании вопроса об устойчивости нулевого решения данной системы метод преобразования Лапласа [2]. Умножим обе части системы (5) на $e^{-(p+1)\tau}$ и проинтегрируем по τ от нуля до $+\infty$. Обозначив

$$F(p) = \int_0^{\infty} z(\tau) e^{-p\tau} d\tau,$$

методами, аналогичными изложенным в работе [5], получаем следующую функционально-разностную неоднородную систему:

$$\begin{aligned} [E - Re^{-\sigma(p+1)}] F(p+1) &= \frac{t_0}{p+1} [A + Be^{-\sigma p}] F(p) + [E - Re^{-\sigma(p+1)}] \frac{z(0)}{p+1} + \\ &+ \frac{t_0 e^{-\sigma p}}{p+1} B \int_{-\sigma}^0 \varphi_*(s) e^{-ps} ds + \frac{e^{-\sigma(p+1)}}{p+1} R \int_{-\sigma}^0 \dot{\varphi}_*(s) e^{-(p+1)s} ds. \end{aligned} \quad (8)$$

Кроме того, при $r > \beta_3 + 2$ [5] справедливо асимптотическое представление

$$F(p) = \frac{z(0)}{p} + O\left(\frac{1}{|p|^2}\right), \quad (9)$$

r фиксированное, $q \rightarrow \pm\infty$, $r = \operatorname{Re} p$, $q = \operatorname{Im} p$. Покажем, что данное представление справедливо и при $-\varepsilon < r < \beta_3 + 2$. Пусть $r > \beta_3 + 1 + \varepsilon$. Сделаем замену

$$F(p+1) = \frac{z(0)}{p+1} + F_1(p+1). \quad (10)$$

Подставим данное выражение в систему (8) и умножим обе части вновь полученного равенства на $p+1$. Получим

$$\begin{aligned} (p+1)[E - Re^{-\sigma(p+1)}] F_1(p+1) &= t_0 [A + Be^{-\sigma p}] F_1(p) + \\ &+ t_0 [A + Be^{-\sigma p}] \frac{z(0)}{p} + t_0 e^{-\sigma p} B \int_{-\sigma}^0 \varphi_*(s) e^{-ps} ds + e^{-\sigma(p+1)} R \int_{-\sigma}^0 \dot{\varphi}_*(s) e^{-(p+1)s} ds. \end{aligned} \quad (11)$$

Заметим, что подстановка (10) предполагает существование матрицы $[E - Re^{-\sigma(p+1)}]^{-1}$. Полагая $F_1(p) = F_1(p_0 - 1/2 + \eta)$, $F_1(p+1) = F_1(p_0 + 1/2 + \eta)$ ($|p_0 - 1/2 + \eta| \leq 1/2 + \varepsilon/2$, $|p_0 + 1/2 + \eta| \leq 1/2 + \varepsilon/2$) и разлагая данные вектор-функции в ряд Тейлора по степеням $\eta \pm 1/2$ с центром разложения в точке p_0 (это можно сделать вследствие того, что правее абсциссы сходимости $F(p)$ является аналитической [6]), разлагая также в ряд Тейлора вектор-функции

$$\begin{aligned} E - Re^{-\sigma(p+1)}, A + Be^{-\sigma p}, \frac{t_0}{p} [A + Be^{-\sigma p}] z(0) + \\ + t_0 e^{-\sigma p} B \int_{-\sigma}^0 \varphi_*(s) e^{-ps} ds + e^{-\sigma(p+1)} R \int_{-\sigma}^0 \dot{\varphi}_*(s) e^{-(p+1)s} ds, \end{aligned}$$

приравнявая в равенстве (11) свободные члены, получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ [E - Re^{-\sigma(p_0+1/2)}] + (-1)^{j+1} \frac{t_0}{p_0+1/2} [A + Be^{-\sigma(p_0-1/2)}] \right\} \frac{1}{2^j j!} F_1^{(j)}(p_0) = \\ = t_0 [A + Be^{-\sigma(p_0-1/2)}] \frac{z(0)}{p_0^2 - 1/4} + \frac{t_0 e^{-\sigma(p_0-1/2)}}{p_0+1/2} B \int_{-\sigma}^0 \varphi_*(s) e^{-(p_0-1/2)s} ds + \\ + \frac{e^{-\sigma(p_0+1/2)}}{p_0+1/2} R \int_{-\sigma}^0 \dot{\varphi}_*(s) e^{-(p_0+1/2)s} ds. \end{aligned} \quad (12)$$

Поскольку $\|F_1^{(j)}(p_0)\| \frac{1}{j \cdot 2^j} \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$ (так же, как и при фиксированном $r_0, r_0 > \beta_3, q \rightarrow \pm \infty$), из соотношения (12) получаем асимптотическое представление

$$F_1(p_0 + 1/2) = [E - R e^{-\sigma(p_0+1/2)}]^{-1} \left\{ t_0 [A + B e^{-\sigma(p_0-1/2)}] \frac{z(0)}{p_0^2 - 1/4} + \frac{t_0 e^{-\sigma(p_0-1/2)}}{p_0 + 1/2} B \times \right. \\ \left. \times \int_{-\sigma}^0 \varphi_*(s) e^{-(p_0-1/2)s} ds + \frac{e^{-\sigma(p_0+1/2)}}{p_0 + 1/2} R \int_{-\sigma}^0 \dot{\varphi}_*(s) e^{-(p_0+1/2)s} ds \right\} + O\left(\frac{1}{|p_0|^3}\right), \quad (13)$$

r_0 фиксированное, $r_0 \geq \beta_3 + 1/2 + \varepsilon, q \rightarrow \pm \infty$.

Но тогда асимптотическое представление (9) справедливо уже при $r \geq \beta_3 + 1$. Продолжая подобную процедуру по шагам, получим в конце концов, что уточненное асимптотическое представление (13) справедливо по крайней мере в области $r_0 \geq 1/2 - \varepsilon$, тогда асимптотическое представление (9) справедливо в области $r \geq -\varepsilon$.

Поскольку справедливо предельное равенство [2], [6]:

$$z(\tau) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_3 - i\omega}^{\beta_3 + i\omega} F(p) e^{p\tau} dp,$$

то, учитывая асимптотическое представление (9) и аналитичность вектор-функции $F(p)$, получаем предельное соотношение

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_3 - i\omega}^{\beta_3 + i\omega} F(p) e^{p\tau} dp = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\varepsilon - i\omega}^{-\varepsilon + i\omega} F(p) e^{p\tau} dp = O(e^{-\varepsilon\tau}) [\|\varphi_*(s)\|_1 + \|\dot{\varphi}_*(s)\|_1], \quad -\sigma \leq s \leq 0,$$

отсюда и следует экспоненциальная устойчивость нулевого решения системы (5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.— М.: Наука, 1971.— 296 с.
2. Беллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения.— М.: Мир, 1967.— 548 с.
3. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости.— М.: Наука, 1966.— 576 с.
4. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем: Пер. с рум.— М.: Мир, 1971.— 310 с.
5. Гребенщиков Б. Г. Устойчивость систем с переменным запаздыванием, линейно зависящим от времени // Устойчивость и нелинейные колебания.— Свердловск, 1983.— С. 25—34.
6. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной.— М.: Наука, 1967.— 304 с.

г. Первоуральск

Поступили
полный текст 11.07.1988
краткое сообщение 30.08.1989

Г. П. Емгушева, В. А. Ногин

УДК 517.983

О СХОДИМОСТИ В $L_p(\mathbb{R}^n)$ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ С НЕСТАНДАРТНЫМ УРЕЗАНИЕМ

Гиперсингулярные интегралы (г. с. и.) вида

$$(D_{\Omega}^{\alpha} f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(\Delta_t^l f)(x)}{|t|^{n+\alpha}} \Omega(t) dt, \quad \alpha > 0, l > \alpha, \quad (1)$$

где $(\Delta_t^l f)(x)$ — конечная разность функции $f(x)$ с центром в точке x и шагом t (центрированная или нецентрированная), нашли применение при решении интегральных уравнений первого рода с ядрами типа потенциала (см. книги [1], [2] и имеющуюся там библиографию).