1966 г. ТРУДЫ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА Том 15

УДК 517.4

ТОЧКИ ГЛАДКОСТИ КОНУСА И СХОДИМОСТЬ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ И ОПЕРАТОРОВ

В. С. Климов, М. А. Красносельский и Е. А. Лифшиц
(Воронеж)

В настоящей работе изучаются последовательности функционалов и операторов положительных на некотором конусе. Выясняется, что в некоторых случаях сходимость последовательности функционалов на всем пространстве является следствием сходимости в двух точках. Аналогично, сходимость последовательности операторов на всем пространстве в ряде случаев является следствием сходимости на некотором специальном подпространстве (которое может быть конечномерным). Аналогичные факты для пространства C непрерывных на отрезке функций с конусом K неотрицательных функций были установлены П. П. Коровкиным [1], а затем распространены его учениками на пространства функций двух переменных. Дальнейшие существенные результаты были получены Ю. А. Шашкиным [2], который изучал последовательности положительных функционалов и операторов в пространстве C функций непрерывных на некотором конечномерном компакте.

Результаты настоящей работы были анонсированы в [6].

1. Пусть K — конус в вещественном банаховом пространстве (см. [3], [4]). Через K^* обозначается множество положительных линейных функционалов.

Будем говорить, что ненулевой функционал $f \in K^*$ проходит через точку $x_0 \in K$, если $f(x_0)=0$. Через каждую граничную точку телесного конуса проходит по крайней мере один такой функционал; через внутренние точки конуса ненулевые положительные функционалы не проходят. В случае нетелесных конусов ситуация более сложная — неясно даже, всегда ли существуют ненулевые элементы $x \in K$, через которые проходят ненулевые функционалы $f \in K^*$.

В случае нетелесных конусов K будем называть квазивнутренними такие точки $x \in K$, через которые не проходит ни один функционал $f \in K^*$. Множество квазивнутренних элементов в ряде случаев просто описывается. Пусть, например, K — это конус неотрицательных функций в пространстве L_p функций, суммируемых со степенью p $(1 \leqslant p < \infty)$ на некотором множестве Ω; квазивнутренними точками конуса K будут неотрицательные функции $x(t)$, принимающие нулевое значение лишь на множестве нулевой меры. Если K — это конус векторов $x=\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}$ с неотрицательными компонентами в пространстве l_p $(1 \leqslant p < \infty)$, то его квазивнутренними точками будут векторы, у которых все компоненты положительны.

Ненулевую точку $x_0 \in K$ назовем точкой гладкости (точкой гладкости конуса K), если через нее проходит единственный (с точностью до нормы) ненулевой положительный функционал.

Пусть K — конус неотрицательных функций в пространстве $C(\Omega)$ функций, непрерывных на некотором компакте Ω. Точками гладкости этого конуса будут неотрицательные функции, принимающие нулевое значение лишь в одной точке. Если $x_0(t)$ — точка гладкости и $x_0(t_0)=0$, то через $x_0(t)$ проходит функционал

$$f(x) = x(t_0) \qquad [x \in C(\Omega)]. \tag{1}$$

В конусе неотрицательных функций пространства L_p точек гладкости нет. В конусе векторов

$$x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\} \tag{2}$$

с неотрицательными компонентами в пространстве l_p точками гладкости будут векторы, у которых одна компонента равна нулю, а остальные компоненты положительны. Точка границы телесного конуса является точкой гладкости, если через нее проходит единственная опорная к конусу гиперплоскость.

2. Положительные функционалы f_0, проходящие через точки гладкости, обладают замечательным свойством — из сходимости последовательности положительных функционалов f_n к f_0 на некоторых двумерных подпространствах вытекает сходимость последовательности f_n к f_0 на всем пространстве. Приведем соответствующие теоремы.

Рассмотрим вначале пространство E с телесным конусом K.

Теорема 1. *Пусть последовательность положительных линейных функционалов f_n удовлетворяет условиям*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x_1) = \alpha_0, \tag{3}$$

где x_0 — точка гладкости конуса K, а x_1 — внутренняя точка конуса K.

Тогда последовательность f_n слабо сходится на всем пространстве E, причем

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{\alpha_0}{f_1(x_1)} f_0(x) \qquad (x \in E), \tag{4}$$

где f_0 — положительный функционал, который проходит через x_0.

Доказательство. Для каждого линейного функционала верна формула

$$|f(x)| = \|f\| \cdot \rho(x, L_f) \qquad (x \in E), \tag{5}$$

где $\rho(x, L_f)$ — расстояние от точки x до пространства L_f нулей функционала f. Из (5) вытекают неравенства

$$|f_n(x_1)| \geqslant \|f_n\| \cdot r_0 \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{6}$$

где r_0 — радиус шаровой окрестности точки x_1 в конусе K. Из (6) и из второго равенства (3) следует, что нормы $\|f_n\|$ функционалов f_n равномерно ограничены.

Допустим, что утверждение теоремы неверно. Тогда найдется такой элемент x^* и такая последовательность индексов n_i, что существует конечный предел

$$\lim_{i\to\infty} f_{n_i}(x^*) = \beta_0, \tag{7}$$

который удовлетворяет неравенству

$$\beta_0 \neq \frac{\alpha_0}{f_0(x_1)} f_0(x^*). \tag{8}$$

Точка x^* не лежит при этом в двумерном подпространстве, натянутом на векторы x_0 и x_1.

Через E_3 обозначим трехмерное подпространство, натянутое на векторы x_0, x_1, x^*. Из (3) и (7) вытекает, что последовательность функционалов f_{n_i} сходится на E_3 к некоторому функционалу g. Этот функционал положителен на конусе $K_3 = K \cap E_3$. В силу известной теоремы М. Г. Крейна функционал g можно продолжить до функционала g_0, определенного на всем E и положительного на K. Функционал g_0 проходит, как и функционал f_0, через точку гладкости x_0. Поэтому $g_0 = \gamma f_0$, где γ — некоторое неотрицательное число. Из второго равенства (3) вытекает, что $\alpha_0 = \gamma f_0(x_1)$ и, так как в силу (5) $f_0(x_1) \neq 0$, то

$$g_0(x) = \frac{\alpha}{f_0(x_1)} f_0(x) \quad (x \in E).$$

Следовательно,

$$\beta_0 = \frac{\alpha_0}{f_0(x_1)} f_0(x^*).$$

Полученное неравенство противоречит (8).

Теорема доказана.

Перейдем к произвольным конусам K.

Теорема 2. *Пусть положительный функционал f_0 проходит через точку гладкости x_0 конуса $K \subset E$. Пусть x_1 — такая точка пространства E, что $f_0(x_1) \neq 0$. Пусть последовательность положительных функционалов f_n имеет равномерно ограниченные нормы и удовлетворяет условиям* (3).

Тогда последовательность f_n слабо сходится на всем пространстве и имеет место равенство (4).

Доказательство. Допустим, как и при доказательстве теоремы 1, что найдется такой элемент x^* и такая последовательность индексов n_i, для которых существует предел (7), удовлетворяющий неравенству (8).

Так как единичный шар пространства E^* компактен в слабой топологии (см. [5]), то найдется линейный функционал g_0, являющийся предельной точкой множества $\{f_{n_i}\}$ в слабой топологии. Функционал g_0 очевидным образом положителен и удовлетворяет равенствам

$$g_0(x_0) = 0, \quad g_0(x_1) = \alpha_0, \quad g_0(x^*) = \beta_0. \tag{9}$$

Первое из равенств (9) означает, что g_0 проходит через точку гладкости x_0 и поэтому $g_0(x) \equiv \gamma f_0(x)$. Из второго равенства (9) вытекает, что $\alpha_0 = \gamma f_0(x_1)$. Поэтому из третьего равенства (9) вытекает противоречащее (8) соотношение

$$\beta_0 = \frac{\alpha_0}{f_0(x_1)} f_0(x^*).$$

Теорема доказана.

Теоремы 1 и 2 могут быть применены для исследования сходимости последовательностей произвольных линейных функционалов. Ограничимся следствием из теоремы 1.

Последовательность линейных (не обязательно положительных) функционалов f_n называется монотонной, если

$$f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \qquad (x \in K;\ n = 1, 2, \ldots). \tag{10}$$

Теорема 3. *Пусть конус K телесен. Пусть монотонная последовательность линейных функционалов f_n сходится в двух точках x_0 и x_1, первая из которых является точкой гладкости конуса K, а вторая внутренней точкой K.*

Тогда последовательность функционалов f_n сходится на всем пространстве E.

Доказательство. В предположении противного найдется такой элемент $y \in E$, что последовательность чисел $f_n(y)$ не является фундаментальной. Поэтому найдутся такие последовательности индексов n_k и m_k ($k = 1, 2, \ldots$), что

$$n_1 < m_1 < n_2 < m_2 < \ldots < n_k < m_k < \ldots \tag{11}$$

и

$$|f_{n_k}(y) - f_{m_k}(y)| \geqslant \varepsilon_0 \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{12}$$

где $\varepsilon_0 > 0$. Построим теперь последовательность функционалов

$$h_k(x) = f_{m_k}(x) - f_{n_k}(x) \quad (x \in E). \tag{13}$$

Эти функционалы в силу (10) положительны и по условиям теоремы сходятся в точках x_0 и x_1 к нулю. Из теоремы 1 вытекает, что функционалы (13) сходятся к нулю на всем пространстве E, а это противоречит (12).

Теорема доказана.

Утверждение теоремы сохраняет силу, если предположение о монотонности последовательности f_n заменить менее ограничительным условием

$$f_n(x) \leqslant f_m(x) + a_0 f_0(x) \quad (n < m;\ x \in K), \tag{14}$$

где a_0 — некоторое положительное число. Доказательство почти полностью сохраняется; нужно лишь вместо функционалов (13) рассматривать функционалы

$$h_k(x) = a_0 f_0(x) + f_{m_k}(x) - f_{n_k}(x) \quad (x \in E) \tag{15}$$

и заметить, что они в силу теоремы 2 сходятся к $a_0 f_0(x)$.

Общая схема применения теорем 1—3 к исследованию конкретных последовательностей функционалов очевидна.

В качестве простейшего примера рассмотрим пространство C непрерывных на некотором компакте Ω функций с конусом K неотрицательных функций. Пусть $x_0 = x_0(t)$ — неотрицательная функция, обращающаяся в нуль лишь в одной точке t_0, а $x_1 = x_1(t) \equiv 1$. Допустим, что последовательность положительных линейных функционалов f_n удовлетворяет условиям

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x_1) = 1. \tag{16}$$

Тогда для каждой непрерывной функции $x(t)$ справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x(t_0). \tag{17}$$

Для доказательства нужно вспомнить, что x_0 является точкой гладкости конуса K, через которую проходит функционал (1), и заметить,

что x_1 является внутренней точкой конуса K. Тогда равенства (16) можно рассматривать как условия (3) теоремы 1. Равенство (17) совпадает с равенством (4).

3. Пусть E_0 — подпространство банахова пространства E. Пусть K — конус в E. Обозначим через $F(E_0; K)$ множество нормированных функционалов f ($\|f\|=1$), положительных на K и проходящих через точки гладкости конуса K, лежащие в подпространстве E_0. Если в E_0 нет ни одной точки гладкости конуса K, то множество $F(E_0; K)$ пусто.

Положим

$$\|x\|_* = \sup_{f \in F(E_0;\, K)} |f(x)| \quad (x \in E). \tag{18}$$

Легко видеть, что формула (18) определяет на пространстве E полунорму. Эта полунорма удовлетворяет неравенству

$$\|x\|_* \leqslant \|x\| \quad (x \in E). \tag{19}$$

Будем говорить, что E_0 является насыщенным подпространством или подпространством, насыщенным точками гладкости, если полунорма (18) является нормой. Иначе говоря, E_0 является насыщенным подпространством, если $\|x\|_* \neq 0$ при $\|x\| \neq 0$. Если E_0 — насыщенное подпространство, то при переходе к норме (18) пространство E может стать неполным.

Если E полно в норме (18), то будем говорить, что E_0 является равномерно насыщенным подпространством или подпространством, равномерно насыщенным точками гладкости. Подпространство E_0 равномерно насыщено в том и только том случае, если норма (18) эквивалентна основной норме пространства. Иначе говоря, E_0 равномерно насыщено, если найдется такое $m>0$, что

$$m\|x\| \leqslant \|x\|_* \leqslant \|x\| \quad (x \in E). \tag{20}$$

В случае телесных конусов в конечномерных пространствах понятия насыщенного и равномерно насыщенного подпространства совпадают, так как в конечномерных пространствах все нормы эквивалентны.

Совпадают понятия насыщенного и равномерно насыщенного подпространства и в случае конуса K неотрицательных функций в пространстве C непрерывных на компакте Ω функций. Для доказательства этого факта заметим вначале, что в рассматриваемом случае через точки гладкости конуса K проходят лишь функционалы вида (1). Поэтому множество $F(E_0; K)$ всегда состоит из функционалов $f(x)=x(t_0)$, где t_0 пробегает некоторое множество $\Omega(E_0) \subset \Omega$. Если $\Omega(E_0)$ неплотно в Ω, то найдется такая непрерывная и отличная от тождественного нуля функция $x(t)$, которая обращается на $\Omega(E_0)$ в нуль; полунорма (18) этой функции равна нулю и поэтому подпространство E_0 не является ни насыщенным ни тем более равномерно насыщенным. Если $\Omega(E_0)$ плотно в Ω, то полунорма (18) совпадает с обычной нормой в C:

$$\|x\|_* = \sup_{f \in F(E_0;\, K)} |f(x)| = \sup_{t_0 \in \Omega(E_0)} |x(t_0)| = \max_{t \in \Omega} |x(t)|;$$

поэтому подпространство E_0 равномерно насыщено.

В общем случае из насыщенности подпространства не вытекает его равномерная насыщенность. В качестве примера рассмотрим конус K векторов (2) с неотрицательными компонентами в некотором пространстве l_p ($1 \leqslant p < \infty$). Пусть вектор

$$e_1 = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

принадлежит l_p и пусть все его компоненты строго положительны. Построим еще два вектора из l_p

$$e_2=\left\{c_1,\ \frac{1}{2}c_2,\ \ldots,\ \frac{1}{n}c_n,\ \ldots\right\},\quad e_3=\left\{c_1,\ \frac{1}{2^2}c_2,\ \ldots,\ \frac{1}{n^2}c_n,\ \ldots\right\}$$

и рассмотрим трехмерное подпространство E_3 с базисом, составленным из векторов e_1, e_2, e_3. Векторы

$$x_m=e_1-2me_2+m^2e_3\quad (m=1,2,\ldots)$$

принадлежат подпространству E_3. Простой подсчет показывает, что у вектора x_m компонента с номером m равна нулю, а остальные компоненты положительны. Поэтому каждый вектор x_m является точкой гладкости конуса K; через эту точку гладкости проходит функционал f_m, значение которого на каждом векторе $x=\{\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n,\ldots\}$ равно ξ_m. Такими функционалами f_m исчерпывается множество всех нормированных положительных функционалов, проходящих через точки гладкости рассматриваемого конуса. Поэтому в рассматриваемом случае формула (18) принимает вид

$$\|x\|_*=\max_m|\xi_m|\quad (x=\{\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n,\ \ldots\}).\tag{21}$$

Эта формула определяет норму, которая очевидным образом неэквивалентна норме в пространстве l_p. Следовательно, трехмерное подпространство E_3 насыщено, но свойством равномерной насыщенности не обладает.

Равномерно насыщенное подпространство E_0 будем называть вполне насыщенным, если $F(E_0;\ K)$ содержит такое подмножество $F_0(E_0;\ K)$ (возможно, совпадающее с $F(E_0;\ K)$, что:

1°. Формула

$$\|x\|_{**}=\sup_{f\in F_0(E_0;\ K)}|f(x)|\quad (x\in E)\tag{22}$$

определяет норму, эквивалентную норме пространства E.

2°. Каждая последовательность функционалов $f_n\in F_0(E_0;\ K)$ имеет предельную в слабой топологии точку вида $\lambda_0 f_0$, где $\lambda_0>0$ и $f_0\in F(E_0;\ K)$.

Пусть K — конус неотрицательных функций в пространстве C непрерывных на компакте Ω функций. Нетрудно видеть, что подпространство E_0 вполне насыщено тогда и только тогда, когда $F(E_0;\ K)$ содержит все функционалы $f(x)=x(t_0)$, где $t_0\in\Omega$.

Пусть $\Omega=[a,\ b]$. Тогда подпространство E_3 с базисом

$$e_1\equiv 1;\quad e_2=t;\quad e_3=t^2\quad (a\leqslant t\leqslant b)$$

равномерно насыщено, так как оно содержит все функции $(t-t_0)^2$ $(a\leqslant t\leqslant b)$, являющиеся точками гладкости конуса, через которые проходят функционалы $f(x)=x(t_0)$. Трехмерное подпространство $E_3^{(1)}$ с базисом

$$e_1\equiv 1;\quad e_2=\sin\frac{2\pi t}{b-a};\ e_3=\cos\frac{2\pi t}{b-a}\quad (a\leqslant t\leqslant b)$$

насыщено, но не обладает свойством равномерной насыщенности, так как $F(E_3^{(1)};\ K)$ содержит все функционалы $f(x)=x(t_0)$ при $t_0\in(a,\ b)$, но не содержит функционалов $f_a(x)=x(a)$ и $f_b(x)=x(b)$.

Для m-мерного пространства с конусом векторов с неотрицательными компонентами понятия насыщенного, равномерно насыщенного и вполне насыщенного подпространства совпадают.

4. Линейный оператор A, действующий в пространстве E с выделенным конусом K, называют положительным, если он оставляет конус K инвариантным. Ниже будет использован тот очевидный факт, что $f(Ax)$ является положительным линейным функционалом, если линейный функционал f и линейный оператор A положительны.

Теорема 4. *Пусть E_0 насыщенное подпространство. Пусть положительный линейный оператор A удовлетворяет условию*

$$Ax = x \quad (x \in E_0). \tag{23}$$

Тогда

$$Ax = x \quad (x \in E). \tag{24}$$

Доказательство. Так как подпространство E_0 насыщено, то множество $F(E_0;\ K)$ содержит по крайней мере две различные точки f_1 и f_2. Пусть функционал f_1 проходит через точку гладкости $y_1 \in E_0$, а f_2 — через точку гладкости $y_2 \in E_0$. Тогда точка

$$x^* = y_1 + y_2, \tag{25}$$

которая также принадлежит E_0, является квазивнутренней точкой конуса K. Действительно, в предположении противного найдется такой ненулевой функционал $f^* \in K^*$, что

$$f^*(y_1) + f^*(y_2) = f^*(x^*) = 0.$$

Отсюда вытекает, что f^* проходит и через точку y_1 и через точку y_2. Поэтому $f^* = \alpha_1 f_1 = \alpha_2 f_2$, где числа α_1 и α_2 неотрицательны, — мы пришли к противоречию.

Пусть теперь f_0 — произвольный функционал из $F(E_0;\ K)$; он проходит через некоторую точку гладкости $x_0 \in E_0$. Положительный функционал $f_0(Ax)$ в силу (23) также проходит через точку x_0 и поэтому

$$f_0(Ax) = \alpha_0 f_0(x) \quad (x \in E). \tag{26}$$

Для определения коэффициента α_0 подставим в (26) элемент (25). Так как этот элемент квазивнутренний, то $f_0(x^*) \neq 0$. Из (23) вытекает, что $Ax^* = x^*$. Поэтому $\alpha_0 = 1$. Таким образом,

$$f_0(Ax) \equiv f_0(x) \quad (x \in E;\quad f_0 \in F(E_0;\ K)).$$

Из последнего равенства вытекает, что

$$\|Ax - x\|_* = 0 \qquad (x \in E)$$

и так как подпространство E_0 насыщено, то $Ax \equiv x$.

Теорема доказана.

Дальнейшие утверждения настоящего пункта обобщают теоремы 1—3 на последовательности операторов.

Теорема 5. *Пусть K — телесный конус, а E_0 — вполне насыщенное подпространство. Пусть последовательность линейных положительных операторов A_n сильно сходится на E_0 к единичному оператору:*

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n x - x\| = 0 \quad (x \in E_0). \tag{27}$$

Тогда последовательность A_n сильно сходится к единичному оператору на всем пространстве E:

$$\lim_{m\to\infty} \|A_n x - x\| = 0 \quad (x \in E). \tag{28}$$

Доказательство. В доказательстве будет использована точка (25), построенная по двум точкам гладкости y_1, $y_2 \in E_0$, через кото-

рые проходят различные функционалы f_1 и f_2 из $F(E_0;\ K)$. Точка (25) будет внутренней точкой конуса K, так как через нее не проходит ни один положительный функционал.

Допустим, что утверждение теоремы неверно. Тогда найдется такой элемент $y \in E$, для которого равенство (28) несправедливо. Без ограничения общности можно считать, что

$$\|A_n y - y\| > \varepsilon_0 > 0 \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{29}$$

(в противном случае мы перешли бы к подпоследовательности операторов). Так как подпространство E_0 равномерно насыщено, то из (29) вытекает, что

$$\|A_n y - y\|_{**} > \varepsilon_1 > 0 \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{30}$$

где $\|x\|_{**}$ определена равенством (22). Поэтому найдется такая последовательность функционалов $f_n \in F_0(E_0;\ K)$, что

$$|f_n(A_n y) - f_n(y)| > \varepsilon_1 \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{31}$$

Пусть функционал $\lambda_0 f_0$ ($\lambda_0 > 0$, $f_0 \in F(E_0;\ K)$) является предельной точкой в слабой топологии последовательности $\{f_n\}$ и пусть f_0 проходит через точку гладкости $x_0 \in E_0$. Из последовательности f_n можно тогда выбрать такую подпоследовательность f_{n_i}, которая в точке x_0 сходится к нулю и в точке (25) к $\lambda_0 f_0(x^*)$. Из теоремы 1 вытекает, что последовательность f_{n_i} сходится на всем пространстве E к функционалу $\lambda_0 f_0$.

Рассмотрим последовательность положительных функционалов

$$g_i(x) = f_{n_i}(A_{n_i} x) \quad (x \in E;\ i = 1, 2, \ldots). \tag{32}$$

Из (27) вытекает, что функционалы (32) на E_0 сходятся к $\lambda_0 f_0$, так как

$$|g_i(x) - \lambda_0 f_0(x)| \leqslant \|f_{n_i}\| \cdot \|A_{n_i} x - x\| + |f_{n_i}(x) - \lambda_0 f_0(x)|.$$

В частности,

$$\lim_{i \to \infty} g_i(x_0) = 0, \quad \lim_{i \to \infty} g_i(x^*) = \lambda_0 f_0(x^*), \tag{33}$$

где x_0 — точка гладкости, а x^* — точка (25). Из теоремы 1 вытекает, что последовательность функционалов (32) также слабо сходится к $\lambda_0 f_0$ на всем пространстве E.

Поэтому из

$$|f_{n_i}(A_{n_i} y) - f_{n_i}(y)| \leqslant |g_{n_i}(y) - \lambda_0 f_0(y)| + |f_{n_i}(y) - \lambda_0 f_0(y)|$$

вытекает, что

$$\lim_{i \to \infty} |f_{n_i}(A_{n_i} y) - f_{n_i}(y)| = 0, \tag{34}$$

а это противоречит (31).

Теорема доказана.

При переходе к нетелесным конусам возникает дополнительное предположение об ограниченности норм операторов A_n. Мы не формулируем соответствующую теорему.

В условиях теоремы 5 нельзя предположение о полной насыщенности подпространства E_0 заменить более слабым предположением о его равномерной насыщенности. Поясним это на примере. Пусть в пространстве C непрерывных на промежутке $[0, 2\pi]$ функций $x(t)$ с кону-

сом K неотрицательных функций выделено трехмерное подпространство E_0 с базисом

$$e_1 \equiv 1, \ e_2 = \sin t, \ e_3 = \cos t.$$

Выше было выяснено, что это подпространство равномерно насыщено, но не является вполне насыщенным подпространством. Рассмотрим последовательность интегральных операторов

$$A_n x(t) = \int_0^{2\pi} \Phi_n(t, s)\, x(s)\, ds,$$

где $\Phi_n(t, s)$ — известные ядра Фейера

$$\Phi_n(t, s) = \frac{1}{2\pi n}\left[\frac{\sin\frac{n}{2}(s-t)}{\sin\frac{1}{2}(s-t)}\right]^2.$$

Последовательность операторов A_n очевидным образом удовлетворяет условию (27) теоремы 5. В то же время последовательность $A_n x(t)$ не сходится к $x(t)$, если $x(t)$ принимает на концах промежутка $[0, 2\pi]$ разные значения.

В качестве следствия из теоремы 5 приведем аналог теоремы 3 для последовательностей операторов.

Последовательность операторов B_n называют монотонной, если

$$B_n x \leqslant B_{n+1} x \quad (x \in K;\ n = 1, 2, \ldots).$$

Последовательность операторов B_n назовем полумонотонной, если

$$B_n x \leqslant B_m x + a_0 x \quad (x \in K;\ n < m), \tag{35}$$

где $a_0 > 0$.

Теорема 6. *Пусть K — телесный конус, а E_0 — вполне насыщенное подпространство. Пусть последовательность линейных операторов B_n полумонотонна (например, монотонна) и сильно сходится на подпространстве E_0.*

Тогда последовательность операторов B_n сильно сходится на всем пространстве E.

Доказательство. В предположении противного найдется такой элемент $y \in E$, что последовательность $B_n y$ не является фундаментальной. Поэтому найдется такое $\varepsilon > 0$ и такие последовательности индексов n_k и m_k $(k = 1, 2, \ldots)$, что

$$n_1 < m_1 < n_2 < m_2 < \ldots < n_k < m_k < \ldots$$

и

$$\| B_{m_k} y - B_{n_k} y \| > \varepsilon \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{36}$$

Введем в рассмотрение операторы

$$A_k x = \frac{1}{a_0}(B_{m_k} x - B_{n_k} x) + x \quad (x \in E;\ k = 1, 2, \ldots).$$

Эти операторы в силу (35) положительны. Они очевидным образом сходятся на E_0 к единичному оператору. Из теоремы 5 вытекает, что опе-

раторы A_k сильно сходятся к единичному оператору на всем пространстве E. В частности,

$$\lim_{k\to\infty} \|A_k y - y\| = \frac{1}{a_0} \lim_{k\to\infty} \|B_{m_k} y - B_{m_k} y\| = 0,$$

что противоречит (36).

Теорема доказана.

Читатель без труда сформулирует аналог теоремы 6 для нетелесных конусов.

Для применения теорем 4—6 нужно уметь выделять и описывать насыщенные и вполне насыщенные подпространства. В следующем пункте будет приведен достаточно полный анализ для случая пространства C непрерывных функций с конусом K неотрицательных функций (см. также [1] и [2]). Особый интерес представляет при этом описание конечномерных насыщенных и вполне насыщенных подпространств.

Было бы интересно подробное исследование для других пространств и других конусов.

Отметим, что полное описание насыщенных и вполне насыщенных подпространств не проведено даже для случая произвольных телесных конусов в конечномерных пространствах.

Покажем, что в m-мерном пространстве E с эллиптическим конусом K не существует насыщенных подпространств размерности меньше, чем m.

Действительно, введем в пространстве E базис, в котором конус K описывается неравенствами

$$\xi_1^2 - \xi_2^2 - \ldots - \xi_m^2 \geqslant 0, \ \xi_1 \geqslant 0.$$

Точками гладкости этого конуса являются граничные точки

$$x_0 = \{\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \xi_m^0\}, \ (\xi_1^0)^2 - (\xi_2^0)^2 - \ldots - (\xi_m^0)^2 = 0, \ \xi_1^0 > 0.$$

Через каждую такую точку x_0 проходит положительный функционал

$$f_0(x) = \xi_1^0\xi_1 - \xi_2^0\xi_2 - \ldots - \xi_m^0\xi_m \ (x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m\} \in E). \tag{37}$$

Пусть E_0 — насыщенное подпространство пространства E. Тогда в нем найдутся m точек гладкости $x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^m$, через которые проходят m линейно независимых функционалов $f_0^1, f_0^2, \ldots, f_0^m$. Из (37) вытекает, что точки $x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^m$ линейно независимы (так как из $\alpha_1 x_0^1 + \alpha_2 x_0^2 + \ldots + \alpha_m x_0^m = 0$ следует $\alpha_1 f_0^1 + \alpha_2 f_0^2 + \ldots + \alpha_m f_0^m = 0$); следовательно, E_0 совпадает с E.

В случае миниэдральных конусов (по терминологии М. Г. Крейна) в m-мерном пространстве всегда существуют трехмерные насыщенные подпространства.

Напомним, что конус K называется миниэдральным в m-мерном пространстве E, если он является многогранником и если число его $(m-1)$-мерных граней равно m. Если K миниэдрален, а E m-мерно, то в E можно ввести систему координат таким образом, чтобы K состоял из векторов с неотрицательными координатами. В дальнейшем будем считать, что рассматривается такая система координат. Приведем в качестве первого простого примера вполне насыщенного подпространства трехмерную линейную оболочку E_0 трех векторов

$$e_1 = \{1, 1, \ldots, 1\}, \ e_2 = \{1, 2, \ldots, m\}, \ e_3 = \{1, 2^2, \ldots, m^2\}.$$

В этом подпространстве лежат векторы

$$x_k = k^2 e_1 - 2k e_2 + e_3 \quad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

каждый из которых является внутренней точкой некоторой $(m-1)$-мерной грани конуса K. Эти внутренние точки являются точками гладкости. Легко видеть, что через точку x_k проходит линейный положительный функционал f_k,

$$f_k(x) = \xi_k, \; x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m\}. \tag{38}$$

Отсюда вытекает сразу, что формула (18) для рассматриваемого случая принимает вид

$$\|x\|_* = \max_{k=1,2,\ldots,m} |\xi_k|;$$

она определяет норму, эквивалентную всем нормам конечномерного пространства. Поэтому E_0 равномерно насыщено, а следовательно, и вполне насыщено.

Полное описание всех насыщенных подпространств в m-мерном пространстве с конусом векторов с неотрицательными компонентами дает следующая

Теорема 7. *Пусть K — конус векторов с неотрицательными компонентами в m-мерном пространстве. Для того чтобы три вектора*

$$e_1 = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m\}, \; e_2 = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m\}, \; e_3 = \{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m\}$$

являлись базисом насыщенного или вполне насыщенного трехмерного подпространства, необходимо и достаточно, чтобы точки

$$z_1 = \{\xi_1, \eta_1, \zeta_1\}, \; z_2 = \{\xi_2, \eta_2, \zeta_2\}, \ldots, z_m = \{\xi_m, \eta_m, \zeta_m\}$$

лежали на различных одномерных ребрах некоторого m-гранного выпуклого конуса (с вершиной в начале координат) в трехмерном пространстве.

Доказательство. Для того чтобы точки $z_1, z_2, \ldots, z_m$ лежали на различных ребрах m-гранного выпуклого конуса с вершиной в начале координат, достаточно, чтобы они лежали по одну сторону от некоторой плоскости, проходящей через начало координат, и чтобы ни одна из них не принадлежала положительной оболочке других. Первое из этих утверждений легко вытекает из насыщенности подпространства E_0, натянутого на векторы e_1, e_2, e_3.

Действительно, так как любой положительный функционал, проходящий через точку гладкости, имеет вид (38), а подпространство E_0 насыщено, то все функционалы (38) должны принадлежать $F(E_0; K)$. Пусть функционал $f_1(x)$ проходит через точку гладкости $x_0^1 \in E_0$

$$x_0^1 = \{0, \varkappa_2^1, \varkappa_3^1, \ldots, \varkappa_m^1\} \quad (\varkappa_i^1 > 0; \; i = 2, 3, \ldots, m),$$

а функционал $f_2(x)$ — через точку гладкости $x_0^2 \in E_0$

$$x_0^2 = \{\varkappa_1^2, 0, \varkappa_3^2, \ldots, \varkappa_m^2\} \quad (\varkappa_i^2 > 0; \; i = 1, 3, 4, \ldots, m).$$

Положим

$$x_0^1 + x_0^2 = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3.$$

Все компоненты этого вектора строго положительны, т. е. выполняются неравенства

$$a_1 \xi_i + a_2 \eta_i + a_3 \zeta_i > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

а это означает, что точки $z_1, z_2, \ldots, z_m$ лежат по одну сторону от плоскости

$$a_1\xi + a_2\eta + a_3\zeta = 0.$$

Предположим, что точка z_l лежит в положительной оболочке точек $z_1, \ldots, z_{l-1}, z_{l+1}, \ldots, z_m$, т. е.

$$z_l = \alpha_1 z_{l_1} + \alpha_2 z_{l_2} + \ldots + \alpha_k z_{l_k} \quad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k > 0). \tag{39}$$

Пусть функционал $f_l(x)$ проходит через точку гладкости $x_0^l \in E_0$

$$x_0^l = \{\varkappa_1^l, \ldots, \varkappa_{l-1}^l, 0, \varkappa_{l+1}^l, \ldots, \varkappa_m^l\} \ (\varkappa_i^l > 0;\ i = 1, \ldots, l-1, l+1, \ldots, m). \tag{40}$$

Положим

$$x_0^l = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3. \tag{41}$$

Из (39), (40), (41) вытекает, что

$$0 = \alpha_1 \varkappa_{l_1}^l + \alpha_2 \varkappa_{l_2}^l + \ldots + \alpha_k \varkappa_{l_k}^l > 0.$$

Полученное противоречие показывает невозможность равенства (39).

Необходимость условий теоремы доказана.

Пусть теперь точки $z_1, z_2, \ldots, z_m$ лежат на различных ребрах m-гранного выпуклого конуса с вершиной в начале координат. Проведем к конусу опорную плоскость, касающуюся его только по ребру, на котором лежит точка z_i. Пусть уравнение этой плоскости имеет вид

$$b_1\xi + b_2\eta + b_3\zeta = 0.$$

Меняя в случае необходимости знаки b_1, b_2, b_3, можно считать, что при $j \neq i$

$$b_1\xi_j + b_2\eta_j + b_3\zeta_j > 0.$$

Тогда у вектора

$$x_i = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3,$$

лежащего в подпространстве E_0, натянутом на e_1, e_2, e_3, все компоненты, кроме i-той, положительны, а i-тая компонента равна нулю. Поэтому через точку x_i проходит единственный положительный функционал $f_i(x) = \xi_i$. Следовательно, $F(E_0; K)$ содержит все функционалы вида (38) и поэтому E_0 — насыщенное подпространство.

5. В этом пункте рассматриваются пространства $C(\Omega)$ непрерывных функций, заданных на компактах Ω. Через K в этом пункте обозначается конус неотрицательных функций.

Допустим, что существует такое непрерывное отображение U множества Ω в множество Σ, которое взаимно однозначно на некотором плотном в Ω множестве Ω_0, и такое, что $U(\Omega_0)$ не имеет общих точек с $U(\Omega \setminus \Omega_0)$. Тогда множество Σ будем называть допустимой склейкой множества Ω.

Теорема 8. *Для того чтобы в $C(\Omega)$ существовали k-мерные равномерно насыщенные подпространства, необходимо и достаточно, чтобы существовала допустимая склейка Σ множества Ω, которая является частью $(k-2)$-мерной единичной евклидовой сферы S^{k-2}.*

Доказательство. Пусть допустимая склейка $\Sigma \subset S^{k-2}$ множества Ω получена непрерывным отображением

$$U(t) = \{u_1(t), u_2(t), \ldots, u_{k-1}(t)\} \ (t \in \Omega).$$

Рассмотрим тогда систему k функций

$$u_1(t),\ u_2(t),\ \ldots,\ u_{k-1}(t),\ u_k(t) \equiv 1$$

и натянутое на них подпространство $E_0 \subset C(\Omega)$. Из очевидного равенства

$$u_1^2(t) + u_2^2(t) + \ldots + u_{k-1}^2(t) \equiv 1 \quad (t \in \Omega)$$

вытекает, что E_0 содержит все функции

$$x(t;\, t_0) = [u_1(t) - u_1(t_0)]^2 + \ldots + [u_{k-1}(t) - u_{k-1}(t_0)]^2 \quad (t \in \Omega),$$

где t_0 — фиксированные точки множества Ω.

Если t_0 — такая точка, что $U(t_0) \neq U(t)$ при $t \neq t_0$, то функция $x(t,\, t_0)$ будет точкой гладкости конуса K, через которую проходит функционал

$$f(x) = x(t_0) \quad (x \in C(\Omega)). \tag{42}$$

Из определения допустимой склейки вытекает, что $F(E_0;\, K)$ содержит все функционалы (42), где t_0 пробегает плотное в Ω множество. Следовательно, E_0 — равномерно насыщенное подпространство. Равномерно насыщены и все подпространства, содержащие E_0. Так как размерность E_0 не превышает k, то существуют k-мерные равномерно насыщенные подпространства.

Достаточность условий теоремы доказана. Перейдем к доказательству необходимости.

Предположим, что E_0 — равномерно насыщенное подпространство размерности k. Из телесности конуса $K \cap E_0$ в E_0 вытекает, что в E_0 можно выбрать базис

$$v_1(t),\ v_2(t),\ \ldots,\ v_k(t) \quad (t \in \Omega)$$

из строго положительных функций. Построим функции

$$u_1(t) = \frac{v_1(t)}{v_1(t) + \ldots + v_k(t)},\ \ldots,\ u_k(t) = \frac{v_k(t)}{v_1(t) + \ldots + v_k(t)} \qquad (t \in \Omega). \tag{43}$$

Из линейной независимости функций $v_1(t)$, ..., $v_k(t)$ вытекает линейная независимость функций $u_1(t)$, ..., $u_k(t)$, так как из

$$a_1 u_1(t) + a_2 u_2(t) + \ldots + a_k u_k(t) \equiv 0 \quad (t \in \Omega)$$

вытекает, что

$$a_1 v_1(t) + a_2 v_2(t) + \ldots + a_k v_k(t) \equiv 0 \quad (t \in \Omega).$$

Поэтому функции (43) можно рассматривать как базис некоторого k-мерного подпространства E_1.

Равномерная насыщенность подпространства E_0 означает, что каждому t_0 из некоторого плотного в Ω множества Ω_0 соответствует такой вектор

$$\alpha(t_0) = \{\alpha_1(t_0),\ \alpha_2(t_0),\ \ldots,\ \alpha_k(t_0)\}, \tag{44}$$

что функция

$$v(t;\, t_0) = \alpha_1(t_0)\, v_1(t) + \alpha_2(t_0)\, v_2(t) + \ldots + \alpha_k(t_0)\, v_k(t) \quad (t \in \Omega)$$

неотрицательна и аннулируется лишь в точке t_0. Функция

$$u(t;\, t_0) = \alpha_1(t_0)\, u_1(t) + \alpha_2(t_0)\, u_2(t) + \ldots + \alpha_k(t_0)\, u_k(t) \quad (t \in \Omega)$$

из подпространства E_1 также неотрицательна и обращается в нуль лишь в точке t_0. Функции $u(t;\ t_0)$ $(t_0 \in \Omega_0)$ являются точками гладкости конуса K, через которые проходят функционалы (42). Поэтому E_1 является равномерно насыщенным подпространством.

Рассмотрим теперь функции (43) как компоненты вектор-функции $z=z(t)$ $(t \in \Omega)$ со значениями в k-мерном пространстве R^k точек

$$z = \{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k\}.$$

Иначе говоря,

$$z(t) = \{u_1(t),\ u_2(t), \ldots, u_k(t)\} \quad (t \in \Omega).$$

Множество Σ значений вектор-функции $z(t)$ является допустимой склейкой множества Ω. Действительно, из

$$z(t_1) = z(t_2)$$

вытекает, что любая функция из E_1, обращающаяся в нуль в точке t_1, обращается в нуль и в точке t_2. Поэтому на плотном в Ω множестве Ω_0 таких точек t_0, что функционал (42) принадлежит $F(E_1;\ K)$, вектор-функция $z(t)$ взаимно однозначна, а в точках $t \in \Omega \setminus \Omega_0$ принимает значения, отличные от значений на Ω_0.

Множество Σ лежит в $(k-1)$-мерной плоскости

$$\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_k = 1,$$

которую мы обозначим через Π. Если Σ лежит в некоторой плоскости размерности $k-2$, то его можно гомеоморфно отобразить в множество $\Sigma_1 \subset S^{k-2}$. Множество Σ_1 будет допустимой склейкой множества Ω. Таким образом, остается рассмотреть лишь тот случай, когда в Σ найдутся k точек

$$z(t_1),\ z(t_2), \ldots, z(t_k), \tag{45}$$

лежащих в Π в общем положении.

Положим

$$z_0 = \frac{z(t_1) + z(t_2) + \ldots + z(t_k)}{k}.$$

Точка z_0 лежит в плоскости Π. Покажем, что на каждом луче

$$z = z_0 + \lambda\,[z(t) - z_0] \quad (\lambda \geqslant 0;\ t \in \Omega) \tag{46}$$

нет отличных от $z(t)$ точек множества Σ. В предположении противного найдутся такие точки t', $t'' \in \Omega$ и такое число $\lambda_0 \in [0, 1)$, что

$$z(t') = z_0 + \lambda_0\,[z(t'') - z_0]. \tag{47}$$

Точка z_0 лежит внутри симплекса с вершинами (45) и поэтому все точки z некоторой ее окрестности в Π представимы в виде

$$z = \alpha_1 z(t_1) + \ldots + \alpha_k z(t_k),$$

где $\alpha_i > 0$ и $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = 1$. Отсюда из (47) вытекает, что точки u некоторой окрестности G в Π точки $z(t')$ можно представить в виде

$$u = \lambda_0 z(t'') + (1 - \lambda_0)\,\alpha_1 z(t_1) + \ldots + (1 - \lambda_0)\,\alpha_k z(t_k),$$

где снова $\alpha_i > 0$ и $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = 1$. Из равномерной насыщенности подпространства E_1 и из непрерывности вектор-функции $z(t)$ вытекает су-

ществование такого $t_0 \in \Omega$, что функционал (42) принадлежит $F(E_1; K)$ и $z(t_0) \in G$, т. е.

$$z(t_0) = \lambda_0 z(t'') + (1-\lambda_0)\alpha_1 z(t_1) + \ldots + (1-\lambda_0)\alpha_k z(t_k).$$

Умножая это равенство скалярно на вектор (44), получим слева нуль, а справа положительное число — мы пришли к противоречию.

Отнесем каждому значению вектор-функции $z(t)$ $(t \in \Omega)$ точку пересечения луча (46) со сферой $S^{k-2}\{\| z_0 - z \| = 1;\ z \in \Pi\}$. Это отображение множества Σ в множество $\Sigma_1 \subset S^{k-2}$ очевидным образом взаимно однозначно и непрерывно. Поэтому Σ_1 является допустимой склейкой компакта Ω.

Теорема доказана.

Аналогично доказывается

Теорема 9. *Для того чтобы в $C(\Omega)$ существовали k-мерные вполне насыщенные подпространства, необходимо и достаточно, чтобы компакт Ω можно было гомеоморфно вложить в $(k-2)$-мерную сферу.*

Эта теорема по существу содержится в результатах Ю. А. Шашкина [2].

Из теорем 8 и 9 вытекает, что насыщенные подпространства могут иметь меньшую размерность, чем минимальная размерность вполне насыщенных подпространств.

Выберем в трехмерном пространстве пять точек

$$M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4,\ M_5 \tag{48}$$

так, чтобы соединяющие их отрезки попарно не пересекались. Объединение этих отрезков обозначим через Ω. Множество Ω нельзя гомеоморфно вложить в двумерную сферу; вложение в трехмерную сферу очевидно. Поэтому минимальная размерность вполне насыщенных подпространств равна пяти. Если мы отождествим в множестве Ω точки (48), то получим допустимую склейку Σ, которая очевидным образом гомеоморфно вкладывается в двумерную сферу. Поэтому существуют насыщенные подпространства размерности 4.

Аналогично, если Ω — лист Мёбиуса, то существуют четырехмерные насыщенные подпространства, хотя минимальная размерность вполне насыщенных подпространств равна 5.

Авторы благодарны П. П. Забрейко за обсуждение работы и советы.

Поступило
20. IX. 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Коровкин П. П., Линейные операторы и теория приближений, М., Физматгиз, 1959.

2. Шашкин Ю. А., Системы Коровкина в пространствах непрерывных функций, Изв. АН, сер. матем. **26**, № 4 (1962).

3. Крейн М. Г. и Рутман М. А., Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха, УМН **3**, вып. 1 (23) (1948).

4. Красносельский М. А., Положительные решения операторных уравнений, М., Физматгиз, 1962.

5. Данфорд Н. и Шварц Дж. Т., Линейные операторы. Общая теория, М., ИЛ, 1962.

6. Красносельский М. А., Климов В. С. и Лифшиц Е. А., О сходимости положительных функционалов и операторов, ДАН **162**, № 2, (1965).