Е. В. Чижонков, К сходимости метода искусственной сжимаемости,
Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 1996, номер 2, 13–20

Обозначим $\tau = \frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{2}}$, $\tau > 1$. Запишем последнее слагаемое в (9) в терминах теории вероятностей: $\sum\limits_{n>l_j>\frac{n}{m}\tau} C_{n-1}^{l_j} p^{n-l_j-1} q^{l_j} = P(A)$ — вероятность события $A=$ «в $n-1$ испытании Бернулли с вероятностью успеха $q=1/m$ выпало больше чем $n\tau/m$ успехов». Но в силу центральной предельной теоремы для любого $\tau>1$ $P(A)\to 0$ при $n\to\infty$. Следовательно, $\exists N\ \forall n>N \sum\limits_{n>l_j>\frac{n}{m}\tau} C_{n-1}^{l_j} p^{n-1-l_j} q^{l_j} < \varepsilon/2$. Таким образом, доказано неравенство (8), а поэтому и вся теорема.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shtern A. I. Almost convergence and its applications to the Fourier—Stieltjes localization//Russ. J. Math. Phys. 1993. **1**, N 1. 115—125.
2. Day M. Amenable semigroups//Ill. Math. J. 1957. **1**, N 4. 509—544.

Поступила в редакцию
24.06.94

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 2

УДК 519.635.8

Е. В. Чижонков

К СХОДИМОСТИ МЕТОДА ИСКУССТВЕННОЙ СЖИМАЕМОСТИ

Идея искусственной сжимаемости, предложенная Н. Н. Яненко [1] в качестве составной части метода дробных шагов, получила широкое распространение при решении стационарных уравнений Стокса и Навье—Стокса в переменных скорость—давление [2]. В зарубежной литературе она встречается при расчете течений вязкой несжимаемой жидкости под другим названием (алгоритм Эрроу—Гурвица). Особенность подхода заключается в добавлении к уравнению неразрывности $\operatorname{div}\mathbf{u}=0$ выражения вида αp_t, описывающего «искусственную сжимаемость». При этом влияние двух итерационных параметров на сходимость метода оказывается весьма сложным, поэтому условия, обеспечивающие сходимость, являются объектом тщательного изучения [3]. В первую очередь они важны при решении практических задач. Как правило, для выбора параметров, близких к оптимальным, оказывается достаточным сделать несколько пробных расчетов в области сходимости метода.

В настоящей работе для краевых условий первого рода получено необходимое и достаточное условие сходимости алгоритма в линейном случае (для задачи Стокса), которое носит единый характер для широкого круга областей поиска решения. Кроме того, для оптимальных параметров приведены аналитические формулы, зависящие от единственного параметра, связанного с формой области.

Для удобства изложения все рассуждения проводятся на дифференциальном уровне.

1. Предварительные результаты

Пусть Ω — область из R^s $(s=2, 3)$ с конечной кусочно-гладкой границей. Определим следующие пространства: $\mathbf{W}=(\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))^s$ — векторное пространство Соболева с энергетическим скалярным произведением; $L_R=L_2(\Omega)/R^1$ — подпространство функций из $L_2(\Omega)$, ортогональных единице; $Z=\mathbf{W}\times L_R$ — пространство решений первой краевой задачи Стокса

$$\begin{cases} -\Delta\mathbf{u}+\operatorname{grad} p=\mathbf{f}^1, \\ \quad -\operatorname{div}\mathbf{u}=f^2, \\ z=(\mathbf{u},\ p)\in Z, \end{cases} \tag{1}$$

где необходимо $f^2\in L_R$. Кроме этого нам потребуется подпространство соленоидальных функций из $\mathbf{W}$: $\mathbf{H}=\{\mathbf{u}\in\mathbf{W}, \operatorname{div}\mathbf{u}=0\}$, его ортогональное дополнение будем обозначать через $\mathbf{G}$, так что $\mathbf{W}=\mathbf{H}\oplus\mathbf{G}$.

Спектром пучка операторов теории упругости (спектром Коссерá) называется решение задачи

$$\Delta\mathbf{u}+\omega\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}=0,\ \ \mathbf{u}\in\mathbf{W}, \tag{2}$$

где ω — спектральный параметр. В дальнейшем будут существенно использоваться следующие свойства спектра [4, 5].

1. Существует счетная система собственных функций $\{\mathbf{u}_n\}=\{\mathbf{h}_n\}\cup\{\mathbf{g}_n\}\in\mathbf{W}$, удовлетворяющая каждому из условий ортогональности

$$(-\Delta\mathbf{u}_n,\ \mathbf{u}_k)=(\mathbf{u}_n,\ \mathbf{u}_k)_{\mathbf{W}}=0,\ \ (\operatorname{div}\mathbf{u}_n,\ \operatorname{div}\mathbf{u}_k)=0,\ \ n\neq k.$$

2. Система $\{\mathbf{u}_n\}$ полна в $\mathbf{W}$, а система $\{\operatorname{div}\mathbf{u}_n\}$ — в L_R.

3. Собственные значения ω расположены на луче $[-\infty, -1]$, причем границы луча — изолированные точки бесконечной кратности.

4. Собственные функции $\{\mathbf{h}_n\}$, отвечающие бесконечному собственному значению, образуют базис в $\mathbf{H}$, остальные же $\{\mathbf{g}_n\}$ — соответственно в $\mathbf{G}$.

Рассмотрим вспомогательную спектральную задачу

$$Ap=\operatorname{div}\Delta^{-1}\operatorname{grad} p=tp,\ \ p\in L_R. \tag{3}$$

Здесь выражение $\Delta^{-1}\varphi$ означает вектор-функцию $\psi\in\mathbf{W}$, такую, что $\Delta\psi=\varphi$, t — спектральный параметр.

Имеет место (см. [6])

Л е м м а 1. *Собственные пары* (t_n, p_n) *задачи* (3) *представимы в виде*

$$(-\omega_n^{-1},\ \operatorname{div}\mathbf{g}_n). \tag{4}$$

Это утверждение, с одной стороны, подчеркивает важную связь между базисами подпространств $\mathbf{G}$ и L_R, а с другой стороны, порождает параметризацию задачи (1) в зависимости от области Ω. Действительно, поскольку спектр Коссера имеет только одну [4] точку сгущения собственных значений $\omega=-2$, а бесконечное собственное значение ω изолировано, то можно считать, что $\operatorname{sp}(A)\in[m, 1]$, $0<m\leqslant 1/2$. Введение параметра $m=m(\Omega)$ — нижней границы спектра задачи (3) — позволит в дальнейшем исследовать алгоритм решения задачи Стокса для широкого круга областей Ω одновременно.

2. Условие сходимости

Запишем метод искусственной сжимаемости для нахождения решения задачи (1) в следующем виде [3]:

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u}_t - \Delta \mathbf{u} + \operatorname{grad} p = \mathbf{f}^1, \\ \alpha p_t + \operatorname{div} \mathbf{u}^{k+1} = -f^2, \\ (\mathbf{u},\ p) \in Z. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь $\Phi = \Phi^k$, $\Phi_t = (\Phi^{k+1} - \Phi^k)/\tau$ (Φ имеет смысл $\mathbf{u}$ или p), α и τ — вещественные положительные итерационные параметры.

Обозначим через S оператор сокращения ошибки в (5), т. е. $z^{k+1} = Sz^k + d$, $z^k = (\mathbf{u}^k, p^k)$, и рассмотрим спектральную задачу $Sz = \lambda z$:

$$\begin{cases} (1-\tau)\,\mathbf{u} + \tau \Delta^{-1} \operatorname{grad} p = \lambda \mathbf{u}, \\ \tau(\tau-1)/\alpha \operatorname{div} \mathbf{u} + (E - \tau^2/\alpha\, A)\, p = \lambda p, \end{cases} \tag{6}$$

где E — тождественный оператор.

Имеет место

Лемма 2. *Собственные пары* (λ_n, z_n) *задачи* (6) *представимы в виде*

$$\lambda_n^1 = 1 - \tau, \qquad z_n^1 = (\mathbf{h}_n,\ 0),$$
$$\lambda_n^{2,3} = 1 - \tau\beta_n \pm \tau \sqrt{\beta_n^2 - t_n/\alpha}, \quad z_n^{2,3} = (\mathbf{g}_n,\ p_n/\gamma_n^{2,3}), \tag{7}$$

где

$$\beta_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\tau}{\alpha} t_n\right), \quad \gamma_n^{2,3} = \frac{\alpha}{\lambda_n^{2,3}} \left(\beta_n \mp \sqrt{\beta_n^2 - t_n/\alpha}\right) \neq 0,$$

(t_n, p_n) — *собственные пары задачи* (3). *Система собственных функций оператора* S, *дополненная в случае* $\lambda_n^2 = \lambda_n^3 = \lambda_n$ *функциями вида*

$$z_n = \left(\mathbf{g}_n,\ p_n \frac{\lambda_n + \tau}{t_n \tau}\right),$$

полна в Z.

Доказательство. Непосредственная подстановка $z_n^1 = (\mathbf{h}_n, 0)$ в (6) дает $\lambda_n^1 = 1 - \tau$. Оставшиеся собственные функции будем искать в виде $z_n = (\mathbf{g}_n, \gamma^{-1} \operatorname{div} \mathbf{g}_n)$. После применения к первому уравнению (6) оператора div и замены $\operatorname{div} \mathbf{g}_n = p_n$ получим

$$\begin{cases} Ap_n = \dfrac{\gamma(\lambda - 1 + \tau)}{\tau}\, p_n, \\[2ex] Ap_n = \dfrac{\alpha(1-\lambda) - \gamma\tau(1-\tau)}{\tau^2}\, p_n, \end{cases}$$

откуда для λ и γ имеем соотношения (см. лемму 1)

$$t_n = \frac{\gamma(\lambda - 1 + \tau)}{\tau} = \frac{\alpha(1-\lambda) - \gamma\tau(1-\tau)}{\tau^2},$$

приводящие к формулам (7).

Перейдем к доказательству полноты указанной в утверждении системы функций, отметив, что из свойства 1 задачи (2) следует ортогональность в метрике пространства Z собственных функций $\{z_n^{1,2,3}\}$, у которых первые компоненты различны.

Рассмотрим вначале более простой случай — различных собственных значений $\lambda_n^{2,3}$ при фиксированном n. Или точнее, пусть параметры α и τ таковы, что выражение $\beta_n^2 - t_n/\alpha$ не обращается в нуль ни при каком значении t_n. Тогда величины γ_n^2 и γ_n^3 для любого n также будут различны, что следует из их явного представления.

Пусть теперь некоторый элемент $z \in Z$ ортогонален произвольной собственной функции $\{z_n^{1,2,3}\}$ задачи (6). Из свойств 2 и 4 задачи (2) и явного вида $\{z_n^1\}$ вытекает, что он может иметь только следующий вид:

$$\mathbf{u} = \Sigma C_n^1 \mathbf{g}_n, \quad p = \Sigma C_n^2 \operatorname{div} \mathbf{g}_n.$$

Но для каждого $\mathbf{g}_n$ имеется пара различных собственных функций вида $\{\mathbf{g}_n \operatorname{div} \mathbf{g}_n/\gamma_n^{2,3}\}$, откуда, предполагая наличие некоторого C_k^1 (или C_k^2, порознь или одновременно), не равного нулю, получаем

$$\begin{cases} C_k^1 (\mathbf{g}_k, \mathbf{g}_k)\mathrm{w} + C_k^2 (\operatorname{div} \mathbf{g}_k, \operatorname{div} \mathbf{g}_k)/\gamma_k^2 = 0, \\ C_k^1 (\mathbf{g}_k, \mathbf{g}_k)\mathrm{w} + C_k^2 (\operatorname{div} \mathbf{g}_k, \operatorname{div} \mathbf{g}_k)/\gamma_k^3 = 0. \end{cases}$$

Отличие от нуля определителя линейной системы (так как $\gamma_k^2 \neq \gamma_k^3$) приводит только к тривиальному решению $C_k^1 = C_k^2 = 0$, откуда и следует искомая полнота.

Приведенное доказательство можно обобщить на случай кратных собственных значений, т. е. обращения в нуль выражения $\beta_n^2 - t_n/\alpha$ при некоторых t_n. Сразу необходимо отметить, что при любых фиксированных α и τ таких различных значений t_n не более двух, причем даже одинаковым t_n соответствуют различные p_n. Пусть в рассматриваемом случае имеется только один собственный вектор оператора S с первой компонентой $\mathbf{g}_n$. Тогда для построения полной в Z системы функций достаточно добавить к нему в пару корневой вектор высоты два следующего вида: $z_n = (\mathbf{g}_n, p_n(\lambda_n + \tau)/t_n\tau)$, удовлетворяющий уравнению $(S - \lambda_n E)^2 z_n = 0$ и, очевидно, линейно независимый с соответствующим собственным. Далее, повторяя дословно приведенные выше рассуждения, получим полноту уточненной системы функций.

Таким образом, наличие в пространстве Z полной системы функций, состоящей либо только из собственных векторов оператора S, либо из собственных векторов с добавлением к ним корневых по указанной схеме, дает основание утверждать, что других собственных пар задачи (6), отличных от (7), не существует.

Лемма доказана.

Из леммы 2 непосредственно следует, что оператор S допускает почти диагональное матричное представление в пространстве Z (матрица может иметь жордановы клетки не более чем второго порядка), а его спектр в силу замечания к лемме 1 принадлежит множеству

$$\Lambda = \{1 - \tau\} \cup \{1 - \tau\beta \pm \tau\sqrt{\beta^2 - t/\alpha},\ \beta = (1 + \tau t/\alpha)/2,\ t \in [m, 1]\}.$$

Представляет определенный интерес соотношение между параметрами метода, при котором все $\lambda \in \Lambda$ лежат внутри единичного круга.

Имеет место

Лемма 3. *Для справедливости неравенства* $|\lambda| < 1$ *при любом* $\lambda \in \Lambda$ *необходимо и достаточно выполнения соотношения*

$$\tau < \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha} - \alpha. \tag{8}$$

Доказательство. Введем следующие обозначения для элементов множества Λ:

$$\lambda_1 = 1-\tau,$$

$$\lambda_{2,3} = 1-\tau\beta \pm \tau\sqrt{\beta^2-t/\alpha}.$$

Знак + здесь и далее относится к λ_2.

Достаточность. Рассмотрим некоторую фиксированную точку $t\in\in[m, 1]$ и выясним соотношение между параметрами τ и α, при котором $|\lambda_{2,3}|<1$.

Проанализируем сначала случай различных вещественных $\lambda_{2,3}$ $(\beta^2-t/\alpha>0)$. Так как $\lambda_2>\lambda_3$, достаточно исследовать неравенства

$$-1<\lambda_3<\lambda_2<1.$$

Условие $\lambda_2<1$ выполнено всегда, так как $\sqrt{\beta^2-t/\alpha}<\beta$. Очевидные преобразования неравенства $\lambda_3>-1$ приводят к выражению

$$0<\tau<\sqrt{\alpha^2/t^2+4\alpha/t}-\alpha/t,$$

из монотонности по t правой части которого следует неравенство (8).

Ограничение $|\lambda_1|<1$ дает $\tau<2$. Поскольку правая часть (8) монотонно возрастает по α и ограничена двойкой, условием (8) гарантируется выполнение неравенства

$$\max_t |\lambda_{1,2,3}| < 1$$

в случае вещественных λ.

Рассмотрим далее случай комплексных (или кратных) значений λ при некотором $t\in[m, 1]$: $\beta^2-t/\alpha\leqslant 0$. При этом $|\lambda_{2,3}|^2=1-\tau$, откуда в силу положительности параметра τ получаем, что комплексные и кратные значения $\lambda\in\Lambda$ всегда лежат внутри единичного круга.

Завершение доказательства достаточности следует из объединения двух рассмотренных выше случаев.

Необходимость. Доказательство проведем от противного. Покажем, что даже для единственной точки отрезка $[m, 1]$, а именно $t=1$, невыполнение (8) приводит к неравенству $|\lambda_3|\geqslant 1$. Пусть

$$\tau=\sqrt{\alpha^2+4\alpha}-\alpha+\varepsilon\alpha,\ \varepsilon\geqslant 0.$$

При этом λ_2 и λ_3 будут вещественны, так как $\beta^2-1/\alpha>1/4$ для любого $\varepsilon\geqslant 0$. Далее рассмотрим изменение определяющей величины

$$\lambda_3=1-\tau\beta-\tau\sqrt{\beta^2-1/\alpha}$$

в зависимости от параметра β:

$$\frac{\partial\lambda_3}{\partial\beta}=-\tau\left(1+\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2-1/\alpha}}\right)<0.$$

В свою очередь $\partial\beta/\partial\varepsilon>0$, и при $\varepsilon=0$ имеем $\lambda_3=-1$. Последние два неравенства для производных приводят к условию $\lambda_3\leqslant -1$ при $\varepsilon\geqslant 0$.

Лемма доказана.

Отметим, что $t=1$ является собственным значением оператора A в (3) и, следовательно, λ_3 при $t=1$ — оператора S в (6). Это означает, что при невыполнении условия (8) существует собственный вектор S, такой, что отвечающее ему собственное значение λ_3 по модулю не меньше единицы. С учетом этого замечания из лемм 1—3 и теоремы XIII.4.3 [7] о сходимости метода простой итерации непосредственно следует

Теорема 1. *Итерационный процесс* (5) *сходится к решению задачи* (1) *при любом начальном приближении* $(\mathbf{u}^0, p^0) \in Z$ *тогда и только тогда, когда выполнено неравенство*

$$\tau < \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha} - \alpha.$$

Любопытно сопоставить полученные результаты с известной теоремой 5.2 из [3], в которой при выполнении неравенства

$$\tau < 2\alpha/(\alpha + 1) \tag{9}$$

доказана сильная сходимость $\mathbf{u}^k$ к $\mathbf{u}$ в $\mathbf{W}$ и слабая p^k к p в L_R.

Правая часть неравенства (8) при любом $\alpha > 0$ больше, чем правая часть (9), наиболее значительная разница наблюдается при малых α. Интересно отметить, что для рассматриваемых областей оптимальные параметры (см. следующий раздел) вообще не удовлетворяют неравенству (9). Кроме того, сходимость, установленная в настоящей работе, является сильной как для $\mathbf{u}$, так и для $\mathbf{p}$.

3. Оптимальные параметры

Из утверждения леммы 2 непосредственно вытекает следующая оптимизационная задача — найти положительные значения τ_0 и α_0, доставляющие минимум функции q:

$$q(m) = \max_{t \in [m, 1]} \{|1-\tau|,\ |1-\tau\beta \pm \tau\sqrt{\beta^2 - t/\alpha}|\}, \tag{10}$$

где, как и ранее, $\beta = (1+\tau t/\alpha)/2$.

Имеет место

Теорема 2. *Для любого* $m \in (0, 1/2]$ *решение задачи* (10) *имеет следующий вид*:

$$q(m) = (1-\sqrt{m})/(1+\sqrt{m}),$$

$$\tau_0(m) = 4\sqrt{m}/(1+\sqrt{m})^2,\ \alpha_0(m) = 4m/(1+\sqrt{m})^2.$$

Доказательство. Рассмотрим выражение для функции q. Второй аргумент в процедуре max — это корни уравнения

$$\lambda^2 - \lambda(2 - \tau - \tau^2 t/\alpha) + 1 - \tau = 0. \tag{11}$$

Пусть $0 \leqslant \tau \leqslant 1$. Тогда максимальный по модулю корень уравнения (11), очевидно, удовлетворяет оценке

$$|\lambda_{\max}| \geqslant \sqrt{1-\tau},$$

причем равенство достигается в случае комплексных или кратных корней. Отсюда следует, что случай $\beta^2 - t/\alpha \leqslant 0$ (неположительный дискриминант (11) для всех $t \in [m, 1]$) необходимо рассмотреть подробнее.

Преобразования последнего неравенства приводят к выражению

$$\tau \leqslant \min\{2\sqrt{\alpha} - \alpha,\ 2\sqrt{\alpha/m} - \alpha/m\}, \tag{12}$$

откуда получаем, что максимально возможное значение τ достигается при

$$\alpha_0(m)=4m/(1+\sqrt{m})^2$$

и равно

$$\tau_0(m)=4\sqrt{m}/(1+\sqrt{m})^2.$$

При этом все корни уравнения (11) лежат на окружности:

$$|\lambda|=q(m)=\sqrt{1-\tau_0(m)}=(1-\sqrt{m})/(1+\sqrt{m}).$$

Неулучшаемость оценки при $0<\tau<1$ следует из наличия двух двухкратных (см. лемму 2) вещественных корней и непрерывности корней многочлена в зависимости от коэффициентов. Действительно, при $\tau>\tau_0$ немедленно получаем $|\lambda_{\max}|>q(m)$, причем максимум достигается на одном из вещественных корней.

Рассмотрим далее полуинтервал $\tau\in[1,2)$, следующий из явного вида первого аргумента в процедуре max в (10). При $\tau=1$ максимальный по модулю корень (11) имеет вид $\lambda=1-t/\alpha$, и решение задачи (см. [8])

$$\min_{\alpha}\max_{t}|1-t/\alpha|=(1-m)/(1+m),$$

очевидно, для любого $m\in(0,1/2]$ больше чем $q(m)$. Оставшиеся же значения τ можно не рассматривать в силу монотонности $|\lambda_{\max}|$ по этому параметру.

Теорема доказана.

Прокомментируем полученный результат. Рассмотрим для решения задачи (1) алгоритм Удзавы [3] (или метод окаймления):

$$p^{k+1}=p^k-\tau_k(Ap^k+f^2-\operatorname{div}\Delta^{-1}\mathbf{f}^1).$$

Выбирая в качестве τ_k чебышевские параметры [8] на отрезке $[m,1]$ (см. лемму 1), находим асимптотическую скорость сходимости этого метода $q=(1-\sqrt{m})/(1+\sqrt{m})$, которая является наилучшей из известных в настоящее время в данном классе алгоритмов.

Полученные формулы $q(m)$, α_0 и τ_0 гарантируют такую же скорость сходимости метода (5), причем достигаемую при постоянных значениях параметров. Это особенно привлекательно, поскольку нет необходимости заботиться заранее об оценке числа итераций для достижения заданной точности решения.

Автор выражает благодарность К. Ю. Богачеву за полезные обсуждения результатов работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93-01-01729.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов для решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, 1967.
2. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 2. М., 1991.
3. Темам Р. Уравнения Навье—Стокса. Теория и численный анализ. М., 1981.
4. Михлин С. Г. Спектр пучка операторов теории упругости//Успехи матем. наук. 1973. 28, № 3(171). 43—82.
5. Михлин С. Г. Дальнейшее исследование спектра Коссера//Вестн. Ленингр. ун-та. Математика. 1967. 7, вып. 2. 96—102.

6. Chizhonkov E. V. Application of the Cossera spectrum to the optimization of a method for solving the Stokes problem//Russ. J. Num. Anal. and Math. Modelling. 1994. 9, N 3. 191—199.
7. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М., 1984.
8. Бахвалов Н. С. Численные методы. М., 1973.

Поступила в редакцию
27.06.94

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 2

УДК 517.548.3

А. В. Покровский

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ В ВИДЕ СУММЫ КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИХ

Пусть $C(J)$ — пространство непрерывных функций на замкнутом отрезке J из $\mathbf{R}$ с равномерной нормой: $\|f\|=\sup\limits_{x\in J}|f(x)|$, $B(r)$ — замкнутый шар из $C(J)$ радиуса r с центром в начале координат. Через $E_n(f)$ обозначим наименьшее уклонение функции f от пространства (алгебраических) полиномов степени $\leqslant n$ в этой метрике. Очевидно, что для каждой пары функций g, h из $C(J)$ и всех натуральных m и n выполняется неравенство

$$E_{\max\{m,n\}}(g+h)\leqslant E_m(g)+E_n(h). \tag{1}$$

Если $N=\{n(k)\}_1^\infty$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, то говорят, что $f\in C(J)$ принадлежит квазианалитическому классу Бернштейна $B(J,\ N)$, если $E_s(f)\leqslant Cq^s\,(C=C(f),\quad q=q(f)<1)$ для $s=s(k')$, где $\{s(k')\}_1^\infty$ — некоторая возрастающая последовательность натуральных чисел, обладающая свойством: для каждого $k=1,\ 2, \dots$ найдется $s(k')$, такое, что $n(k)/l\leqslant s(k')\leqslant ln(k)$ при некотором $l=l(f)$, не зависящем от k.

С. Н. Бернштейн [1] показал, что если две функции f, g из $B(J,N)$ совпадают на некотором отрезке $j\subseteq J$, то они тождественны на J. В теории квазианалитических по Бернштейну функций важную роль играет следующая теорема А. И. Маркушевича [2] (см. также [1]): любая функция $f\in C(J)$ является суммой двух функций, каждая из которых принадлежит некоторому (своему) квазианалитическому классу Бернштейна. Приводимая ниже теорема существенно уточняет этот результат.

Напомним (см. [3]), что множество M в пространстве X с метрикой R называется вполне ограниченным, если при любом $\varepsilon>0$ для него существует конечная ε-сеть, т. е. такое конечное множество $E\subset X$, что для любого $x\in M$ существует $a\in E$ со свойством $R(x,a)<\varepsilon$.

Теорема. *Пусть задано некоторое множество $A\subset C(J)$. Для того чтобы существовали такие два класса $B(J,N)$ и $B(J,M)$ функций, квазианалитических по Бернштейну на J, что каждая функция f из A представляется в виде $f=f_1+f_2$, где $f_1\in B(J,N)$ и $f_2\in B(J,M)$, необходимо и достаточно, чтобы множество A представлялось в виде объединения некоторой последовательности вполне ограниченных множеств из $C(J)$.*

Доказательство. Пусть каждая функция $f(x)\in A$ есть $f_1(x)+f_2(x)$, где $f_1\in B(J,\ N)$, $f_2\in B(J,\ M)$, $N=\{n_k\}_1^\infty$, $M=\{m_k\}_1^\infty$. Рассмотрим множества