Дискретная математика

том 12 выпуск 1 * 2000

УДК 519.2

Условия сходимости для ветвящихся процессов с частицами, имеющими вес

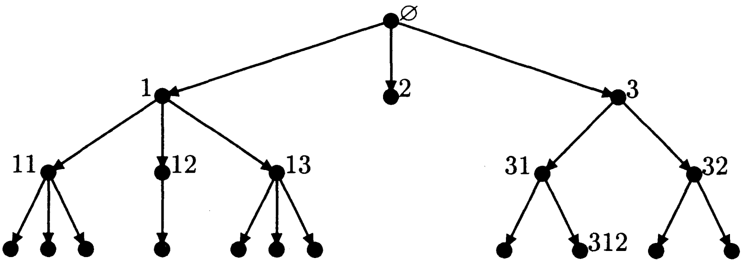
© 2000 г. У. Рослер, В.А. Топчий, В.А. Ватутин

Рассматривается ряд задач для ветвящихся процессов с частицами, имеющими вес, и, в частности, указываются условия сходимости таких процесссов, которые являются, в определенной степени, аналогами известного условия на $X \ln X$ для обычных ветвящихся процессов и ветвящихся случайных блужданий на прямой.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 99–01–00012, 99–01–01130, РФФИ–ННИО, проект 98–01–041132, и DFG436RUS113/5/0.

1. Введение

Ветвящийся процесс с частицами, имеющими вес, — это обычный ветвящийся процесс, каждой частице (индивидууму) v которого приписан некоторый вес $L(v)$. Предполагается, что вес $L(vi)$ потомка vi равен весу $L(v)$ его матери v, умноженному на случайный множитель $T_i(v)$. Нестрогое описание этого процесса может быть дано в терминах (марковского) процесса на ориентированном дереве со счетным множеством ветвей. Приводимая ниже схема является одной из возможных реализаций этого процесса на генеалогическом дереве всех живущих (имеющих вес $L(v) \neq 0$) индивидуумов v с индексами, соответствующими путям на этом дереве.



Одним из главных и хорошо изученных примеров таких процессов являются процессы Гальтона–Ватсона, в которых вес каждого индивидуума равен 0 или 1. Однако многие мощные методы, развитые для процессов Гальтона–Ватсона, в частности, метод производящих функций, оказываются бесполезными для ветвящихся процессов с частицами, имеющими вес. Цель данной статьи — предложить вероятностные методы анализа свойств ветвящихся процессов с частицами, имеющими вес. Однако вначале мы попытаемся объяснить, почему систематическое исследование таких процессов представляет интерес.

Мы остановимся на некоторых интересных (в чем мы надеемся убедить читателя) характеристиках ветвящихся процессов с частицами, имеющими вес, таких как общий вес

$$Z_n = \sum_{|v|=n} L(v) \tag{1}$$

частиц n-го поколения и величина

$$R_n = \sum_{|v|\leqslant n} L(v)C(v). \tag{2}$$

Здесь $C(v)$, $v \in V$, — доплнительные независимые одинаково распределенные случайные величины. Если $C \equiv 1$, то случайная величина R_n есть общий вес всех частиц до n-го поколения включительно. Нормированный процесс $W_n = Z_n/m^n$, где m — математическое ожидание веса потомства одного индивидуума, является мартингалом. При соответствующих предположениях (например, положительности весов) этот мартингал сходится к некоторому пределу W_∞ при $n \to \infty$. Указанный предел, точнее, распределение предельной случайной величины W_∞, удовлетворяет уравнению типа уравнения с неподвижной точкой

$$W_\infty \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{\infty} T_j W_\infty^{(j)}. \tag{3}$$

Случайные величины $T = (T_1, T_2, \dots)$, $W_\infty^{(j)}$, $j \in \mathbf{N}$, независимы и все $W_\infty^{(j)}$ имеют одно и то же распределение. Отметим, что мы допускаем произвольную зависимость весовых множителей T_j для соответствующих потомков одного индивидуума. Конечно, такие соотношения справедливы и для обычных процессов Гальтона–Ватсона (см. [1]).

В случае, когда T_j действительны, все решения уравнения (3) известны (см. серию статей [8, 12, 17] и недавнюю работу [16]). Грубо говоря, эти решения являются смесями некоторых устойчивых распределений. Если веса положительны, то (положительные) решения уравнения (3) допускают естественную характеризацию [10, 12].

В данной работе мы докажем ряд теорем о сходимости $W_n \to W_\infty$ при помощи слабо выпуклых функций. Важнейшими примерами слабо выпуклых функций являются функции $x \to x^p$, $x \in (0, \infty)$, при $1 \leqslant p \leqslant 2$. Необходимость теорем о сходимости в L_2 (см. [16]) была обусловлена задачами, возникающими при анализе времени работы некоторых алгоритмов. Обоснование сходимости в L_p для $p > 2$ для такого рода задач сводится к повторению аргументов, применявшихся в случае $p = 2$. В настоящей работе мы готовим основу для получения соответствующих результатов при $1 < p < 2$.

Предел W_∞ является одним из решений уравнения (3). Особый интерес представляют нетривиальные решения этого уравнения, и теорема 4 содержит утверждение, тесно связанное с условием на $X \ln X$, установленным Кестеном и Стигумом для обычных ветвящихся процессов. Стоит отметить, что нам удалось получить аналог результата Кестена и Стигума лишь в одну сторону: конечность $\mathsf{E}X \ln^+ X$ влечет нетривиальность предела W_∞. Однако при этом мы отказываемся от предположения конечности математического ожидания числа потомков частиц. Эквивалентность соотношений $\mathsf{E}X \ln^+ X < \infty$ и $W_\infty \not\equiv 0$ была установлена Кестеном и Стигумом [2] для обычных ветвящихся процессов, Биггинсом [3] для ветвящихся случайных блужданий (ветвящихся процессов с частицами, имеющими вес, на аддитивной группе) и была доведена Лионсом [13] до окончательного вида. Используя несколько иной подход, Лиу [12] получил для упомянутых процессов окончательный ответ.

2. Ветвящиеся процессы с частицами, имеющими вес

Будем рассматривать дерево со счетным числом ветвей. Множество вершин V этого дерева отождествим с объединением

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbf{N}^n,$$

где $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, а $\mathbf{N}^0 = \{\varnothing\}$ по определению. Метка вершины

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_n) = v_1 v_2 \dots v_n \in \mathbf{N}^n$$

соответствует пути, ведущему из корня $\varnothing$ в эту вершину. В случаях, когда это не будет приводить к недоразумениям, мы не включаем в обозначения метку корня $\varnothing$. Для $m \leqslant |v|$ положим $v_{|m} = v_1 \dots v_m$. Для упомянутой выше вершины v и $w = w_1 \dots w_m \in V$ будем использовать обозначение $vw = v_1 \dots v_n w_1 \dots w_m$. Ребра дерева имеют вид (v, vi).

Используя терминологию ветвящихся процессов будем называть вершины индивидуумами или частицами, при этом вершина vi является потомком v, v является матерью vi и предком vw, а $n = |v|$ есть номер поколения индивидуума v.

Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, достаточно богатое для того, чтобы все встречающиеся ниже случайные величины можно было определить на нем. Пусть $T(v)\colon \Omega \to \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, $v \in V$, — независимые случайные наборы, $T(v) = (T_1(v), T_2(v), \dots)$. Будем писать также $T = (T_1, T_2, \dots)$, если конкретное значение v не является существенным. Заметим, что для фиксированного v мы допускаем любой вид зависимости между случайными величинами $T_j(v)$, $j \in \mathbf{N}$.

Определим итеративным образом вес или длину $L\colon \Omega \times V \to \mathbf{R}$ соотношением

$$L(vj) = L(v)T_j(v), \quad v \in V, \quad j \in \mathbf{N}. \tag{4}$$

Здесь, для простоты, мы опустили символ ω. Будем предполагать, что начальный вес $L(\varnothing)$ равен 1.

Вес L имеет рекурсивное представление в виде произведения

$$\begin{aligned} L(v) &= L(\varnothing)T_{v_1}(\varnothing)T_{v_2}(v_1)T_{v_3}(v_1v_2)\dots T_{v_n}(v_1v_2\dots v_{n-1}) \\ &= L(\varnothing)\prod_{i=1}^{n} T_{v_i}(v_{|(i-1)}). \end{aligned} \tag{5}$$

Назовем индивидуум v живым, если вес v не равен 0. На приведенном выше рисунке представлены все живые индивидуумы данной реализации.

Описанный выше процесс будем называть ветвящимся процессом с частицами, имеющими вес. Как правило, мы будем предполагать, что случайные величины $T(v)$, $v \in V$, одинаково распределены. В данной статье основное внимание будет уделено общему весу (1)

$$Z_n = \sum_{|v|=n} L(v)$$

частиц n-го поколения и величине (2)

$$R_n = \sum_{|v|\leqslant n} L(v)C(v).$$

Для измеримой функции H будем использовать вес $H(L(v))$ вместо $L(v)$. Соответствующие случайные величины снабдим индексом H, например,

$$Z_n^H = \sum_{|v|=n} H(L(v)).$$

Для функции $H(x) = |x|^\alpha$, где α — положительное число, величина Z_n^H имеет вид

$$Z_n^H = \sum_{|v|=n} |L(v)|^\alpha. \tag{6}$$

Соответствующие весовые множители равны $|T_i(v)|^\alpha$.

Кроме того, всюду ниже будем предполагать, что выполнены следующие два условия.

Для любого v математическое ожидание

$$m(v) = \mathbf{E} \sum_i T_i(v)$$

существует, конечно и отлично от нуля. Мы опускаем символ v в случаях, когда это не приводит к недоразумениям.

Мы не будем рассматривать тривиальный случай

$$\sum_i \mathbf{1}_{T_i(v)\neq 0} \equiv 1, \qquad v \in V.$$

Ветвящиеся процессы с частицами, имеющими вес, обладают как ветвящейся, так и мультипликативной структурами. Рассмотрим два экстремальных примера таких ветвящихся процессов, а именно, ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона и мультипликативное случайное блуждание.

Рассмотрим процесс Гальтона–Ватсона [1, 2]. Ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона — это случайный процесс $\tilde{Z}_n$, $n \in \mathbf{Z}_+$, со значениями в $\mathbf{Z}_+$, определяемый при помощи соотношений $\tilde{Z}_0 = 1$,

$$\tilde{Z}_{n+1} = \sum_{j=1}^{\tilde{Z}_n} \tilde{X}_{n,j}, \qquad n \in \mathbf{Z}_+.$$

Здесь $\tilde{X}_{n,i}$, $n \in \mathbf{Z}_+$, $j \in \mathbf{N}$, — независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в $\mathbf{Z}_+$. Распределение

$$\mathsf{P}(\tilde{X} = k) = p_k, \qquad k = 0, 1, \dots ,$$

случайных величин $\tilde{X}$ называется распределением числа потомков. С каждым ветвящимся процессом Z_n с частицами, имеющими вес, мы свяжем процесс

$$\overline{Z}_n = \sum_{|v|=n} \mathbf{1}_{L(v)\neq 0},$$

который считает число живых индивидуумов. Ясно, что $\overline{Z}_n$ является ветвящимся процессом Гальтона–Ватсона. Мы будем снабжать чертой сверху все величины, относящиеся к процессу $\overline{Z}$. Процесс $\overline{Z}$ также можно расматривать как ветвящийся процесс с частицами, имеющими вес. При этом наборы $T(v)$, $v \in V$, независимы и одинаково распределены, а множители $\overline{T}_i(v) = \mathbf{1}_{T_i(v)\neq 0}$ принимают лишь значения 0 или 1. Поэтому вес каждой живущей частицы равен 1. Число непосредственных потомков частицы равно

$$\overline{X} = \sum_j \overline{T}_j,$$

а математическое ожидание числа непосредственных потомков равно $\overline{m}$.

С другой стороны, каждый ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона можно рассматривать как ветвящийся процесс с частицами, имеющими вес (в смысле определения, данного выше). Действительно, любой процесс Гальтона–Ватсона характеризуется распределением $(p_k)_{k\geqslant 0}$ числа потомков. Возьмем теперь любое распределение набора $T\colon \Omega \to \{0,1\}^{\mathbf{N}}$, для которого $\mathsf{P}(\sum_j \overline{T}_j = k) = p_k$. Такие распределения существуют (и их много). Пусть, например, $T_j(\omega)$ не возрастает по j для каждого ω, что полностью определяет распределение T. Заметим, что мы утверждаем равенство распределений ветвящегося процесса $Z = \overline{Z}$ с частицами, имеющими вес, и ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона $\tilde{Z}$.

Рассмотрим теперь мультипликативное случайное блуждание. Пусть Y_n, $n \in \mathbf{N}$, — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения в $\mathbf{R}_> = (0, \infty)$. Мультипликативным случайным блужданием называется случайный процесс

$$S_n = \prod_{i=1}^{n} Y_i,$$

$S_0 = 1$, на мультипликативной группе $(\mathbf{R}_>, \cdot)$. Взяв логарифм, мы получим аддитивное случайное блуждание на $\mathbf{R}$ (переход в противоположном направлении также возможен).

Мультипликативное случайное блуждание соответствует ветвящемуся процессу с частицами, имеющими вес, в котором каждая частица имеет ровно одного потомка, то есть

$$\mathsf{P}\left(\sum_j \mathbf{1}_{T_j\neq 0} = 1\right) = 1.$$

Для простоты предположим, что T_1 всегда равно единице. Тогда T_1 имеет такое же распределение, что и Y. Здесь возможно поточечное вложение при помощи случайных величин

$$S_0 = 1 = L(\varnothing), \quad Y_1 = T_1(\varnothing), \quad Y_2 = T_1(1), \quad Y_3 = T_1(11), \quad \ldots$$

Процесс $(S_n)_n$ имеет такое же распределение (или поточечно равен), как и ветвящийся процесс с частицами, имеющими вес.

Замечание 1. Ветвящиеся случайные блуждания, изучавшиеся Биггинсом [3] являются частными случаями ветвящихся процессов с частицами, имеющими вес. Пусть $T(v)$, $v \in V$, — наборы положительных случайных величин, и пусть $\ln L(v)$ есть вес вершины $v \in V$. Логарифм является изоморфизмом мультипликативной группы $(\mathbf{R}_>, \cdot)$ на аддитивную группу $(\mathbf{R}, +)$. Нулевой вес 0 (гибель частицы) в мультипликативной группе соответствует $-\infty$ в аддитивной группе.

В отличие от обычных ветвящихся процессов, общий вес Z_n частиц n-го поколения ветвящегося процесса с частицами, имеющими вес, не является, вообще говоря, марковским процессом. Рекурсивное соотношение для Z_n имеет вид

$$Z_{n+1} = \sum_{|v|=n} \left(L(v) \sum_{j \in \mathbf{N}} T_j(v) \right). \tag{7}$$

Ветвящийся процесс с частицами, имеющими вес, нормированный m^n, является мартингалом. Каждый положительный мартингал сходится почти всюду, поэтому при $n \to \infty$

$$W_n = \frac{Z_n}{m^n} \to W_\infty \quad \text{п.в.} \tag{8}$$

3. Случайные величины и пространство Орлича

В этом разделе мы рассмотрим класс функций, который тесно связан с классом функций Орлича [19, 11].

Функцией Орлича называется строго выпуклая функция $H\colon \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, $\mathbf{R}^+ = [0,\infty)$, удовлетворяющая условию $H(0) = 0$. Каждая функция Орлича имеет почти всюду левую и правую производные [19, 11]. Определим отображение d_H на множестве случайных величин при помощи соотношения

$$d_H(X, Y) = \inf\{c > 0 \mid \mathbf{E} H(|X - Y|/c) < 1\}.$$

Пространство функций Орлича

$$L_\varphi = \{X\colon h\Omega \to \mathbf{R} \mid \forall c > 0\ \mathbf{E} H(|X|/c) < \infty\},$$

оснащенное нормой Орлича d_H, является нормированным векторным пространством.

Слабо выпуклой функцией или w^*-функцией называется функция Орлича, имеющая вогнутую производную $\varphi\colon \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$. Производная непрерывна на $(0, \infty)$.

Слабо выпуклую или w^*-функцию H назовем $(w,c)^*$-функцией, $c>0$, если она удовлетворяет условию

$$H(xy) \leqslant cH(x)H(y)$$

для всех $x, y \in \mathbf{R}$. Назовем $(w,c,\infty)^*$-функцией $(w,c)^*$-функцию H, удовлетворяющую дополнительному условию $H(x)/x \to \infty$ при $x \to \infty$. Функции $x \to x^p$, $1 < p \leqslant 2$, являются важнейшими примерами таких функций.

Предложение 1. *Любая $(w,1,\infty)^*$-функция H с $H(1)=1$ удовлетворяет соотношению*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{H(x)}{x\ln^t x} = \infty \tag{9}$$

для любого $t>0$.

Доказательство. Предположим, что

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{H(x)}{x\ln^t x} = r < \infty$$

для некоторого $t>0$. Без ограничения общности можно считать, что $r=0$ (в противном случае можно взять несколько большее t).

Пусть $\varphi(0)$ — предел справа в нуле функции φ. Поскольку $H(x)=\varphi(0)x+o(x)$ при малых значениях x, условие $H(xx) \leqslant H(x)H(x)$ влечет оценку $\varphi(0) \leqslant \varphi^2(0)$. Следовательно, либо $\varphi(0) \geqslant 1$, либо $\varphi(0)=0$. Случай $\varphi(0) \geqslant 1$ невозможен, поскольку равенство $H(1)=1$ влечет тождество $\varphi \equiv 1$ на $[0,1)$, что в свою очередь означает, что $\varphi \equiv 1$, так как функция φ не возрастает и вогнута. Это противоречит соотношению $H(x)/x \to \infty$ при $x \to \infty$. Следовательно, $\varphi(0)=0$.

Определим функцию $\varepsilon(x)$ равенством

$$\varepsilon(x) = \frac{H(x)}{x\ln^t x}.$$

Поскольку $\varepsilon(x) \to 0$ при $x \to \infty$ и функция $\varepsilon(x)$ непрерывна, найдется последовательность $x_i \nearrow \infty$ такая, что $\varepsilon(x_i) = \inf_{x \leqslant x_i} \varepsilon(x)$ и $\varepsilon(x_i) \searrow 0$ при $i \to \infty$. Мы знаем, что $H(x) \leqslant H(x^2)H(1/x)$. Отсюда при помощи неравенства $\varepsilon(x_i^2) \leqslant \varepsilon(x_i)$ нетрудно вывести, что

$$1 \leqslant 2x_i H(1/x_i).$$

Правая часть этого соотношения стремится к $\varphi(0)=0$ при $i \to \infty$. Полученное противоречие доказывает (9).

Теперь мы сформулируем одно утверждение из работы В.А. Ватутина и В.А. Топчия [18]. Для удобства мы всюду считаем, что функция H доопределена по симметрии для отрицательных значений аргумента.

Теорема 1. *Пусть H — слабо выпуклая функция, а $\{M_n, \mathscr{F}_n\}$, $n \geqslant 0$, — мартингал. Тогда*

$$\mathbf{E}H(M_n) \leqslant 4\sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}H(M_k - M_{k-1}) + 4\mathbf{E}H(M_0). \tag{10}$$

Используя эту теорему и стандартные мартингальные рассуждения, можно установить справедливость следующих утверждений.

Следствие 1. *Пусть H — слабо выпуклая функция, а $\{M_n, \mathscr{F}_n\}$, $n \geqslant 0$, — мартингал. Если*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E} H(M_k - M_{k-1}) < \infty,$$

то

(1) $\sup\limits_n \mathsf{E} H(M_n) < \infty$;

(2) *M_n сходится почти всюду к некоторой случайной величине M_∞;*

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{E} H(M_n) = \sup\limits_n \mathsf{E} H(M_n) \geqslant \mathsf{E} H(M_\infty)$.

Теорема 2. *Пусть H — функция Орлича, удовлетворяющая условию*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{H(x)}{x} = \infty,$$

и пусть $\{M_n, \mathscr{F}_n\}, n \geqslant 1$, — мартингал с $\sup_n \mathsf{E} H(M_n) < \infty$. Тогда

(1) *последовательность $(M_n)_n$ равномерно интегрируема;*

(2) *M_n сходится почти всюду и в L_1 к некоторой случайной величине M_∞;*

(3) $\sup\limits_n \mathsf{E} M_n = \mathsf{E} M_\infty$;

(4) $\mathsf{E}(M_\infty \mid \mathscr{F}_n) = M_n$ *п.н.;*

(5) *последовательность $(H(M_n))_n$ равномерно интегрируема;*

(6) *$H(M_n)$ сходится почти всюду и в L_1 к $H(M_\infty)$;*

(7) $\sup\limits_n \mathsf{E} H(M_n) = \mathsf{E} H(M_\infty) < \infty$;

(8) $\mathsf{E} H(M_n - M_\infty) \to 0$.

Доказательство следствия 1. Теорема 1 влечет оценки

$$\sup_n \mathsf{E} H(M_n) < 4\mathsf{E} H(M_0) + 4\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E} H(M_k - M_{k-1}) < \infty.$$

Поскольку $H(x)/|x| \geqslant k > 0$ для некоторого $k > 0$ и всех $|x| \geqslant 1$, то

$$\mathsf{E}|M_n| \leqslant \int_{|M_n|\leqslant 1} |M_n|\, d\mathsf{P} + \int_{|M_n|\geqslant 1} |M_n|\, d\mathsf{P} \leqslant 1 + \frac{1}{k}\mathsf{E} H(M_n).$$

Правая часть этого соотношения равномерно ограничена по n. Теорема Дуба [21, стр. 542] обеспечивает сходимость п.в. Лемма Фату [21, стр. 201] влечет третье утверждение.

Доказательство теоремы 2. Для доказательства первого утверждения заметим, что

$$\begin{aligned}\sup_n \int_{|M_n|>c} |M_n| d\mathbf{P} &\leqslant \sup_n \int_{|M_n|>c} \frac{|M_n|}{H(M_n)} H(M_n) d\mathbf{P} \\ &\leqslant \inf_{|y|\geqslant c} \frac{|y|}{H(y)} \sup_n \int_{|M_n|>c} H(M_n) d\mathbf{P} \\ &\leqslant \inf_{|y|\geqslant c} \frac{|y|}{H(y)} \sup_n \mathbf{E} H(M_n).\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что правая часть стремится к нулю при $n \to \infty$. Теорема Дуба обеспечивает сходимость почти всюду. Сходимость в L_1 является следствием равномерной интегрируемости (и в действительности эквивалентна ей). Точно так же пункты 2, 3 и 4 являются следствиями (и даже эквивалентны) равномерной интегрируемости.

Сходимость почти наверное последовательности $H(M_n)$ вытекает из непрерывности $H(x)$.

Перейдем к доказательству сходимости $\mathbf{E}H(M_n)$ к $\mathbf{E}H(M_\infty)$. Любая функция Орлича имеет представление Шоке в виде

$$H(x) = \int_0^x \varphi(y)\, dy = \int_0^\infty (x-y)^+ \mu(dy),$$

где μ — некоторая мера. Нестрого говоря, $\mu(dy) = \varphi'(y)\, dy$. Здесь символ a^+ используется для обозначения положительной части a. Функции $x \to (x-y)^+$ являются (экстремальными) выпуклыми функциями для каждого $y \in [0, \infty)$.

Ниже мы используем то, что $(|M_n| - y)^+$ является субмартингалом, последовательность $\mathbf{E}(|M_n| - y)^+$ возрастает по n, а также опираемся на теорему о монотонной сходимости:

$$\begin{aligned}\lim_n \mathbf{E} H(M_n) &= \lim_n \mathbf{E} \int_0^\infty (|M_n| - y)^+ \mu(dy) \\ &= \lim_n \int_0^\infty \mathbf{E}(|M_n| - y)^+ \mu(dy) \\ &= \int_0^\infty \lim_n \mathbf{E}(|M_n| - y)^+ \mu(dy) \\ &= \int_0^\infty \mathbf{E}(|M_\infty| - y)^+ \mu(dy) = \mathbf{E} H(M_\infty).\end{aligned}$$

Сходимость последовательности $(H(M_n))_n$ почти наверное и сходимость первых моментов влекут равномерную интегрируемость рассматриваемой последовательности.

3.1. Сходимость последовательности W_n к W_∞

Мы применим только что доказанную теорему к исследованию одного класса неоднородных ветвящихся процессов с частицами, имеющими вес. Будем предполагать, что случайные величины $T(v)$, $v \in V$, независимы, но не обязательно одинаково распределены.

Воспользуемся следующими (не совсем согласованными) обозначениями:

$$\begin{aligned}
m(v) &= \mathbf{E}\sum_i T_i(v),\\
m_H(v) &= \sum_i \mathbf{E}H(T_i(v)/m(v)),\\
m_{H,k} &= \sup_{|v|=k} m_H(v),\\
s_H(v) &= \mathbf{E}H\left(\sum_j \frac{T_j(v)}{m(v)} - 1\right),\\
s_{H,k} &= \sup_{|v|=k} s_H(v).
\end{aligned}$$

Теорема 3. *Пусть H является $(w,c)^*$-функцией, случайные величины $T(v)$, $v \in V$, независимы и $m(v) = 1$ для каждого $v \in V$. Если*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c^k s_{H,k} \prod_{i=0}^{k-1} m_{H,i} < \infty, \tag{11}$$

то

$$\sup_n \mathbf{E}H(W_n) < \infty. \tag{12}$$

Замечание 2. Если, в дополнение к условиям теоремы 3, потребовать от функции H несколько больше, а именно, что $H(x)/x \to \infty$ при $x \to \infty$, то теорема 2 применима к мартингалу W_n и, в частности, для этого мартингала справедливы все следствия из указанной теоремы.

Доказательство теоремы 3. Заметим, что $W_0 = 1$, и положим

$$X_k = W_k - W_{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Тогда

$$W_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

В силу теоремы 1

$$\mathbf{E}H(W_n) = \mathbf{E}H\left(1 + \sum_{k=1}^{n} X_k\right) \leqslant 4H(1) + 4\sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}H(X_k). \tag{13}$$

Используя независимость случайных величин $T(v)$ и слабую выпуклость H, получаем, что

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}H(X_k) &= \mathbf{E}H\left(\sum_{|v|=k-1} L(v)\left(\sum_j T_j(v)-1\right)\right)\\
&= \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(H\left(\sum_{|v|=k-1} L(v)\left(\sum_j T_j(v)-1\right)\right) \mid \mathscr{F}_{k-1}\right)\right)\\
&\leqslant 4\sum_{|v|=k-1}\mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(H(L(v)\left(\sum_j T_j(v)-1\right) \mid \mathscr{F}_{k-1}\right)\right)\\
&\leqslant 4c\sum_{|v|=k-1}\mathbf{E}H(L(v))\mathbf{E}H\left(\sum_{j^*} T_j(v)-1\right)\\
&= 4cs_{H,k-1}\sum_{|v|=k-1}\mathbf{E}H(L(v)).
\end{aligned}$$

Цепочка соотношений

$$\begin{aligned}
\sum_{|v|=k-1}\mathbf{E}H(L(v)) &= \sum_{|v|=k-2}\sum_j \mathbf{E}H(L(v)T_j(v))\\
&\leqslant c\sum_{|v|=k-2}\sum_j \mathbf{E}H(L(v))\mathbf{E}H(T_j(v))\\
&= cm_{H,k-2}\sum_{|v|=k-2}\mathbf{E}H(L(v)) \leqslant \ldots \leqslant c^{k-1}\prod_{i=0}^{k-2} m_{H,i}
\end{aligned}$$

позволяет нам заключить, что

$$\mathbf{E}H(X_k) \leqslant 4c^k s_{H,k-1}\prod_{i=0}^{k-2} m_{K,i} \tag{14}$$

при $k \geqslant 1$. Объединение этих оценок доказывает требуемое утверждение.

Замечание 3. Условия теоремы 3 инвариантны относительно умножения H на произвольную положительную константу d, то есть, если условие (11) верно для функции H, то оно справедливо и для $\overline{H} = dH$. Действительно, непосредственные вычисления показывают, что

$$\overline{H}(xy) \leqslant \frac{c}{d}\overline{H}(x)\overline{H}(y)$$

и, следовательно, $\overline{H}(x)$ является $(w, c/d, \infty)^*$-функцией, причем

$$\overline{m}_{H,k} = dm_{H,k}, \qquad s_{H,k} = d\overline{s}_{H,k}.$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty} c^k s_{H,k}\prod_{i=0}^{k-1} m_{H,i} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{c}{d}\right)^k \overline{s}_{H,k}\prod_{i=0}^{k-1}\overline{m}_{H,i}.$$

Особый интерес представляет случай $d = c$.

Следствие 2. *Пусть H является $(w,1)^*$-функцией, и пусть $T(v)$, $v \in V$, — набор независимых одинаково распределенных случайных величин. Если $m = 1$, $m_H(v) < 1$ и $s_H(v) < \infty$, то*

$$\sup_n \mathbf{E} H(W_n) < \infty. \tag{15}$$

Следствие 3. *Пусть H является $(w,1,\infty)^*$-функцией. Предположим, что $T(v)$, $v \in V$, — набор независимых одинаково распределенных случайных величин. Если $m = 1$, $m_H(v) < 1$ и $s_H(v) < \infty$, то*

(1) *последовательность $(W_n)_n$ равномерно интегрируема;*

(2) *W_n при $n \to \infty$ сходится почти наверное и в L_1 к некоторой случайной величине W_∞;*

(3) $\sup_n \mathbf{E} W_n = \mathbf{E} W_\infty$;

(4) $\mathbf{E}(W_\infty \mid \mathscr{F}_n) = W_n$ *п.н.;*

(5) *последовательность $(H(W_n))_n$ равномерно интегрируема;*

(6) *$H(W_n)$ сходится почти наверное и в L_1 к $H(W_\infty)$;*

(7) $\sup_n \mathbf{E} H(W_n) = \mathbf{E} H(W_\infty) < \infty$;

(8) *$W_n \to W_\infty$ при $n \to \infty$ в метрике Орлича d_H.*

Пример 1. Функция $x \to H_p(x) = |x|^p$ является слабо выпуклой при $1 \leqslant p \leqslant 2$. Пусть $T(v)$, $v \in V$, — набор положительных независимых одинаково распределенных случайных величин,

$$m = \sum_j T_j, \quad \mathbf{E} \sum_j T_j^p < m^p, \quad \mathbf{E} \left(\sum_j T_j \right)^p < \infty.$$

Тогда последовательность $W_n = Z_n/m^n$ является равномерно интегрируемым мартингалом для $1 < p \leqslant 2$.

Пример 2. Для надкритического ($m > 1$) процесса Гальтона–Ватсона отношение $W_n = Z_n/m^n$ является p-равномерно интегрируемым мартингалом для $1 < p \leqslant 2$.

3.2. Условие на $X \ln X$

Важнейшими слабо выпуклыми функциями, представляющими интерес, являются функции $H(x) = |x|^p$, $1 < p \leqslant 2$. Начиная с этого момента и до конца статьи, мы будем рассматривать однородные ветвящиеся процессы с частицами, имеющими независимые одинаково распределенные положительные веса $T(v)$, $v \in V$.

Основное отличие от процессов, рассматривавшихся в предыдущем разделе, состоит в том, что мы не предполагаем выполнения условий $\mathbf{E} H(Z_1) < \infty$ и $s_H < \infty$.

Пусть

$$X(v) = \sum_i T_i(v).$$

В дальнейшем мы опускаем символ v везде, где это возможно.

Теорема 4. *Пусть H является $(w,1,\infty)^*$-функцией, $H(1)=1$, и пусть $T(v)$, $v \in V$, — набор положительных независимых одинаково распределенных случайных величин таких, что*

$$0 < \sum_j \mathsf{E} H(T_j(v)/m) < 1.$$

Тогда из соотношения $\mathsf{E}X\ln^+ X < \infty$ следует, что $\sup_n \mathsf{E}W_n < \infty$. Более того,

(1) *последовательность W_n, $n \in \mathbf{N}$, равномерно интегрируема;*

(2) *$W_n \to W_\infty$ почти всюду и в L_1;*

(3) *$\mathsf{E}(W_\infty) = 1$;*

(4) *$W_n = \mathsf{E}(W_\infty \mid \mathscr{F}_n)$ п.н.;*

(5) *$\mathsf{P}(W_\infty \neq 0) > 0$.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $m=1$. В противном случае можно рассмотреть ветвящийся процесс с весовыми множителями $T(v)/m$. Условия теоремы при этом не изменятся, а выводы из нее будут иметь желаемый вид.

Для положительных чисел A и K рассмотрим урезанные случайные величины

$$\tilde{T}(v) = T(v)\mathbf{1}_{X(v)\leqslant AK^{|v|}}.$$

Построим теперь вспомогательный неоднородный ветвящийся процесс с частицами, веса которых задаются при помощи весовых множителей $\tilde{T}(v)$ (далее мы снабжаем символом тильда соответствующие величины вспомогательного процесса, например, $\tilde{Z}_n, \tilde{W}_n$ и так далее). Мы обозначаем через $\tilde{m}_k$ величину $\mathsf{E}\sum_j \tilde{T}_j(v)$ при $|v|=k$. Для краткости положим

$$C(A) = \lim_{k\to\infty} \prod_{i=0}^{k} \tilde{m}_i.$$

Доказательство теоремы распадается на несколько утверждений, помечаемых символом •.

Пусть $\delta > 0$ таково, что $(1+2\delta)m_H < 1$, а число $K > 1$ удовлетворяет соотношению $H(K)(1+2\delta)m_H < 1$. Последнее возможно, поскольку $H(1)=1$ и функция H непрерывна.

- $\mathsf{E}X\ln^+ X < \infty \iff C(A) > 0.$

В силу предложения 2, доказываемого в конце этого раздела, условие $\mathsf{E}X\ln^+ X < \infty$ эквивалентно соотношению

$$\sum_i (1-\tilde{m}_i) < \infty.$$

Заметим, что $\tilde{m}_i \to m = 1$ при $i \to \infty$. Пусть i_0 — достаточно большое целое такое, что $\tilde{m}_i > 1/2$ при всех $i \geqslant i_0$.

Используя неравенство $-x/(1-x) \leqslant \ln(1-x) \leqslant -x$, справедливое для $0 \leqslant x < 1/2$, находим, что

$$\begin{aligned}
-2\sum_{i\geqslant i_0}(1-\tilde{m}_i) &\leqslant -\sum_{i\geqslant i_0}\frac{(1-\tilde{m}_i)}{\tilde{m}_i} \\
&\leqslant \sum_{i\geqslant i_0}\ln(1-(1-\tilde{m}_i)) \\
&= \ln\prod_{i\geqslant i_0}\tilde{m}_i - \sum_{i\geqslant i_0}(1-\tilde{m}_i).
\end{aligned}$$

Отсюда вытекает желаемое утверждение.

- Если $C(A) > 0$ для некоторого $A > 1$, то

$$\lim_{A\to\infty} C(A) = 1.$$

Заметим, что $\tilde{m}_i$, как функция A, монотонно возрастает по A и стремится к 1. Отсюда в силу монотонной сходимости следует необходимое соотношение.

Для $v \in V$ и $|v| = i$ положим

$$\tilde{m}_{H,i} = \sum_j \mathbf{E}H(\tilde{T}_j(v)/\tilde{m}_i).$$

- Для любого $\delta > 0$ существует $i_1 = i_1(\delta) \geqslant i_0$ такое, что

$$\tilde{m}_{H,i} \leqslant (1+\delta)m_H$$

 для всех $i \geqslant i_1$.

Заметим, что в силу непрерывности функции $H(x)$ для любого $\delta > 0$ можно найти $\varepsilon > 0$ и $i_2 = i_2(\varepsilon) \geqslant i_1$ такие, что $\tilde{m}_i^{-1} < 1+\varepsilon$ для всех $i \geqslant i_2$ и $H(1+\varepsilon) \leqslant 1+\delta$ (последнее в силу неравенства $H(xy) \leqslant H(x)H(y)$ и условия $H(1) = 1$).

Для фиксированного $v \in V$ с $|v| = i \geqslant i_2$

$$\begin{aligned}
\tilde{m}_{H,i} &= \sum_j \mathbf{E}H(\tilde{T}_j(v)/\tilde{m}_i) \\
&\leqslant H(1+\varepsilon)\sum_j \mathbf{E}H(\tilde{T}_j(v)) \leqslant (1+\delta)m_H.
\end{aligned}$$

- Существует $i_3 \geqslant i_2$ такое, что при $i \geqslant i_3$

$$\tilde{s}_{H,i} \leqslant H(A(1+\varepsilon))(m_H(1+2\delta))^{-i} + 1.$$

Пусть теперь $i_3 \geqslant i_2$ таково, что $AK^i > 2$ при $i \geqslant i_3$. Используя монотонность $H(x)$ для положительных x и те же рассуждения, что и ранее ($\tilde{m}_i^{-1} < 1+\varepsilon$ для всех $i \geqslant i_3$), заключаем, что для достаточно больших i и $v \in V$, $|v| = i$,

$$\begin{aligned}
\tilde{s}_{H,i} &= \mathbf{E}H\left(\sum_j \frac{\tilde{T}_j(v)}{\tilde{m}_i} - 1\right) \\
&\leqslant \mathbf{P}(X(v) \leqslant AK^i)H(AK^i/\tilde{m}_i - 1) + \mathbf{P}(X(v) > AK^i)H(-1) \\
&\leqslant H(AK^i/\tilde{m}_i - 1) + H(1) \leqslant H(AK^i/\tilde{m}_i) + H(1) \\
&\leqslant H(A(1+\varepsilon))H^i(K) + H(1) \leqslant H(A(1+\varepsilon))(m_H(1+2\delta))^{-i} + 1,
\end{aligned}$$

в силу выбора K. Вспоминая ограничения на K, убеждаемся в справедливости доказываемого утверждения.

- $\sup_n \mathsf{E}H(\tilde{W}_n) < \infty$.

Используя те же оценки, что и в теореме 3, заключаем, что

$$\sup_n \mathsf{E}H(\tilde{W}_n) \leqslant 4H(1) + 4\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{s}_{H,k} \prod_{i=0}^{k-1} \tilde{m}_{H,i}. \tag{16}$$

Оценим сумму в (16) по множеству $k \geqslant i_0$. Ясно, что найдется такая константа c, для которой

$$\sum_{k \geqslant i_0}^{\infty} \tilde{s}_{H,k} \prod_{i=0}^{k-1} \tilde{m}_{H,i} \leqslant cH(A) \sum_{k \geqslant i_0}^{\infty} m_H^{-k} m_H^k \left(\frac{1+\delta}{1+2\delta}\right)^k < \infty,$$

что доказывает необходимое соотношение.

- Последовательность $\tilde{W}_n$ является равномерно интегрируемым мартингалом.

Это утверждение является непосредственным следствием предыдущего утверждения и леммы 2.

- Если $\mathsf{E}X \ln^+ X < \infty$, то $\mathsf{E}W_\infty = 1$.

В силу построения $\tilde{Z}_n \leqslant Z_n$. Следовательно,

$$\tilde{W}_n \leqslant \left(\prod_{i=0}^{n-1} \tilde{m}_i\right)^{-1} W_n.$$

Поскольку $\tilde{W}_n$ и W_n являются мартингалами, сходящимися почти наверное, то

$$\tilde{W}_\infty \leqslant C^{-1}(A) W_\infty$$

почти наверное. Взяв математические ожидания от обеих частей, получим, что

$$1 = \mathsf{E}\tilde{W}_\infty \leqslant C^{-1}(A)\mathsf{E}W_\infty.$$

Поскольку $C(A)$ стремится к 1 при $A \to \infty$, то $1 \leqslant \mathsf{E}W_\infty$. Неравенство в противоположную сторону вытекает из леммы Фату:

$$\mathsf{E}W_\infty \leqslant \liminf_n \mathsf{E}W_n = 1.$$

Следствие 4. *Пусть $T(v)$, $v \in V$, — набор положительных независимых одинаково распределенных случайных величин, $m = 1$,*

$$\mathsf{E}\sum_j \frac{T_j}{m} \ln \frac{T_j}{m} < 0$$

и

$$\mathsf{E}\sum_j \left(\frac{T_j}{m}\right)^\alpha < \infty$$

для некоторого $\alpha > 1$. Тогда из условия $\mathsf{E}X \ln^+ X < \infty$ следует, что $\sup_n \mathsf{E}W_n < \infty$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\alpha \to \beta(\alpha) = \mathbf{E}\sum_j (T_j/m)^\alpha.$$

Функция β выпукла по α, так как каждая функция $\alpha \to (T_j/m)^\alpha(\omega)$ выпукла. Ее производная равна

$$\mathbf{E}\sum_j (T_j/m)^\alpha \ln T_j.$$

Если в точке $\alpha = 1$ производная отрицательна, то найдется α_0, $2 \geqslant \alpha_0 > 1$, для которого $\beta(\alpha_0) < 1$. Применяя теорему 4 к функции $H(x) = |x|^{\alpha_0}$, получаем желаемое утверждение.

Замечание 4. Правая производная

$$\mathbf{E}\sum_j \frac{T_j}{m} \ln \frac{T_j}{m}$$

(функции β при $\alpha = 1$) может быть равна $-\infty$.

Для полноты приведем доказательство следующего известного результата.

Предложение 2. *Для любой положительной случайной величины Y и любых $A > 0$, $K > 1$,*

$$\sum_n \mathbf{E}(Y\mathbf{1}_{Y>AK^n}) < \infty \iff \mathbf{E}Y \ln^+ Y < \infty.$$

Доказательство. Ясно, что

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}(Y\mathbf{1}_{Y>AK^n}) &= \sum_n \sum_{i \geqslant n} \mathbf{E}(Y\mathbf{1}_{AK^i<Y\leqslant AK^{i+1}}) \\ &= \sum_i \mathbf{E}(iY\mathbf{1}_{AK^i<Y\leqslant AK^{i+1}}).\end{aligned}$$

Оценим эту величину с двух сторон, обозначая через c константы, которые могут меняться от строки к строке:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}(Y\mathbf{1}_{Y>AK^n}) &\leqslant c\sum_i \mathbf{E}(Y(\ln^+ Y/A)\mathbf{1}_{AK^i<Y\leqslant AK^{i+1}}) \\ &\leqslant c\mathbf{E}(Y\ln^+ Y) + c. \\ \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}(Y\mathbf{1}_{Y>AK^n}) &\geqslant c\sum_i \mathbf{E}(Y(\ln^+ Y/A)\mathbf{1}_{AK^i<Y\leqslant AK^{i+1}}) + c \\ &\geqslant c\mathbf{E}(Y\ln^+ Y) + c.\end{aligned}$$

Список литературы

1. Athreya K.B., Ney P., *Branching Processes.* Springer, New York, 1972.
2. Asmussen S., Hering H., *Branching Processes.* Birkhäuser, Boston, 1983.
3. Biggins J.D., Martingale convergence in the branching random walk. *J. Appl. Probab.* (1997) **14**, №1, 25–37.
4. Biggins J.D., Kyprianou A.E., Seneta–Heyde norming in the branching random walk. *Ann. Probab.* (1977) **25**, №1, 337–360.
5. Blackwell D, Dubins L.E., A converse to the dominated convergence theorem. *Illinois J. Math.* (1963) **7**, 508–514.
6. Cramer M., Rüschendorf L., Convergence of a branching type recursion. *Annales de l'Institut Henri Poincaré. Probabilités et Statistiques* (1996) **32**, 725–741.
7. Davies L., A theorem of Deny with applications to characterization problems. *Lect. Notes Math.* (1981) **861**, 35–41.
8. Davies L., Shimizu R., On identically distributed linear statistics. *Ann. Inst. Statist. Math.* (1976) **28**, 469–489.
9. Дуб Дж.Л., *Вероятностные процессы.* ИЛ, Москва, 1956.
10. Durrett R., Liggett M., Fixed points of the smoothing transformation. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* (1983) **64**, 275–301.
11. Lindenstrauss J., Tzafriri L., *Classical Banach Spaces.* V. 1–2, Springer, Berlin, 1977–79.
12. Liu Q., Sur une équation fonctionnelle et ses applications: une extension du théorème de Kesten–Stigum concernant des processus de branchement. *Adv. Appl. Probab.* (1977) **29**, 353–373.
13. Lyons R., A simple path to Biggins' martingale convergence. *Classical and Modern Branching Processes.* Springer, Berlin, 1996, 217–222.
14. Rösler U., A fixed point theorem for distributions. *Stoch. Proc. and their Appl.* (1992) **42**, 195–214.
15. Rösler U., The weighted branching process. In: *Dynamics of complex and irregular systems. Bielefeld Encounters in Math. and Physics*, World Science Publishing, River Edge, 1993, pp. 154–165.
16. Rösler U., A fixed point equation for distributions. In: *Berichtsreihe des Mathematischen Seminars Kiel* (1998) **98–7**.
17. Shimizu R., Solutions to a functional equation and its applications to some characterization problems. *Shankhya, Ser. A* (1978) **40**, 319–332.
18. Ватутин В.А., Топчий В.А., Максимум критических процессов Гальтона–Ватсона и непрерывные слева случайные блуждания. *Теория вероятностей и ее применения* (1997) **42**, 21–34.
19. Красносельский М.А., Рутский Я.Б., *Выпуклые функции и пространства Орлича.* Физматгиз, Москва, 1958.
20. Мейер П.А., *Вероятность и потенциалы.* Мир, Москва, 1973.
21. Ширяев А.Н., *Вероятность.* Наука, Москва, 1989.
22. Фихтенгольц Г.М., *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* Гостехиздат, Москва, 1948.

Статья поступила 05.01.2000.