Н. В. Проскурин, О кубической L-функции, *Алгебра и анализ*, 2012, том 24, выпуск 2, 230–256

Алгебра и анализ
Том 24 (2012), №2

О КУБИЧЕСКОЙ L-ФУНКЦИИ

© Н. В. ПРОСКУРИН

Кубическая L-функция связана посредством преобразования Меллина с кубической тета-функцией Куботы–Паттерсона. Для кубической L-функции имеется функциональное уравнение типа уравнения Римана (с двумя гамма-множителями), но нет разложения в эйлеровское произведение. В работе исследована кубическая L-функция и рассмотрена проблема распределения вещественных частей ее нулей. Сформулированы гипотезы, основанные на вычислениях.

Введение

Кубическая тэта-функция Куботы–Паттерсона $\Theta_{K\text{-}P}$ определена на гиперболическом пространстве $\mathbb{H} = \{(z, v) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid v > 0\}$ и принимает значения в комплексном поле $\mathbb{C}$. Имеется разложение Фурье —

$$\Theta_{K\text{-}P}(z, v) = v^{2/3} + (6\pi v)^{2/3} \sum_{\nu} \tilde{\tau}(\nu)\, Ai\big((6\pi|\nu|v)^{2/3}\big)\, e(\nu z), \tag{1}$$

в котором Ai — функция Эйри и $e(q) = \exp\big(2\pi i(q + \bar{q})\big)$ для $q \in \mathbb{C}$. Для коэффициентов имеются формулы Паттерсона (15), выражающие $\tilde{\tau}(\nu)$ через кубические суммы Гаусса. Пусть $\omega = \exp(2\pi i/3) = (-1 + \sqrt{-3}\,)/2$. Суммирование в (1) распространяется на все ν вида $(\sqrt{-3})^{-3} l$ с $l \in \mathbb{Z}[\omega]$, $l \neq 0$. Здесь $\mathbb{Z}[\omega] = \{a + b\omega \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ — кольцо целых чисел поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}\,)$. Функция $\Theta_{K\text{-}P}$ открыта Куботой [1], см. также [2] и [3]. Она является автоморфной функцией весьма специального типа — кубической метаплектической формой. Это означает, в частности, что для $\Theta_{K\text{-}P}$ имеются некоторые формулы преобразования. Одна из них —

$$\Theta_{K\text{-}P}(0, v) = \Theta_{K\text{-}P}(0, v^{-1}) \quad \text{для всех} \quad v \in \mathbb{R},\ \ v > 0. \tag{2}$$

Положим

$$L(\tau; s) = \sum_{\nu} \frac{\tau(\nu)}{\|\nu\|^s}, \quad s \in \mathbb{C},\ \ \mathrm{Re}\, s > 1, \tag{3}$$

Ключевые слова: кубическая L-функция, распределение нулей.
Работа поддержана грантом РФФИ №11-01-00239-а.

где суммирование распространяется на те же ν, что и в (1),

$$\tau(\nu) = \tilde{\tau}(\nu)\|\nu\|^{1/6} \tag{4}$$

и $\|\cdot\|\colon \mathbb{Q}(\sqrt{-3}\,) \to \mathbb{Q}$ — норменное отображение, $\|z\| = z\bar{z}$ для всех $z \in \mathbb{Q}(\sqrt{-3}\,)$. Ряд (3) абсолютно сходится и определяет аналитическую функцию в области $\operatorname{Re} s > 1$. Функция $L(\tau;\cdot)$ связана с $\Theta_{K\text{-}P}$ посредством преобразования Меллина. Как мы увидим, она продолжается мероморфно на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$ и удовлетворяет функциональному уравнению типа уравнения Римана, связывающему ее значения в точках s и $1-s$. Именно, мы покажем, что функция

$$s \mapsto (2\pi)^{-2s}\,\Gamma(s-1/6)\,\Gamma(s+1/6)\,L(\tau;s) \tag{5}$$

инвариантна относительно замены s на $1-s$. Мы называем $L(\tau;\cdot)$ кубической L-функцией. Нас интересует распределение нулей функции $L(\tau;\cdot)$ и в особенности распределение их вещественных частей на вещественной прямой $\mathbb{R}$. Функция τ не мультипликативна, поэтому $L(\tau;\cdot)$ не раскладывается в эйлеровское произведение, и было бы слишком оптимистичным ожидать, что все нетривиальные нули[1] лежат на критической прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$. Заметим, что нетривиальные нули функции $L(\tau;\cdot)$ расположены на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ симметрично относительно вещественной прямой $\mathbb{R}$ и относительно критической прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$. Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением нулей, лежащих на полупрямой

$$\operatorname{Re} s = 1/2, \quad \operatorname{Im} s \geqslant 0 \tag{6}$$

и нулей, лежащих в квадранте

$$\operatorname{Re} s > 1/2, \quad \operatorname{Im} s \geqslant 0. \tag{7}$$

Наши вычисления показывают, что в пределах $\operatorname{Im} s \leqslant 9002$ имеется 27914 нулей на полупрямой (6) и 8724 нуля в квадранте (7). Списки нулей можно найти на сайте `http://www.pdmi.ras.ru/~ np`. Все вычисленные нули — простые. Нули функции $L(\tau;\cdot)$, лежащие в квадранте (7), занумеруем в порядке возрастания мнимой части — $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots$ Ниже, на рисунке, изображена гистограмма распределение точек $\sigma_n = \operatorname{Re} \rho_n$. Мы сформулируем в §1 несколько гипотез, основанных на вычислительных данных. Основные свойства кубической L-функции сформулированы и доказаны в §3. Все то, что удается доказать о ее нулях, представлено в §4. В §2 собраны для удобства необходимые предварительные сведения, хорошо известные. Мы совершенно не касаемся здесь методов вычисления значений и нулей L-функций; об этом см. [4–7].

[1]То есть все нули, исключая тривиальные, см. теорему 1 в §3.

Имеется обширная литература, посвященная проблеме распределения нулей L-функций с эйлеровскими произведениями. Во всех известных случаях, в соответствии с общей гипотезой Римана, нули обнаруживаются только на критических прямых. В связи с гипотезами Монтгомери [8] и их обобщениями, активно исследуются статистические аспекты проблемы распределения нулей на критических прямых, т. е. распределения мнимых частей нулей. С другой стороны, проблема распределения вещественных частей нулей L-функций, не имеющих эйлеровских произведений, остается не исследованной. Было бы очень интересно рассмотреть, помимо кубической, другие L-функции и выяснить, в какой степени обнаруженные нами явления типичны или уникальны.[2]

§1. О распределении нулей

В этом параграфе собраны наши гипотезы о нулях функции $L(\tau;\cdot)$. Формулировки выделены курсивом и снабжены краткими комментариями.

(I) *Все нетривиальные нули функции* $L(\tau;\cdot)$ *простые и находятся в критической полосе, т.е. в полосе* $\{s \in \mathbb{C} \mid 0 \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant 1\}$.

В §4 мы докажем, что для каждого нетривиального нуля ρ функции $L(\tau;\cdot)$ имеют место неравенства $-0.2 < \operatorname{Re}\rho < 1.2$ и приведем некоторые дополнительные аргументы в пользу нашей гипотезы. За единственным исключением, в пределах наших вычислений, вещественные части нулей < 0.98. Вещественная часть исключительного нуля равна $0.9948596\ldots$, его мнимая часть равна $147.1889196\ldots$

Для вещественных σ и T определим $N(\sigma, T)$ как число нулей[3] ρ функции $L(\tau;\cdot)$ под условиями $\operatorname{Re}\rho \geqslant \sigma$ и $0 < \operatorname{Im}\rho < T$.

(II) *Определим* q *как наименьшее вещественное число под условием*

$$N(\sigma,T) \ll T \quad \text{при} \quad T \to \infty \tag{8}$$

для каждого вещественного числа $\sigma > q$ *(постоянная в символе* $\ll$ *зависит только от* σ*). Тогда* $q = 7/12$.

Эта гипотеза хорошо согласуется с вычислениями $N(\sigma,T)$ и с вычислениями средних значений функций $t \mapsto |L(\tau;\sigma+it)|^2$. Однако доказать мы можем только неравенство $q \leqslant 3/4$, см. теоремы 10 и 11 в §4. Число q является, по-видимому, также точной нижней гранью множества

[2] Можно рассмотреть, например, дзета-функции Эпштейна квадратичных форм. Работы Зигеля [9] и Фоменко [10] доставляют теоретическую основу. С вычислительной точки зрения дзета-функции Эпштейна существенно проще кубической L-функции.

[3] С учетом кратностей, если не все нули простые. Это замечание относится также и к определяемым ниже $N(T)$, $P(T)$, $P_I(T)$.

всех вещественных чисел σ таких, что

$$\int_1^T |L(\tau;\sigma+it)|^2\,dt \ll T \quad \text{при} \quad T\to\infty.$$

Пусть $J=(1/2,7/12\,]$ — полуоткрытый интервал в $\mathbb{R}$, состоящий из чисел x, удовлетворяющих неравенствам $1/2<x\leqslant 7/12$, и пусть $J'=(7/12,\infty)$ — открытый интервал в $\mathbb{R}$, состоящий из чисел $x>7/12$. Для вещественного $T>0$ рассмотрим нули ρ функции $L(\tau;\cdot)$ под условием $0<\operatorname{Im}\rho<T$. Пусть $N(T)$ — число всех таких нулей ρ,

$$P(T) \text{ — число нулей } \rho \text{ с } \operatorname{Re}\rho=1/2,\ \ 0<\operatorname{Im}\rho<T,$$
$$P_I(T) \text{ — число нулей } \rho \text{ с } \operatorname{Re}\rho\in I,\ \ 0<\operatorname{Im}\rho<T;$$

здесь I — произвольный интервал в $\mathbb{R}$. Очевидно,

$$N(T)=P(T)+2P_J(T)+2P_{J'}(T).$$

Мы имеем также $N(T)\sim(2/\pi)\,T\log T$ при $T\to\infty$, см. теорему 9 в §4.

(III) *С некоторыми вещественными числами* $\delta,\gamma,\gamma'>0$ *имеем*

$$P(T)\sim\delta T\log T,\quad P_J(T)\sim\gamma T\log T,\quad P_{J'}(T)\sim\gamma' T\log T$$

при $T\to\infty$. *При этом* $\delta+2\gamma+2\gamma'=2/\pi$.

Рассмотрим теперь более детально распределение вещественных частей нулей функции $L(\tau;\cdot)$ в интервалах J и J'.

(IV) *Пусть* I — *интервал* $\subset J=(1/2,7/12\,]$. *При* $T\to\infty$ *имеем*

$$P_I(T)\sim\Bigl(\int_I f(x)\,dx\Bigr)P_J(T)$$

с

$$f(x)=2^5 3^4(x-1/2)(2/3-x).$$

Эта гипотеза хорошо согласуется с вычислениями. Можно определить вероятностную меру ι на множестве всех интервалов $I\subset J$, положив

$$\iota(I)=\lim_{T\to\infty}P_I(T)/P_J(T),$$

и интерпретировать f как плотность меры ι относительно меры Лебега. Поясним происхождение функции f. Функция f возрастает на J и обращается в нуль в точке $1/2$, а ее производная f' обращается в нуль в точке $7/12$. Наши вычисления показывают, что этими свойствами должна обладать любая функция, которая может, гипотетически, быть плотностью меры ι. Добавим естественное условие нормировки —

$$\int_J f(x)\,dx = 1.$$

Наша функция f — единственный квадратичный полином, обладаюший всеми перечисленными свойствами.

(V) *Пусть* I — *открытый интервал* $\subset J' = (7/12, \infty)$, *скажем* $I = (\alpha, \beta)$. *При* $T \to \infty$ *имеем*

$$P_I(T)/P_{J'}(T) \to 0,$$

если интервал I *отделен от точки* $7/12$, *т.е. если* $\alpha > 7/12$. *В случае же, когда* $I = (7/12, \beta)$ *с некоторым* $\beta > 7/12$, *при* $T \to \infty$ *имеем*

$$P_I(T) \sim P_{J'}(T).$$

Эта гипотеза следует из (II) и (III).

(VI) *Нетривиальные нули функции* $L(\tau;\cdot)$, *лежащие вне критической прямой, сконцентрированы наиболее плотно вблизи двух „полукритических" прямых* $\operatorname{Re} s = 7/12$ *и* $\operatorname{Re} s = 1 - 7/12$. *При этом, однако, собственно на этих двух прямых нулей нет.*

Здесь первое утверждение является следствием (IV), (V) и уравнения (5), а последнее основано непосредственно на вычислениях.

Обратимся еще раз к вопросу о распределение вещественных частей нулей функции $L(\tau;\cdot)$ в интервале $J' = (7/12, \infty)$. Формулировка, данная в гипотезе (V), не вполне удовлетворительна. Находим более содержательную формулировку, рассмотрев отношение $P_I(T)/T$ вместо $P_I(T)/P_{J'}(T)$.

(VII) *Пусть* I — *открытый интервал* $\subset J' = (7/12, \infty)$ *отделенный от точки* $7/12$. *При* $T \to \infty$ *имеем*

$$P_I(T) \sim \Bigl(\int_I g(x)\,dx\Bigr) T,$$

с вещественной непрерывной функцией g *на* J' (*не зависящей от* I *и* T), $g(x) \to \infty$ *при* $x \to 7/12$. *Пусть* q' — *точная нижняя грань множества всех вещественных чисел* σ *таких, что* $N(\sigma, T) = o(T)$ *при* $T \to \infty$. *Функция* g *убывает на интервале* $(7/12, q')$ *и* $g(x) = 0$ *для всех* $x > q'$.

Мы не можем предложить более точную гипотезу. Число q', по-видимому, весьма близко к 1. Наших вычислений, однако, недостаточно для того, чтобы определить q' и поведение функции g вблизи точек q' и $7/12$.

§2. Арифметика поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}\,)$

В кольце $\mathbb{Z}[\omega]$ целых чисел поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}\,) \subset \mathbb{C}$ имеется алгоритм Евклида. Все идеалы кольца $\mathbb{Z}[\omega]$ главные, и каждый отличный от нуля элемент из $\mathbb{Z}[\omega]$ раскладывается в произведение простых элементов единственным, с точностью до умножения на единицы, образом. Единицы кольца $\mathbb{Z}[\omega]$ суть ± 1, $\pm\omega$, $\pm\omega^2$ с $\omega = \exp(2\pi i/3) = (-1+\sqrt{-3}\,)/2$. Можно заметить, что единицы различны по $\bmod 3$ и представляют все классы $\bmod 3$ взаимно простые с 3. Отсюда следует, что каждый отличный от нуля элемент k кольца $\mathbb{Z}[\omega]$ разложим единственным образом в произведение $k = \lambda(\sqrt{-3}\,)^m c$, в котором λ — одна из единиц, $m \in \mathbb{Z}$, $m \geqslant 0$, и $c \in \mathbb{Z}[\omega]$, $c \equiv 1 \pmod 3$.

Известным образом, на $\mathbb{Z}[\omega]$ определяется символ кубического вычета $\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)$. Для $c \equiv 1 \pmod 3$ из $\mathbb{Z}[\omega]$ положим

$$G(c) = \sum_k \left(\frac{k}{c}\right) e(k/c) \tag{9}$$

с суммированием по k из приведенной системы вычетов $\bmod c$ — это кубическая сумма Гаусса с модулем c. Имеем, в частности, $G(1) = 1$. Основные свойства кубических сумм Гаусса:

$$|G(c)|^2 = \begin{cases} \|c\|, & \text{если } c \text{ бесквадратно,} \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases} \tag{10}$$

$$\overline{G(c)} = G(\bar{c}); \tag{11}$$

$$G(c_1c_2) = \left(\frac{c_1}{c_2}\right)\left(\frac{c_2}{c_1}\right) G(c_1)G(c_2), \tag{12}$$

если c_1 и c_2 взаимно просты. В случае, когда c простое число, имеем также

$$G(c)^3 = -c^2\bar{c}. \tag{13}$$

Пусть p — положительное простое число в кольце $\mathbb{Z}$. Если $p \equiv 2 \pmod 3$, то $c = -p$ — простое число $\equiv 1 \pmod 3$ в $\mathbb{Z}[\omega]$, $G(c) = p$ и $\|c\| = p^2$. Если $p \equiv 1 \pmod 3$, то p единственным образом раскладывается в $\mathbb{Z}[\omega]$ в произведение $p = c\bar{c}$ с $c \equiv \bar{c} \equiv 1 \pmod 3$. При этом, числа c и $\bar{c}$ простые, $\|c\| = \|\bar{c}\| = p$ и

$$G(c) + G(\bar{c}) = \sum_{j=0,1,\dots p-1} \cos(2\pi j^3/p). \tag{14}$$

Свойства кубического вычета и кубических сумм Гаусса см. в [11].

Для $\nu \in \mathbb{Q}(\sqrt{-3}\,)$ положим

$$\tilde{\tau}(\nu) = \frac{\overline{G(c)}}{\|c\|^{2/3}} \begin{cases} 3^{-1/3}\left(\dfrac{3}{c}\right), & \text{если } \nu = \pm(\sqrt{-3}\,)^{3n-1}cd^3, \\ 3^{-1/3}\left(\dfrac{3\omega}{c}\right)\xi^{-1}, & \text{если } \nu = \pm\,\omega(\sqrt{-3}\,)^{3n-1}cd^3, \\ 3^{-1/3}\left(\dfrac{3\omega^2}{c}\right)\xi, & \text{если } \nu = \pm\,\omega^2(\sqrt{-3}\,)^{3n-1}cd^3, \\ \quad 1, & \text{если } \nu = \pm(\sqrt{-3}\,)^{3n-3}cd^3, \\ \quad 0 & \text{для всех других } \nu, \end{cases} \tag{15}$$

где $c, d \in \mathbb{Z}[\omega]$, $c \equiv d \equiv 1 \pmod 3$, c бесквадратно, $n \in \mathbb{Z}$ и $\xi = \exp(2\pi i/9)$. Тот факт, что формулы (4) определяют коэффициенты в разложении (1) функции $\Theta_{K\text{-}P}$, был доказан Паттерсоном в [2]. Можно заметить, что $\tilde{\tau}(\nu)$ не зависит от d и n в (4). Нам удобнее работать с функцией τ, связанной с $\tilde{\tau}$ посредством (4). Очевидно, $\tau(1) = 1$. Из (11) и известных свойств символа вычета легко следует

$$\tau(\overline{\nu}) = \overline{\tau(\nu)} \tag{16}$$

для всех $\nu \in \mathbb{Q}(\sqrt{-3}\,)$. Кроме того, имеем

$$\tau(ab) = \left(\frac{a}{b}\right)\tau(a)\tau(b), \tag{17}$$

если $a \in (\sqrt{-3}\,)^{-3}\,\mathbb{Z}[\omega]$, $b \in \mathbb{Z}[\omega]$, $b \equiv \pm 1 \pmod 3$, и a и b не имеют общих простых делителей. Это соотношение выводится из определения (4), известного свойства (12) сумм Гаусса и закона взаимности. Мы видим, что функция τ не мультипликативна, но функция τ^3 мультипликативна.

Дзета-функция Дедекинда $\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3}\,)}$ поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}\,)$ голоморфна всюду на $\mathbb{C}$, исключая точку 1, где она имеет простой полюс. Имеем $\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3}\,)}(-n) = 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 1$. Все другие нули дзета-функции Дедекинда $\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3}\,)}$ не вещественны, лежат в полосе $\{\, s \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} s < 1 \,\}$ и, гипотетически, только на прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$. Функция

$$s \mapsto (2\pi/\sqrt{3}\,)^{-s}\,\Gamma(s)\,\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3}\,)}(s) \tag{18}$$

инвариантна относительно замены s на $1 - s$. Имеет место разложение

$$\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3}\,)}(s) = \zeta(s)\,L(s,\chi), \quad s \in \mathbb{C}, \tag{19}$$

в котором ζ — дзета-функция Римана и $L(\cdot,\chi)$ — классический ряд Дирихле с квадратичным характером $\chi \mod 3$. См. [12]. В некоторых случаях удобнее работать с функцией

$$\zeta_*(s) = \Big(1 - \frac{1}{3^s}\Big)\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}(s), \quad s \in \mathbb{C}, \tag{20}$$

для которой в области $\operatorname{Re} s > 1$ имеем

$$\zeta_*(s) = \sum_m \frac{1}{\|m\|^s}, \quad \frac{\zeta_*(s)}{\zeta_*(2s)} = \sum_n \frac{1}{\|n\|^s} \tag{21}$$

с суммированием по $m \equiv 1 \pmod 3$ и по бесквадратным $n \equiv 1 \pmod 3$ из кольца $\mathbb{Z}[\omega]$.

Для $n > 0$, $n \in \mathbb{Z}$, пусть $V(n)$ — число всех $c \in \mathbb{Z}[\omega]$ с $\|c\| = n$ и пусть $Z(n)$ — число всех таких c под дополнительным условием $c \equiv 1 \pmod 3$. Легко видеть, что $Z(n) \leqslant V(n)/6$ (поскольку в $\mathbb{Z}[\omega]$ имеется 6 единиц и любые две единицы различны $\mod 3$). Представим $c \in \mathbb{Z}[\omega]$ как $c = x + y\omega$ с $x, y \in \mathbb{Z}$. При этом $\|c\| = x^2 - xy + y^2$. Следовательно, $V(n)$ равно числу представлений n квадратичной формой $x^2 - xy + y^2$, $x, y \in \mathbb{Z}$, и (см. [13])

$$Z(n) \leqslant V(n)/6 = \sum_m \Big(\frac{-3}{m}\Big) \leqslant d(n), \tag{22}$$

где $\big(\frac{\cdot}{\cdot}\big)$ — символ квадратичного вычета на $\mathbb{Z}$, суммирование распространено на положительные делители m числа n и $d(n)$ — число положительных делителей числа n. В случае, когда $n \not\equiv 0 \pmod 3$, можно трактовать $Z(n)$ как число идеалов нормы n в кольце $\mathbb{Z}[\omega]$. Пусть $n = 3^m n'$ с $m, n' \in \mathbb{Z}$, $m \geqslant 0$, $n' \geqslant 1$, $n' \not\equiv 0 \pmod 3$. Число идеалов нормы n в кольце $\mathbb{Z}[\omega]$ равно $Z(n')$. Таким образом, для любого $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 1$, число идеалов нормы n в $\mathbb{Z}[\omega]$ не больше, чем $d(n)$.

§3. Основные свойства функции $L(\tau;\cdot)$

Некоторые свойства функции $L(\tau;\cdot)$ были упомянуты ранее. Мы теперь дадим точные формулировки и доказательства. Положим

$$\Omega(s) = (\sqrt{3}/2)\,(2\pi)^{-2s}\,\Gamma(s - 1/6)\,\Gamma(s + 1/6), \quad s \in \mathbb{C}. \tag{23}$$

Для s с $\operatorname{Re} s > 1/6$ имеем

$$\Omega(s) = (6\pi)^{1-2s}\int_0^\infty Ai(x^{2/3})\,x^{2s-4/3}\,dx. \tag{24}$$

О функции Эйри см. [14]. В полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ имеет место асимптотика

$$Ai(z^{2/3}) = \frac{1}{2\pi^{1/2} z^{1/6}} \exp(-2z/3)\Big(1 + O\Big(\frac{1}{|z|}\Big)\Big), \quad |z| \to \infty. \tag{25}$$

Теорема 1. *Определяющий $L(\tau;\cdot)$ ряд Дирихле* (3) *сходится абсолютно и представляет голоморфную функцию в области $\operatorname{Re} s > 1$. Далее, $L(\tau;\cdot)$ продолжается мероморфно на $\mathbb{C}$. Единственной особенностью $L(\tau;\cdot)$ является простой полюс в точке $5/6$. Точки $s = -1/6 - n$ и $s = -5/6 - n$ с целыми $n \geqslant 0$ являются простыми нулями $L(\tau;\cdot)$ (эти нули называют тривиальными). Функция $\Lambda(s) = \Omega(s)L(\tau;s)$, $s \in \mathbb{C}$, удовлетворяет функциональному уравнению $\Lambda(s) = \Lambda(1-s)$ и не имеет особенностей помимо простых полюсов с вычетами $1/2$ и $-1/2$ в точках $5/6$ и $1/6$. Для любого $s \in \mathbb{C}$ имеем $L(\tau;\bar{s}) = \overline{L(\tau;s)}$, и, в частности, нули функции $L(\tau;\cdot)$ расположены симметрично относительно вещественной оси.*

Доказательство. Каждое ν в (3) представимо единственным образом в виде произведения одной из шести единиц на $(\sqrt{-3}\,)^n cd^3$ с $n \geqslant -3$, $n \in \mathbb{Z}$, с бескубным $c \equiv 1 \pmod 3$ из $\mathbb{Z}[\omega]$ и с $d \equiv 1 \pmod 3$ из $\mathbb{Z}[\omega]$. При этом $|\tilde{\tau}(\nu)| \leqslant \|c\|^{-1/6}$, см. (4) и (10), и $\tau(\nu)$ может быть отлично от 0, только если c бесквадратно. Следовательно, ряд (3) мажорируется рядом

$$6 \sum_{n,c,d} \frac{1}{3^{(\sigma-1/6)n}\, \|c\|^{\sigma}\, \|d\|^{3\sigma-1/2}} \tag{26}$$

с $\sigma = \operatorname{Re} s$, который сходится при $\sigma > 1$. Это обеспечивает абсолютную сходимость ряда (3) и голоморфность $L(\tau;\cdot)$ в области $\operatorname{Re} s > 1$.

Теперь рассмотрим интеграл

$$\Lambda(s) = \int_0^\infty \big\{\Theta_{K\text{-}P}(0,v) - v^{2/3}\big\} v^{2s-2}\, dv, \tag{27}$$

сходящийся абсолютно при $\operatorname{Re} s > 5/6$. Предполагая $\operatorname{Re} s > 1$, подставим в (27) разложение Фурье (1) и проинтегрируем почленно

$$\begin{aligned} \Lambda(s) &= (6\pi)^{2/3} \sum_\nu \tilde{\tau}(\nu) \int_0^\infty Ai\big((6\pi|\nu|v)^{2/3}\big)\, v^{2s-4/3}\, dv \\ &= (6\pi)^{1-2s} \sum_\nu \frac{\tilde{\tau}(\nu)}{\|\nu\|^{s-1/6}} \int_0^\infty Ai(x^{2/3})\, x^{2s-4/3}\, dx = \Omega(s)L(\tau;s). \end{aligned} \tag{28}$$

С другой стороны, интеграл в (27) представим суммой интеграла от 0 до η и интеграла от η до ∞ с произвольно взятым вещественным $\eta > 0$. Мы имеем $\Lambda(s) = X_\eta(s) + Y_\eta(s)$ с

$$X_\eta(s) = \int_\eta^\infty \{\Theta_{K\text{-}P}(0,v) - v^{2/3}\} v^{2s-2}\,dv, \tag{29}$$

$$Y_\eta(s) = \int_0^\eta \{\Theta_{K\text{-}P}(0,v) - v^{2/3}\} v^{2s-2}\,dv. \tag{30}$$

В последнем интеграле сделаем замену переменной $v = u^{-1}$ и затем воспользуемся (2). Так мы находим

$$\begin{aligned} Y_\eta(s) &= \int_{\eta^{-1}}^\infty \{\Theta_{K\text{-}P}(0,u) - u^{-2/3}\} u^{-2s}\,du \\ &= \int_{\eta^{-1}}^\infty \{\Theta_{K\text{-}P}(0,u) - u^{2/3}\} u^{-2s}\,du + \int_{\eta^{-1}}^\infty \{u^{2/3} - u^{-2/3}\} u^{-2s}\,du \\ &= X_{\eta^{-1}}(1-s) + \frac{\eta^{2s-5/3}}{2s-5/3} - \frac{\eta^{2s-1/3}}{2s-1/3}. \end{aligned}$$

Следовательно, в области $\operatorname{Re} s > 1$ имеем

$$\Lambda(s) = \frac{\eta^{2s-5/3}}{2s-5/3} - \frac{\eta^{2s-1/3}}{2s-1/3} + X_\eta(s) + X_{\eta^{-1}}(1-s). \tag{31}$$

Интеграл в правой части (29) представляет целую функцию, см. (1) и (25). Коль скоро X_η и $X_{\eta^{-1}}$ — целые функции, разложение (31) доставляет мероморфное продолжение функции Λ и, ввиду (28), функции $L(\tau;\cdot)$ на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$. Ясно также, что Λ голоморфна всюду, исключая точки $5/6$ и $1/6$, где она имеет простые полюсы. Напомним, что вещественное число $\eta > 0$ в правой части (31) совершенно произвольно. Из рассмотрения правой части (31) с $\eta = 1$ очевидно, что функция Λ инвариантна относительно замены $s \mapsto 1 - s$ и что вычеты в полюсах $5/6$ и $1/6$ суть $1/2$ и $-1/2$. Заметим теперь, что функция Ω не имеет нулей и имеет только простые полюсы и только в точках $\pm 1/6 - n$ с целыми $n \geqslant 0$. Отсюда следуют наши утверждения о нулях и полюсах $L(\tau;\cdot)$. Последнее утверждение теоремы следует из (3), (16) для s с $\operatorname{Re} s > 1$ и распространяется на все $s \in \mathbb{C}$ посредством принципа аналитического продолжения. $\square$

Пусть $s, z \in \mathbb{C}$ и $\operatorname{Re} z > 0$. Положим

$$\Omega(s,z) = (6\pi)^{1-2s} \int_z^\infty Ai(x^{2/3})\, x^{2s-4/3} dx, \tag{32}$$

где путь интегрирования проходит в полуплоскости $\operatorname{Re} x > 0$ от точки z к вещественной оси и далее вдоль вещественной оси к ∞. В полуплоскости $\operatorname{Re} x > 0$ интегранд в (32) голоморфен, так что интеграл не зависит от остающегося произвола в выборе пути. Функция Ω голоморфна всюду в области определения. Поясним, что сходимость интеграла следует из (25). Фиксируем произвольно компактное множество $V \subset \mathbb{C}$ и вещественное число $\varepsilon > 0$. Если $z \to \infty$, оставаясь в секторе $|\arg(z)| \leqslant \pi/2 - \varepsilon$, то $|\Omega(s,z)|$ убывает быстрее, чем $|z|^{-n}$, с любым целым n и равномерно по $s \in V$. Это легко следует из (25).

Теорема 2. *Пусть $s, \eta \in \mathbb{C}$ и $\operatorname{Re}\eta > 0$. Имеем*

$$\begin{aligned} \Omega(s)\, L(\tau; s) = \frac{\eta^{2s-5/3}}{2s-5/3} - \frac{\eta^{2s-1/3}}{2s-1/3} + \sum_\nu \frac{\tau(\nu)}{\|\nu\|^s}\, \Omega(s, 6\pi|\nu|\eta) \\ + \sum_\nu \frac{\tau(\nu)}{\|\nu\|^{1-s}}\, \Omega(1-s, 6\pi|\nu|\eta^{-1}) \end{aligned} \tag{33}$$

с Ω из (23), (32) *и с суммированием по ν вида $(\sqrt{-3})^{-3} l$ с $l \in \mathbb{Z}[\omega]$, $l \neq 0$* (*т.е. по тем же ν, что и в* (1), (3)). *Ряды в правой части* (33) *сходятся абсолютно и локально равномерно.*

Доказательство. Фиксируем произвольно $s \in \mathbb{C}$. Ряды в правой части (33) сходятся абсолютно и локально равномерно по η и представляют голоморфные функции η в области $\operatorname{Re}\eta > 0$. Функции $\eta \mapsto \eta^{2s-5/3}$ и $\eta \mapsto \eta^{2s-1/3}$ также голоморфны в этой области. Поэтому если (33) имеет место для всех положительных $\eta \in \mathbb{R}$, то (33) имеет место и для всех $\eta \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re}\eta > 0$.

Пусть теперь $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$. Согласно (31), (28) имеем равенство

$$\Omega(s)\, L(\tau; s) = \frac{\eta^{2s-5/3}}{2s-5/3} - \frac{\eta^{2s-1/3}}{2s-1/3} + X_\eta(s) + X_{\eta^{-1}}(1-s). \tag{34}$$

И мы знаем, что это равенство имеет место для всех $s \in \mathbb{C}$, а не только для s с $\operatorname{Re} s > 1$. Для того чтобы вычислить $X_\eta(s)$, подставим в (29) разложение Фурье (1) и проинтегрируем почленно —

$$X_\eta(s) = (6\pi)^{2/3} \sum_\nu \tilde{\tau}(\nu) \int_\eta^\infty Ai\big((6\pi|\nu|v)^{2/3}\big)\, v^{2s-4/3} dv.$$

Сделав здесь замену переменной $x = 6\pi|\nu|v$, мы находим, что

$$X_\eta(s) = \sum_\nu \frac{\tau(\nu)}{\|\nu\|^s}\,\Omega(s, 6\pi|\nu|\eta)$$

с Ω из (32). Вместе с тем и для $X_{\eta^{-1}}(1-s)$ имеем разложение того же вида с η^{-1} и $1-s$ вместо η и s. Подставив эти разложения в (34), получаем (33), что и требовалось. □

Важным достоинством (33) является возможность регулировать поведение рядов в правой части (33) выбором свободного параметра η. Мы использовали уравнение (33) для вычисления значений функции $L(\tau; s)$. Преобразовав надлежащим образом интеграл в (32), можно показать, что уравнение (33) относится к классу функциональных уравнений из [15]. После этого, из общего результата, представленного в [16], легко выводим следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть a, b, c, d, ε — вещественные положительные числа. Для $s \in \mathbb{C}$ и вещественных положительных x, y под условиями*

$$|\operatorname{Re} s| \leqslant a, \quad |\operatorname{Im} s| \geqslant b, \quad xy = (4/\pi^4)|\operatorname{Im} s|^4, \quad c \leqslant x/y \leqslant d,$$

имеем

$$L(\tau; s) = \sum_{\|\nu\| \leqslant x} \frac{\tau(\nu)}{\|\nu\|^s} + \frac{\Omega(1-s)}{\Omega(s)} \sum_{\|\nu\| \leqslant y} \frac{\tau(\nu)}{\|\nu\|^{1-s}} + O\big(|\operatorname{Im} s|^{1-2\operatorname{Re} s+\varepsilon}\big), \tag{35}$$

где постоянная в O зависит только от a, b, c, d, ε и суммирование распространено на ν из (1), (3) с указанными ограничениями на $\|\nu\|$.

Заметим, что для вывода теоремы 3 параметр η в теореме 2 выбирается таким образом, что

$$\arg \eta = \Big(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{|\operatorname{Im} s|}\Big) \operatorname{sign}(\operatorname{Im} s), \quad c \leqslant |\eta|^2 \leqslant d,$$

и при этом $x = (2/\pi^2)|\operatorname{Im} s|^2|\eta|$, $y = (2/\pi^2)|\operatorname{Im} s|^2/|\eta|$.

Теорема 4. *Для $s \in \mathbb{C}$ под условиями $0 \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant 1$, $|\operatorname{Im} s| \geqslant 1$ имеет место оценка*

$$L(\tau; s) \ll |\operatorname{Im} s|^{2-2\operatorname{Re} s+\varepsilon}$$

со сколь угодно малым вещественным $\varepsilon > 0$ (постоянная в $\ll$ зависит только от ε).

Доказательство. Воспользуемся теоремой 3 с $x = y = (2/\pi^2)|\operatorname{Im} s|^2$ и с $a = b = 1$. Пусть δ — вещественное число > 0. Мы знаем, см. теорему 1, что ряд (3), определяющий функцию $L(\tau; \cdot)$, абсолютно сходится на прямой $\operatorname{Re} s = 1 + \delta$. Пусть $\sigma = \operatorname{Re} s$. Для сумм в правой части (35) находим оценки

$$\sum_{\|\nu\|\leqslant x} \frac{|\tau(\nu)|}{\|\nu\|^{\sigma}} = \sum_{\|\nu\|\leqslant x} \frac{|\tau(\nu)|}{\|\nu\|^{1+\delta}}\,\|\nu\|^{1-\sigma+\delta} \ll x^{1-\sigma+\delta},$$
$$\sum_{\|\nu\|\leqslant y} \frac{|\tau(\nu)|}{\|\nu\|^{1-\sigma}} = \sum_{\|\nu\|\leqslant y} \frac{|\tau(\nu)|}{\|\nu\|^{1+\delta}}\,\|\nu\|^{\sigma+\delta} \ll y^{\sigma+\delta},$$

где постоянные в $\ll$ зависят только от δ. Далее, из формулы Стирлинга [17] следует

$$\frac{\Omega(1-s)}{\Omega(s)} \ll |\operatorname{Im} s|^{2-4\sigma}$$

с абсолютной постоянной в $\ll$. Подставив наши оценки в (35) и положив $\delta = \varepsilon/2$, находим

$$L(\tau; s) \ll x^{1-\sigma+\delta} + |\operatorname{Im} s|^{2-4\sigma} y^{\sigma+\delta} + |\operatorname{Im} s|^{1-2\sigma+\varepsilon} \ll |\operatorname{Im} s|^{2-2\sigma+\varepsilon},$$

что и требовалось. $\square$

Следующая теорема может быть доказана стандартным методом, основанным на формуле Перрона, см. [18, 19]. Она нам не понадобится, и мы приводим ее только для полноты картины и без доказательства.

Теорема 5. *Ряд* (3), *определяющий* $L(\tau; s)$, *сходится для всех* $s \in \mathbb{C}$ *с* $\operatorname{Re} s > 5/6$. *С любыми вещественными* $\varepsilon > 0$ *и* $x \geqslant 1$ *имеем*

$$\sum_{\|\nu\|\leqslant x} \tau(\nu) = C x^{5/6} + O(x^{3/5+\varepsilon}),$$

где $C = (2\pi)^{2/3}(6/5)\Gamma(1/3)$, *суммирование распространено на* ν *из* (1) *и* (3) *под условием* $\|\nu\| \leqslant x$, *постоянная в* $\ll$ *зависит только от* ε.

Пусть $n \geqslant 1$, $n \in \mathbb{Z}$. Если $n \not\equiv 0 \pmod 9$, положим

$$r_n = \sum_{c} \frac{\overline{G(c)}}{\|c\|^{1/2}} \tag{36}$$

с суммированием по бесквадратным $c \equiv 1 \pmod 3$ из $\mathbb{Z}[\omega]$ с $\|c\| = n$. В случае $n \equiv 0 \pmod 9$, положим

$$r_n = \sum_{c} \frac{\overline{G(c)}}{\|c\|^{1/2}}\,\kappa(c) \tag{37}$$

с суммированием по бесквадратным $c \equiv 1 \pmod 3$ из $\mathbb{Z}[\omega]$ с $\|c\| = n/9$ и

$$\kappa(c) = \left(\frac{3}{c}\right)\left\{1 + \left(\frac{\omega}{c}\right)\xi^{-1} + \left(\frac{\omega^2}{c}\right)\xi\right\}, \quad \xi = \exp(2\pi i/9).$$

Здесь, очевидно, $|\kappa(c)| \leqslant 3$ и несложно показать $\kappa(\bar{c}) = \overline{\kappa(c)}$. Заметим еще, что все r_n — вещественные числа, поскольку вместе со слагаемым, соответствующим c, в (36) и (37) имеется, см. (11), комплексно сопряженное слагаемое, соответствующее $\bar{c}$. Очевидно, $r_1 = 1$. Абсолютная величина каждого слагаемого в (36) равна 1, а в (37) не превосходит 3, см. (10). Отсюда и из (22) выводим[4]

$$|r_n| \leqslant d(n) \quad \text{для всех} \quad n \geqslant 1, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{38}$$

Для $s \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re} s > 1$ положим

$$E(s) = \sum_n \frac{r_n}{n^s}\,, \tag{39}$$

где суммирование распространено на $n \geqslant 1$, $n \in \mathbb{Z}$. Можно ограничиться суммированием по бескубным n, так как $r_n = 0$ для всех других n. Точнее, если $r_n \neq 0$, то $n = uv^2$, где u — произведение различных простых чисел $\equiv 1 \pmod 3$, v — бесквадратное число и $\gcd(u, v) = 1$ (для всех других n суммы в (36) и (37) пустые).

Помимо E, нам будет полезна функция $\hat{E}$, определенная рядом Дирихле, обратным к ряду (39). Более точно, положим

$$\hat{E}(s) = 1/E(s), \quad s \in \mathbb{C}. \tag{40}$$

Определим $f_n \in \mathbb{C}$ с $n \geqslant 1$, $n \in \mathbb{Z}$, рекуррентно

$$f_1 = 1, \quad f_n = -\sum_m r_m\, f_{n/m} \tag{41}$$

с суммированием по $m \in \mathbb{Z}$ под условиями $m \,|\, n$, $m \geqslant 2$. При этом

$$\Big(\sum_n \frac{f_n}{n^s}\Big)\Big(\sum_n \frac{r_n}{n^s}\Big) = 1, \quad s \in \mathbb{C}, \tag{42}$$

где суммирование распространено на $n \geqslant 1$, $n \in \mathbb{Z}$, и произведение понимается как формальное произведение рядов Дирихле. И, конечно,

$$\hat{E}(s) = \sum_n \frac{f_n}{n^s} \tag{43}$$

с суммированием по $n \geqslant 1$, $n \in \mathbb{Z}$, если ряд в правой части абсолютно сходится.

[4] Напомним, что $d(n)$ — число положительных делителей n.

Теорема 6. *Ряд Дирихле* (39) *сходится абсолютно и представляет голоморфную функцию в области* $\mathrm{Re}\, s > 1$. *Функция* E *продолжается мероморфно на* $\mathbb{C}$ *и имеет место разложение*

$$L(\tau; s) = (2/\sqrt{3})\, 27^s \zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}(3s - 1/2)\, E(s), \quad s \in \mathbb{C}. \tag{44}$$

В области $\mathrm{Re}\, s > 1/2$ *функция* E *голоморфна всюду, исключая точку* $5/6$, *где она имеет простой полюс. В области* $\mathrm{Re}\, s > 1/2$ *нули функции* E *те же и тех же порядков, что и нули функции* $L(\tau; \cdot)$.

Доказательство. Напомним, что суммирование в определении (3) распространено на все $\nu = (\sqrt{-3}\,)^{-3} l$ с $l \in \mathbb{Z}[\omega]$, $l \neq 0$. Каждое такое ν может быть представлено единственным образом в виде произведения

$$\nu = \lambda(\sqrt{-3}\,)^{-m+3n} c d^3, \tag{45}$$

где λ — одна из шести единиц кольца $\mathbb{Z}[\omega]$, $m \in \{1, 2, 3\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 0$ и $c, d \in \mathbb{Z}[\omega]$, $c \equiv d \equiv 1 \pmod 3$, c — бескубно. При этом, см. (4) и (15), коэффициенты $\tau(\nu)$ могут быть отличны от 0, только если число c бесквадратно и либо $m = 3$, $\lambda \in \{1, -1\}$, либо $m = 1$. Положим

$$R(s) = \sum_{\nu} \frac{\tau(\nu)}{\|\nu\|^s}, \quad s \in \mathbb{C}, \ \ \mathrm{Re}\, s > 1, \tag{46}$$

с суммированием, распространенным на все

$$\nu = \lambda(\sqrt{-3}\,)^{-m} c, \tag{47}$$

где c — бесквадратное число $\in \mathbb{Z}[\omega]$, $c \equiv 1 \pmod 3$, и либо $\lambda = 1$, $m = 3$, либо $\lambda \in \{1, \omega, \omega^2\}$, $m = 1$. Мы знаем, что ряд (3) абсолютно сходится в области $\mathrm{Re}\, s > 1$. Ряд (46) построен из ряда (3) исключением части слагаемых, и поэтому также абсолютно сходится в этой области. Сгруппировав в (46) слагаемые, соответствующие ν с равными нормами, и воспользовавшись формулами (15) и (4), находим, что

$$R(s) = 3^{3s-1/2} E(s), \quad s \in \mathbb{C}, \ \ \mathrm{Re}\, s > 1, \tag{48}$$

и что ряд (39), определяющий функцию E, также абсолютно сходится в области $\mathrm{Re}\, s > 1$. Поясним вывод формулы (48). Сумму в правой части (46) разложим на две суммы, отнеся к первой слагаемые, соответствующие $m = 3$, а ко второй — слагаемые, соответствующие $m = 1$, см. (47). Используя (15), находим

$$R(\tau; s) = 3^{3s-1/2} \big\{A(s) + B(s)\big\}, \tag{49}$$

$$A(s) = \sum_{c} \frac{\overline{G(c)}}{\|c\|^{s+1/2}}, \quad B(s) = \sum_{c} \frac{\overline{G(c)}}{9^s \|c\|^{s+1/2}}\, \kappa(c) \tag{50}$$

с суммированием по бесквадратным $c \equiv 1 \pmod 3$ из $\mathbb{Z}[\omega]$. Остается сравнить (49) и (50) с (36) и (37).

Далее, согласно (3) и (4) имеем

$$L(\tau; s) = \sum_{\nu} \frac{\tilde{\tau}(\nu)}{\|\nu\|^{s-1/6}}, \quad s \in \mathbb{C}, \ \operatorname{Re} s > 1,$$

с суммированием по ν из (45). Обратимся к (15) и заметим, что $\tilde{\tau}(\nu)$ не зависит от d, n и что $\tilde{\tau}(-\nu) = \tilde{\tau}(\nu)$. Мы находим, что

$$L(\tau; s) = 2\Big(\sum_{\nu} \frac{\tilde{\tau}(\nu)}{\|\nu\|^{s-1/6}}\Big)\Big(\sum_{n} \frac{1}{3^{3n(s-1/6)}}\Big)\Big(\sum_{d} \frac{1}{\|d\|^{3s-1/2}}\Big),$$

где суммирование распространяется на ν из (47), $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 0$, $d \in \mathbb{Z}[\omega]$, $d \equiv 1 \pmod 3$. Следовательно, см. (21), имеем

$$L(\tau; s) = 2R(s)\Big(1 - \frac{1}{3^{3s-1/2}}\Big)^{-1} \zeta_*(3s - 1/2).$$

Это равенство вместе с (20) и (48) доставляет (44) для s с $\operatorname{Re} s > 1$. Принцип аналитического продолжения доставляет мероморфное продолжение E с сохранением (44) на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$. Функция $s \mapsto \zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}(3s - 1/2)$ голоморфна и не обращается в нуль в области $\operatorname{Re} s > 1/2$. Поэтому в этой области нули и полюсы функции E те же и тех же порядков, что и нули и полюсы функции $L(\tau; \cdot)$. □

Теорема 7. *Пусть $s \in \mathbb{C}$ и $\operatorname{Re} s > 1$. Тогда*

$$L(\tau; s) = (2/\sqrt{3})\, 27^s \sum_{m} \frac{c_m}{m^s}, \tag{51}$$

где суммирование распространено на $m \in \mathbb{Z}$, $m \geqslant 1$, и $c_m \in \mathbb{R}$ есть сумма коэффициентов $\tau(\nu)$ из (3) по ν под условием $\|\nu\| = m/27$. Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$, $a, b \geqslant 1$, a — бескубно, λ_b — число идеалов нормы b в кольце $\mathbb{Z}[\omega]$. Тогда

$$c_{ab^3} = r_a\, \lambda_b \sqrt{b} \quad \text{и} \quad |c_{ab^3}| \leqslant d(a)\, d(b) \sqrt{b} \tag{52}$$

с r_a из (36), (37).

Доказательство. Представление (51) следует непосредственно из определения (3), а тот факт, что все c_m вещественны, следует из (16). Заметим, что каждое $m \in \mathbb{Z}$, $m \geqslant 1$, представимо единственным образом как произведение ab^3 с $b \in \mathbb{Z}$, $b \geqslant 1$, и с бескубным $a \in \mathbb{Z}$, $a \geqslant 1$. Сравнив (51) с разложением (44) из теоремы 6, мы находим

$$\sum_{m} \frac{c_m}{m^s} = \zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}(3s - 1/2)\, E(s) \tag{53}$$

с суммированием по $m \in \mathbb{Z}$, $m \geqslant 1$. Далее, см. (39), (38), имеем

$$E(s) = \sum_a \frac{r_a}{a^s}, \qquad |r_a| \leqslant d(a), \tag{54}$$

с суммированием по бескубным $a \in \mathbb{Z}$, $a \geqslant 1$. Вместе с тем

$$\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}(3s - 1/2) = \sum_b \frac{\lambda_b}{b^{3s}} \sqrt{b}, \quad \lambda_b \leqslant d(b), \tag{55}$$

где суммирование распространено на $b \in \mathbb{Z}$, $b \geqslant 1$. Перемножив (54) и (55) и сравнив с (53), получаем (52). $\square$

§4. О нулях $L(\tau; \cdot)$

В этом параграфе мы докажем несколько утверждений о нулях функции $L(\tau; \cdot)$. Начнем с доказательства теоремы, ограничивающей область в которой могут располагаться нули.

Теорема 8. *Если* $L(\tau; s) = 0$, *то* $\operatorname{Re} s < 1.2$.

Доказательство. Рассмотрим вместо $L(\tau; \cdot)$ функцию E, которая согласно теореме 6 имеет в области $\operatorname{Re} s > 1/2$ те же нули, что и функция $L(\tau; \cdot)$. Будем считать, что $\operatorname{Re} s > 1$. Мы имеем

$$E(s) = 1 + \sum_n \frac{r_n}{n^s}, \tag{56}$$

где суммирование распространено на $n \geqslant 2$, $n \in \mathbb{Z}$. Если для какого-либо вещественного числа σ имеет место неравенство

$$\sum_n \frac{|r_n|}{n^\sigma} < 1 \tag{57}$$

с суммированием, как в (56), то функция E не имеет нулей в полуплоскости $\operatorname{Re} s \geqslant \sigma$. Вычисления показывают, что неравенство (57) имеет место при $\sigma = 1.26$, но не при $\sigma = 1.25$. Чтобы получить лучший результат, рассмотрим произведение ряда (56) на сумму нескольких первых слагаемых ряда, обратного к ряду (56) (см. выше (40), (41), (42) и (43)) и разложим это произведение в ряд Дирихле. С некоторыми $h_k \in \mathbb{C}$ имеем

$$\Big\{1 + \sum_m \frac{f_m}{m^s}\Big\}\Big\{1 + \sum_n \frac{r_n}{n^s}\Big\} = 1 + \sum_k \frac{h_k}{k^s} \tag{58}$$

с суммированием по $m, n, k \in \mathbb{Z}$ под условиями $Q \geqslant m \geqslant 2$, $n \geqslant 2$, $k > Q$. Здесь Q — свободный параметр, которым мы можем распорядиться. Если для какого-либо вещественного числа σ имеют место неравенства

$$\sum_m \frac{|f_m|}{m^\sigma} < 1, \quad \sum_k \frac{|h_k|}{k^\sigma} < 1 \tag{59}$$

с суммированием, как в (58), то функция E не имеет нулей в полуплоскости $\operatorname{Re} s \geqslant \sigma$. Возьмем $Q = 18$. Мы имеем

$$r_4 = 1, \quad r_7 = 1.7919064\ldots, \quad r_9 = 2.5320888\ldots, \quad r_{13} = 0.5052408\ldots$$

и $r_n = 0$ для всех других n в пределах $2 \leqslant n \leqslant 18$. Из (41) выводим

$$f_4 = -r_4, \quad f_7 = -r_7, \quad f_9 = -r_9, \quad f_{13} = -r_{13}, \quad f_{16} = -r_4 f_4 = r_4^2$$

и $f_n = 0$ для всех других n в пределах $2 \leqslant n \leqslant 18$. Коэффициенты r_n были определены для $n \geqslant 1$, $n \in \mathbb{Z}$, в (36) и (37). Дополним определение соглашением $r_n = 0$ для $n \notin \mathbb{Z}$. С этим соглашением

$$h_k = r_k + f_4 r_{k/4} + f_7 r_{k/7} + f_9 r_{k/9} + f_{13} r_{k/13} + f_{16} r_{k/16} \tag{60}$$

для всех $k \in \mathbb{Z}$, $k > 18$. Наши вычисления показывают, что неравенства (59) имеют место при $\sigma = 1.2$, что и требуется. Для вычисления суммы по k в (59) мы, конечно, ограничиваемся вычислением слагаемых соответствующих $k \leqslant X$ с некоторым достаточно большим X. Поясним, как можно контролировать погрешность, т.е. сумму

$$\sum_k \frac{|h_k|}{k^\sigma} \tag{61}$$

по $k \in \mathbb{Z}$ под условием $k > X$. Посредством (60) оценка суммы (61) сводится к оценке сумм

$$\sum_k \frac{|r_k|}{k^\sigma} \tag{62}$$

по $k \in \mathbb{Z}$ под условием $k > Y = X/q$ с $q = 1, 4, 7, 9, 13, 16$. Посредством (36) и (37) оценка суммы (62) сводится к оценке суммы

$$\sum_c \frac{|G(c)|}{\|c\|^{\sigma+1/2}} \tag{63}$$

по бесквадратным $c \equiv 1 \pmod 3$ из $\mathbb{Z}[\omega]$ под условием $\|c\| > Y$. Наконец, см. (10) и (21), сумма (63) равна

$$\frac{\zeta_*(\sigma)}{\zeta_*(2\sigma)} - \sum_c \frac{1}{\|c\|^\sigma}, \tag{64}$$

где суммирование распространяется на бесквадратные $c \equiv 1 \pmod 3$ из $\mathbb{Z}[\omega]$ под условием $\|c\| \leqslant Y$. Здесь сумма по c конечна, а вычисление значений функции ζ_* сводится, см. (20) и (19), к вычислению значений дзета-функции Римана и L-функции Дирихле $L(\cdot, \chi)$ с квадратичным характером $\chi \mod 3$. Мы имеем, таким образом, метод квалифицированной оценки погрешности. Детали мы опускаем ради краткости. $\square$

Рассмотрим функцию $\hat{E}$ и соответствующий ей ряд Дирихле, см. (40) и (43). Если ряд (43) абсолютно сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$, то E не имеет нулей в этой полуплоскости. Тогда (по теореме 6) и функция $L(\tau; \cdot)$ не имеет нулей ρ с $\operatorname{Re} \rho > 1$, как и утверждается в гипотезе (I). Предположение об абсолютной сходимости ряда (43) при $\operatorname{Re} s > 1$ кажется весьма правдоподобным. Прямые вычисления по формуле (41) не обнаруживают быстрого роста $|f_n|$ с ростом n. Не сложно явно вычислить f_n в случае, когда $n = p^k$ — степень простого числа p, $k \geqslant 0$, $k \in \mathbb{Z}$. Если $p \equiv 2 \pmod 3$, то $f_n = 0$ при нечетном k и $f_n = (-1)^{k/2}$ при четном k. Если же $p \equiv 1 \pmod 3$, то $f_n = x_p^k + x_p^{k-2} + \ldots + x_p^{-k}$ с $x_p = -2/\bigl(r_p + \sqrt{r_p^2 - 4}\bigr)$. При этом $|x_p| = 1$ и, значит, $|f_n| \leqslant (k+1) = d(n)$. Для $p = 3$ имеем $f_n = 0$ при нечетном k и $f_n = (-r_9)^{k/2}$ при четном k ($r_9 = 2.53\ldots$). Не видно, однако, как оценить $|f_n|$ для всех $n \geqslant 1$, $n \in \mathbb{Z}$.

Для вещественного $T > 0$ определим $N(T)$ как число нулей ρ функции $L(\tau; \cdot)$, с учетом кратностей, под условием $0 < \operatorname{Im} \rho < T$. Следующая теорема доставляет для $N(T)$ асимптотическую формулу типа формулы Римана–Мангольдта. В доказательстве мы следуем методу Беклунда [20].

Теорема 9. *Пусть $A = 2/\pi$ и $B = -\bigl(2 + \log(4\pi^2/27)\bigr)/\pi$. При $T \geqslant 2$ имеем*

$$N(T) = AT \log T + BT + S(T) \quad \text{с} \quad S(T) \ll \log T.$$

Доказательство. Как и в теореме 1, положим $\Lambda(s) = \Omega(s) L(\tau; s)$ с $\Omega(s)$ из (23) и с $s \in \mathbb{C}$. Мы имеем

$$L(\tau; s) = (2/\sqrt{3})\, 27^s D(s) \quad \text{для всех} \quad s \in \mathbb{C},$$

$$D(s) = 1 + \sum_m \frac{c_m}{m^s} \quad \text{для} \quad s \quad \text{с} \quad \operatorname{Re} s > 1, \tag{65}$$

$$\sum_m \frac{|c_m|}{m^2} < 1 \tag{66}$$

с $c_m \in \mathbb{R}$ из теоремы 7 и с суммированием по $m \geqslant 2$, $m \in \mathbb{Z}$. Для вывода неравенства (66) следует заметить, что $c_2 = c_3 = 0$, $c_4 = 1$, $c_5 = c_6 = 0$, и воспользоваться неравенством (52) из теоремы 7 для оценки $|c_m|$ с $m \geqslant 7$. Технические детали мы опускаем ради краткости.

Предположим, что среди нулей функции $L(\tau; \cdot)$ нет ни одного с мнимой частью, равной T. Рассмотрим замкнутый контур C, состоящий из отрезка прямой от точки 2 до точки $2 + iT$, отрезка прямой от точки $2 + iT$

до точки $-1+iT$, отрезка прямой от точки $-1+iT$ до точки -1 и некоторой кривой, проходящей от точки -1 к точке 2 чуть выше вещественной оси так, что между этой кривой и вещественной осью нет нулей функции $L(\tau;\cdot)$. Согласно теореме 1 функция Λ голоморфна всюду, исключая точки $5/6$ и $1/6$, лежащие вне C и вне области, ограниченной контуром C. Заметим еще, что невещественные нули функции Λ те же и тех же кратностей, что и нули функции $L(\tau;\cdot)$, и согласно теореме 8 лежат в полосе, определяемой неравенствами $-0.2 < \operatorname{Re} s < 1.2$. Согласно принципу аргумента приращение $\Delta_C \arg \Lambda(s)$ аргумента функции Λ вдоль контура C равно $2\pi N(T)$. Пусть P — часть контура C, состоящая из отрезка прямой от точки 2 до точки $2+iT$ и отрезка прямой от точки $2+iT$ до точки $1/2+iT$, а P' — часть контура C, состоящая из отрезка прямой от точки $1/2+iT$ до точки $-1+iT$ и отрезка прямой от точки $-1+iT$ до точки -1. Мы имеем $\Delta_{P'} \arg \Lambda(s) = \Delta_P \arg \Lambda(s)$, поскольку $\Lambda(s) = \overline{\Lambda(1-\bar{s})}$ для всех $s \in \mathbb{C}$, см. теорему 1. Далее, приращение аргумента вдоль нижней части контура, т. е. вдоль кривой, проходящей от точки -1 к точке 2, есть некоторая константа, не зависящая от T. Мы таким образом находим

$$\pi N(T) = \Delta_P \arg \Lambda(s) + O(1)$$

с абсолютной постоянной O. Приращение аргумента Λ равно сумме приращений аргументов функции D, функций $s \mapsto (2\pi)^{-2s}$ и $s \mapsto 27^s$ и функций $s \mapsto \Gamma(s \pm 1/6)$, см. (23). Приращения аргументов функций $s \mapsto (2\pi)^{-2s}$ и $s \mapsto 27^s$ вдоль контура P равны соответственно $-2T\log(2\pi)$ и $T\log(27)$. Для функций $s \mapsto \Gamma(s \pm 1/6)$ приращения аргументов вдоль P равны $\operatorname{Im} \log \Gamma\big((1/2+iT) \pm 1/6\big)$ и вычисляются по формуле Стирлинга [17]. Так мы находим

$$\pi N(T) = \pi\,(A\,T\log T + \,B\,T) + \Delta_P \arg D(s) + O(1).$$

Теперь рассмотрим $\Delta_P \arg D(s)$. Напомним, что P состоит из отрезка прямой от точки 2 до точки $2+iT$ и отрезка прямой от точки $2+iT$ до точки $1/2+iT$. Ввиду (65), (66), приращение аргумента функции D вдоль первого отрезка заключено между $-\pi/2$ и $\pi/2$. Далее, пусть Q — число точек s, лежащих на втором отрезке, в которых обращается в нуль $\operatorname{Re} D(s)$. Приращение аргумента функции D вдоль этого отрезка заключено между $-(Q+1)\pi$ и $(Q+1)\pi$, — это хорошо известный общий факт. Число Q можно интерпретировать как число нулей функции

$$F_T(s) = D(s+iT) + D(s-iT)$$

на отрезке I вещественной прямой от точки 2 до точки $1/2$. Пусть $K_r = \{s \in \mathbb{C} \mid |s-2| \leqslant r\}$ — круг радиуса r с центром в точке 2 и пусть $n(r)$ — число нулей (с учетом кратностей) функции F_T в K_r. Очевидно,

$I \subset K_{3/2}$, $Q \leqslant n(3/2)$, и для доказательства теоремы достаточно показать, что $n(3/2) \ll \log T$. Возьмем вещественное число R чуть бóльшим, чем $3/2$, и таким, что функция F_T не имеет нулей на границе круга K_R. Для оценки $n(3/2)$ мы воспользуемся формулой Иенсена —

$$\int_0^R \frac{n(r)}{r}\,dr = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|F_T(2+Re^{i\vartheta})|\,d\vartheta - \log|F_T(2)|. \tag{67}$$

Заметим, что $F_T(2) = 2\mathrm{Re}\,D(2+iT)$. Из (65) следует $F_T(2) \neq 0$ и оценка $\log|F_T(2)| \ll 1$ с абсолютной постоянной в $\ll$. С некоторым вещественным $h > 0$ имеем

$$|F_T(2+Re^{i\vartheta})| \leqslant |D(2+Re^{i\vartheta}+iT)| + |D(2+Re^{i\vartheta}-iT)| \leqslant T^h,$$

и, следовательно, для интегранда в (67) имеет место неравенство

$$\log|F_T(2+Re^{i\vartheta})| \leqslant h\log T.$$

Таким образом, имеем

$$\int_0^R \frac{n(r)}{r}\,dr \ll \log T. \tag{68}$$

С другой стороны,

$$\int_0^R \frac{n(r)}{r}\,dr \geqslant \int_{3/2}^R \frac{n(r)}{r}\,dr \geqslant n(3/2)\int_{3/2}^R \frac{1}{r}\,dr. \tag{69}$$

Из (68) и (69) следует $n(3/2) \ll \log T$, что и завершает доказательство. $\square$

Для вещественных σ и T определим $N(\sigma, T)$ как число нулей ρ функции $L(\tau;\cdot)$, с учетом кратностей, под условиями $\mathrm{Re}\,\rho \geqslant \sigma$ и $0 < \mathrm{Im}\,\rho < T$. Имеется некоторая связь между $N(\sigma, T)$ и поведением в среднем функций $t \mapsto |L(\tau;\sigma+it)|^2$. В общем контексте — применительно к функциям конечного порядка, заданным рядами Дирихле, — вопрос рассмотрен, например, в [18]. Следующая теорема „извлекается“ из [18, 6.2.3].

Теорема 10. *Для вещественного $\sigma \geqslant 0$, если*

$$\int_1^T |L(\tau;\sigma+it)|^2\,dt \ll T, \ \text{ то } \ N(\sigma,T) \ll T \ \text{ при } \ T \to \infty \tag{70}$$

(постоянные в $\ll$ зависят только от σ).

Если с некоторым σ имеет место оценка из правой части (70), то эта оценка имеет место и с любым бо́льшим σ. Какова точная нижняя грань множества всех σ, для которых имеют место оценки (70), мы не знаем.

Теорема 11. *Если $\sigma > 3/4$, то $N(\sigma, T) \ll T$ при $T \to \infty$.*

Доказательство. Достаточно доказать утверждение теоремы для $\sigma < 1$. Мы намерены воспользоваться теоремой 10. С этой целью покажем, что имеет место оценка

$$\int_{T/2}^{T} |L(\tau; \sigma + it)|^2 \, dt \ll T \tag{71}$$

с постоянной в $\ll$, зависящей только от σ при условии $1 > \sigma > 3/4$, $T \geqslant 4$. Понятно, что, сложив оценки вида (71), соответствующие T, $T/2$, $T/4, \ldots$, мы получим оценку $\ll T$ для интеграла в левой части (70) и, значит, утверждение нашей теоремы. Остается доказать (71).

Условимся считать в дальнейших вычислениях, что $1 > \sigma > 1/2$, $t \geqslant 2$. По формуле Стирлинга [17] находим

$$\left| \frac{\Omega(1 - \sigma - it)}{\Omega(\sigma + it)} \right| \ll t^{2 - 4\sigma} \tag{72}$$

с абсолютной постоянной в $\ll$. Пусть $\varepsilon > 0$. Из теоремы 3 и оценки (72) немедленно следует

$$|L(\tau; \sigma + it)|^2 \ll \Big| \sum_{\nu} \frac{\tau(\nu)}{\|\nu\|^{\sigma + it}} \Big|^2 + t^{4 - 8\sigma} \Big| \sum_{\nu} \frac{\tau(\nu)}{\|\nu\|^{1 - \sigma - it}} \Big|^2 + t^{2 - 4\sigma + 2\varepsilon} \tag{73}$$

с суммированием по ν, как в (1) и (3), под условием $\|\nu\| \leqslant (2/\pi^2)\, t^2$ и с постоянной в $\ll$, зависящей только от ε. Следовательно,

$$\int_{T/2}^{T} |L(\tau; \sigma + it)|^2 \, dt \ll A + T^{4 - 8\sigma} B + T^{3 - 4\sigma + 2\varepsilon}, \tag{74}$$

где постоянная в $\ll$ зависит только от ε и где

$$A = \int_{T/2}^{T} \Big| \sum_{\nu} \frac{\tau(\nu)}{\|\nu\|^{\sigma + it}} \Big|^2 dt, \quad B = \int_{T/2}^{T} \Big| \sum_{\nu} \frac{\tau(\nu)}{\|\nu\|^{1 - \sigma - it}} \Big|^2 dt$$

с суммированием по тем же ν, что и в (73). Рассмотрим интеграл A. Из теоремы 7 следует

$$A = (2/\sqrt{3})\, 27^{\sigma} \int\limits_{T/2}^{T} \Big| \sum_{a,b} \frac{c_{ab^3}}{(ab^3)^{\sigma+it}} \Big|^2 dt, \tag{75}$$

где суммирование распространено на положительные бескубные $a \in \mathbb{Z}$ и положительные $b \in \mathbb{Z}$ под условием $ab^3 \leqslant z_t = (54/\pi^2)\, t^2$. Пусть $\eta \in \mathbb{R}$. Интегранд в (75) перепишем как

$$\Big| \sum_{b} \frac{1}{b^{\eta}} \Big(\frac{1}{b^{3\sigma+3it-\eta}} \sum_{a} \frac{c_{ab^3}}{a^{\sigma+it}} \Big) \Big|^2 \tag{76}$$

с суммированием по целым положительным $b \leqslant z_t^{1/3}$ и целым положительным бескубным $a \leqslant z_t/b^3$. Далее, применив неравенство Коши, находим, что (76)

$$\leqslant \Big(\sum_{b} \frac{1}{b^{2\eta}} \Big) \Big(\sum_{b} \frac{1}{b^{6\sigma-2\eta}} \Big| \sum_{a} \frac{c_{ab^3}}{a^{\sigma+it}} \Big|^2 \Big), \tag{77}$$

где суммирование распространено на те же a и b, что и в (76). Пусть $\eta > 1/2$. Тогда первая сумма по b в (77) ограничена сверху некоторой константой, зависящей только от η, но не от z_t. Так мы находим, что

$$A \ll \sum_{b} \frac{1}{b^{6\sigma-2\eta}} \int\limits_{T/2}^{T} \Big| \sum_{a} \frac{c_{ab^3}}{a^{\sigma+it}} \Big|^2 dt \tag{78}$$

где суммирование распространено на целые положительные $b \leqslant z_T^{1/3}$ и целые положительные бескубные $a \leqslant z_t/b^3$. Интеграл в (78) равен

$$\sum_{a,a'} \frac{c_{ab^3}\, c_{a'b^3}}{(aa')^{\sigma}} \int\limits_{\gamma_{T,b}^{a,a'}}^{T} \Big(\frac{a'}{a} \Big)^{it} dt, \tag{79}$$

где $\gamma_{T,b}^{a,a'} = \max\{\pi\sqrt{ab^3/54}, \pi\sqrt{a'b^3/54}, T/2\} \leqslant T$ и суммирование распространено на $a, a' \in \mathbb{Z}$ в пределах от 1 до z_T/b^3. Вычислив интегралы и применив оценку (52) из теоремы 7, находим, что (79)

$$\begin{aligned} &\ll T \sum_{a} \frac{c_{ab^3}^2}{a^{2\sigma}} + \sum_{a \neq a'} \frac{|c_{ab^3}\, c_{a'b^3}|}{(aa')^{\sigma}\, |\log(a'/a)|} \\ &\ll d(b)^2\, b \Big\{ T \sum_{a} \frac{d(a)^2}{a^{2\sigma}} + \sum_{a \neq a'} \frac{d(a)\, d(a')}{(aa')^{\sigma}\, |\log(a'/a)|} \Big\} \end{aligned} \tag{80}$$

с суммированием по $a, a' \in \mathbb{Z}$ в пределах от 1 до z_T/b^3, $a' \neq a$, и с абсолютной постоянной в $\ll$. В правой части (80) первая сумма (по a) оценивается как $\ll 1$, поскольку $2\sigma > 1$ и, с любым вещественным $\delta > 0$, $d(m) \ll m^\delta$ при $m \to \infty$. Для оценки второй суммы (по a и a') следует воспользоваться стандартной оценкой[5]

$$\sum_{1 \leqslant m < n \leqslant x} \frac{d(m)\,d(n)}{(mn)^\vartheta \log(n/m)} \ll x^{2-2\vartheta+\delta}, \tag{81}$$

которая имеет место для всех вещественных x, ϑ и δ под условиями $\vartheta \leqslant 1$, $\delta > 0$. Воспользуемся (81) с $\vartheta = \sigma$ и $x = z_T/b^3$. Напомним, что $z_T = (54/\pi^2)\,T^2$. Мы получаем для (80) и, значит, для интеграла в (78) оценку

$$\ll d(b)^2\, b\,\bigl\{T + (T^2/b^3)^{2-2\sigma+\delta}\bigr\}. \tag{82}$$

Подставив (82) в (78), получаем

$$\begin{aligned} A &\ll \sum_b \frac{d(b)^2\, b}{b^{6\sigma-2\eta}}\,\bigl\{T + (T^2/b^3)^{2-2\sigma+\delta}\bigr\} \\ &= \Bigl(\sum_b \frac{d(b)^2}{b^{6\sigma-1-2\eta}}\Bigr) T + \Bigl(\sum_b \frac{d(b)^2}{b^{5-2\eta+3\delta}}\Bigr) T^{4-4\sigma+2\delta} \end{aligned} \tag{83}$$

с суммированием по целым положительным $b \leqslant z_T^{1/3}$ и с любым вещественным $\delta > 0$. Выбрав параметр $\eta > 1/2$ достаточно малым, получим $6\sigma - 1 - 2\eta > 1$, $5 - 2\eta + 3\delta > 1$ и, следовательно, оценки $\ll 1$ для сумм по b в (83). Мы, таким образом, находим окончательную оценку

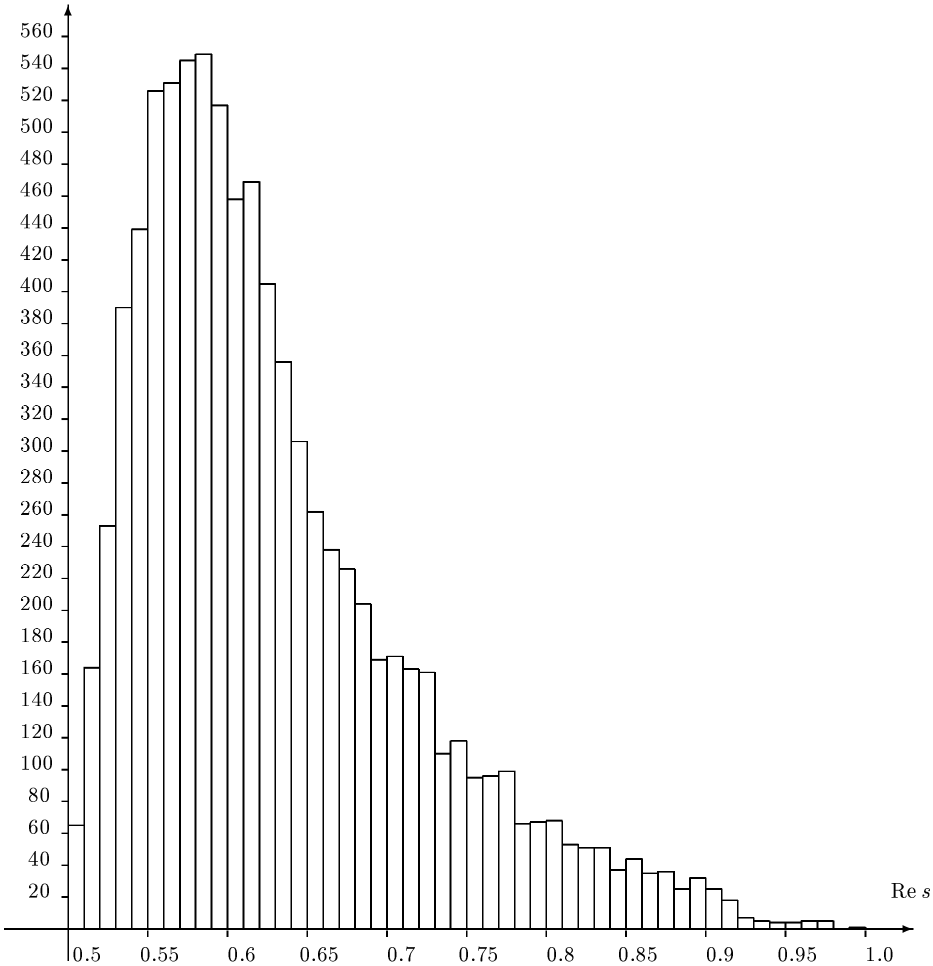
$$A \ll T + T^{4-4\sigma+\delta} \tag{84}$$

с любым вещественным $\delta > 0$. Аналогичным образом для B из (74) находим оценку

$$B \ll T^{4\sigma+\delta} \tag{85}$$

с любым вещественным $\delta > 0$. Поясним, что постоянные в $\ll$ в (84) и (85) зависят только от σ и δ, но не от T. Подставив (84) и (85) в (74) и взяв δ и ε достаточно малыми, получаем (71), что и требовалось. $\square$

[5]Поясним, что в (81) суммирование распространено на $m, n \in \mathbb{Z}$ с $1 \leqslant m < n \leqslant x$, и что постоянная в $\ll$ зависит только от ϑ и δ, но не от x. См. [19, 20].



Гистограмма распределения точек $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{8724}$. Отрезок $[0.5, 1]$ разбит на 50 отрезков длины 0.01. Если $[a, b]$ есть один из них, высота столбика над ним равна числу тех n, для которых $a < \sigma_n \leqslant b$.

Список литературы

[1] Kubota T., *On automorphic functions and the reciprocity law in a number field*, Lecture in Math. Kyoto Univ., No. 2, Kinokuniya Book-Store Co., Ltd., Tokyo, 1969.

[2] Patterson S. J., *A cubic analogue of the theta series.* I, II, J. Reine Angew. Math. **296** (1977), 125–161, 217–220.
[3] Proskurin N. V., *Cubic metaplectic forms and theta functions*, Lecture Notes in Math., vol. 1677, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
[4] Проскурин Н. В., *Вычисление нулей L-функции, ассоциированной с кубической тета-функцией*, Зап. науч. семин. ПОМИ **357** (2008), 180–194.
[5] Проскурин Н. В., *О проблеме вычисления значений L-функций*, Зап. науч. семин. ПОМИ **373** (2009), 273–279.
[6] Проскурин Н. В., *О распределении нулей кубической L-функции*, Зап. науч. семин. ПОМИ **383** (2010), 144–147.
[7] Проскурин Н. В., *Вычисления значений L-функций и полиномы Чебышева*, Зап. науч. семин. ПОМИ **387** (2011), 200–206.
[8] Montgomery H. L., *The pair correlation of zeros of the zeta-function*, Analytic Number Theory (St. Louis Univ., 1972), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 24, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1973, pp.181–193.
[9] Siegel C. L., *Contributions to the theory of the Dirichlet L-series and Epstein zeta-functions*, Ann. of Math. (2) **44** (1943), no. 2, 143–172.
[10] Фоменко О. М., *О дзета-функции Эпштейна.* II, Зап. науч. семин. ПОМИ **371** (2009), 157–170.
[11] Ireland K., Rosen M., *A classical introduction to modern number theory*, Grad. Texts in Math., vol. 84, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1982.
[12] Hecke E., *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen*, Akad. Verlag-Ges., Leipzig, 1923.
[13] Davenport H., *Multiplicative number theory*, Lectures in Adv. Math., No. 1, Markham Publ. Co., Chicago, IL, 1967.
[14] Olver F. W. J., *Asymptotics and special functions*, Acad. Press, New York–London, 1974.
[15] Лаврик А. Ф., *О функциональных уравнениях функций Дирихле*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **31** (1967), №2, 431–442.
[16] Лаврик А. Ф., *Приближенные функциональные уравнения функций Дирихле*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **32** (1968), №1, 134–185.
[17] Bourbaki N., *Fonctions d'une variable réelle*, Chapitres I–III, Herman, Paris, 1949; Chapitres IV–VII, 1951.
[18] Titchmarsh E. C., *The theory of functions*, Oxford Univ. Press, London, 1939.
[19] Prachar K., *Primzahlverteilung*, Springer-Verlag, Berlin etc., 1957.

[20] Chandrasekharan K., *Arithmetical functions*, Grundlehren Math. Wiss., Bd.167, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1970.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
191023, Санкт-Петербург
наб. р. Фонтанки, 27
Россия
E-mail: np@pdmi.ras.ru

Поступило 11 марта 2011 г.