С. В. Кисляков, О BMO-регулярных решетках измеримых функций, *Алгебра и анализ*, 2002, том 14, выпуск 2, 117–135

Алгебра и анализ
Том 14 (2002), вып. 2

О ВМО-РЕГУЛЯРНЫХ РЕШЕТКАХ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

© С. В. Кисляков

§0. Введение

Квазибанахова решетка измеримых функций на пространстве с мерой — это полное квазинормированное пространство E измеримых функций, удовлетворяющее условию

$$f \in E,\ |g| \leqslant |f| \implies g \in E,\ \|g\| \leqslant C\|f\|, \qquad (1)$$

если только функция g измерима. Нас будет интересовать случай решеток на окружности $\mathbb{T}$ с мерой Лебега m или, более общим образом, на произведении $(\mathbb{T}, m) \times (\Omega, \mu)$, где μ — σ-конечная мера на множестве Ω.

Квазибанахова решетка X на пространстве $\mathbb{T} \times \Omega$ называется ВМО-*регулярной*, если найдется такая постоянная C, что для всякой функции f, $f \in X$, $f \neq 0$, существует функция $g, g \in X$, со следующими свойствами:

$$g \geqslant |f|,\ \|g\| \leqslant C\|f\| \quad \text{и} \quad \operatorname*{ess\,sup}_{\omega\in\Omega} \|\log g(\cdot,\omega)\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant C.$$

Иногда такую функцию g мы будем называть ВМО-*мажорантой* для f. (Напомним, что $\mathrm{BMO} = \mathrm{BMO}(\mathbb{T}) = \{u + \mathcal{H}v : u, v \in L^\infty\}$, где $\mathcal{H}$ — оператор гармонического сопряжения; $\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}} = \inf\{\|u\|_{L^\infty/\mathbb{C}} + \|v\|_{L^\infty/\mathbb{C}} : \varphi = u + \mathcal{H}v\}$).

Понятие ВМО-регулярности было введено Калтоном [1] в связи с комплексной интерполяцией пространств типа Харди и затем использовалось автором в [2] в связи с вещественной интерполяцией. При некоторых естественных условиях на решетку X (см. §1) можно определить ее „аналитическую часть" X_A:

$$X_A = \{f \in X : f(\cdot,\omega) \in N_+ \text{ для п.в. } \omega\}, \qquad (2)$$

где N_+ — (граничный) класс Смирнова (см. определение в §1). При $X = L^p(\mathbb{T})$ эта конструкция приводит к шкале H^p пространств Харди. Оказалось,

Ключевые слова: K-замкнутость, пространства типа Харди, интерполяция, теорема Ки Фана–Какутани.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №99-01-00103) и ФЦП "Интеграция" (рег. №326.53).

что если две решетки X и Y на $\mathbb{T}\times\Omega$ ВМО-регулярны, то с некоторыми оговорками для комплексного и вещественного методов интерполяции справедливы естественные формулы

$$(X_A, Y_A)_\theta = ((X,Y)_\theta)_A \quad \text{и} \quad (X_A, Y_A)_{\theta,p} = ((X,Y)_{\theta,p})_A. \tag{3}$$

В первом случае (комплексная интерполяция) нужно потребовать еще, чтобы пространства X и Y были банаховыми, а норма в пространстве $X^{1-\theta}Y^\theta$ была порядково абсолютно непрерывной (см. [1, 2] по поводу доказательств). Эти требования можно считать минимальными. Для второй формулы (вещественная интерполяция) не нужно никаких дополнительных условий, и на самом деле имеет место нечто более сильное и простое по форме: *если обе решетки X и Y ВМО-регулярны, то пара (X_A, Y_A) K-замкнута в (X,Y)* [2].

Напомним, что подпара (E_0, E_1) интерполяционной пары (F_0, F_1) называется *K-замкнутой*, если для всякого разложения $e = f_0 + f_1$ произвольного вектора e из $E_0 + E_1$, где $f_0 \in F_0$, $f_1 \in F_1$, существует другое разложение $e = e_0 + e_1$, где $e_i \in E_i$ и $\|e_i\|_{E_i} \leqslant C\|f_i\|_{F_i}$, $i = 0, 1$. Легко видеть, что в случае K-замкнутости всегда $(E_0, E_1)_{\theta,p} = (F_0, F_1)_{\theta,p} \cap (E_0 + E_1)$ (абстрактный аналог второй формулы из (3)).

Очень многие стандартные решетки измеримых функций ВМО-регулярны. Приведем несколько примеров, отсылая читателя к [2] за подробным обсуждением. Пусть $\mathcal{H}$ — оператор гармонического сопряжения. Он действует и на функции на $\mathbb{T}\times\Omega$ по первой переменной.

1°. Если оператор $\mathcal{H}$ ограничен на банаховой решетке X, то она ВМО-регулярна.

2°. Пусть $w > 0$ — измеримая функция на $\mathbb{T}\times\Omega$, логарифм которой *равномерно принадлежит пространству* ВМО (т.е. $\operatorname{ess\,sup}_{\omega\in\Omega} \|\log w(\cdot, w)\|_{\mathrm{BMO}} < \infty$). Если решетка X ВМО-регулярна, то и решетка $X_w = \{y : yw^{-1} \in X\}$ с естественной нормой $\|y\|_{X_w} = \|yw^{-1}\|_X$ ВМО-регулярна.

3°. Если решетка X ВМО-регулярна, то такова же и решетка $X^a = \{y : |y|^{1/a} \in X\}$ $(a > 0)$ с естественной квазинормой $\|y\|_{X^a} = \||y|^{1/a}\|_X^a$.

Утверждения 2° и 3° сразу следуют из определений, а 1° требует доказательства, впрочем, не очень сложного (см. [2]); мы приведем его ради полноты.

Пусть $f \in X$. Положим $f_0 = |f|$ и по индукции $f_{n+1} = |\mathcal{H}f_n|$, $n \geqslant 0$. При $0 < \alpha < (\|\mathcal{H}\|_{X\to X})^{-1}$ ряд $g = \sum_{n\geqslant 0} \alpha^n f_n$ сходится в X. Очевидно, что $g \geqslant |f|$ и $|\mathcal{H}g| \leqslant \alpha^{-1}|g|$ п.в. Кроме того, $\|g\|_X \leqslant C\|f\|_X$. Чтобы показать, что логарифм функции g равномерно принадлежит пространству ВМО, рассмотрим аналитическую в круге функцию $G(\cdot,\omega) = g(\cdot,\omega) + i\mathcal{H}g(\cdot\omega)$. Ее аргумент $h(\cdot,\omega)$ по модулю не превосходит величины $\operatorname{arctg}\alpha^{-1}$ при п.в. ω. Так как $\log|G(\cdot,\omega)| = -\mathcal{H}(h(\cdot,\omega)) + \mathrm{const}$, а разность $\log|G(\cdot,\omega)| - \log g(\cdot,\omega)$ есть ограниченная функция, отсюда вытекает требуемое.

Из утверждений 1°—3° следует, в частности, BMO-регулярность пространств $L^p(w)$, где $0 < p < \infty$, а $\log w$ равномерно принадлежит пространству BMO. Ограничение $p < \infty$ можно снять с помощью примера 2° и следующего наблюдения[1].

4°. Решетка $L^\infty(m \times \mu)$ BMO-регулярна, ибо постоянные функции лежат в BMO и имеют там нулевую норму.

На близкой идее основан и пример 5° ниже. Пусть X — решетка измеримых функций на $\mathbb{T} \times \Omega$, а Y — решетка измеримых функций на еще одном пространстве (Σ, ν) с σ-конечной мерой ν. Образуем решетку $X(Y)$, состоящую из тех измеримых функций u на $\mathbb{T} \times \Omega \times \Sigma$, для которых функция $\varphi : (t, \omega) \mapsto \|u(t, \omega, \cdot)\|_Y$ лежит в X, и наделим его естественной квазинормой $\|u\|_{X(Y)} = \|\varphi\|_X$. Отметим, что иногда здесь возникают неприятности, связанные с возможной неизмеримостью функции φ, однако нам такие ситуации не встретятся.

5°. Если решетка X BMO-регулярна, то и решетка $X(L^\infty(\nu))$ BMO-регулярна.

Действительно, для произвольной функции u из $X(L^\infty(\nu))$ образуем функцию $(t, \omega) \mapsto \|u(t, \omega, \cdot)\|_{L^\infty(\nu)}$ и построим для нее BMO-мажоранту в пространстве X. После этого достаточно будет трактовать эту BMO-мажоранту как функцию на $\mathbb{T} \times \Omega \times \Sigma$, не зависящую от третьей переменной.

Простых доказательств следующего ниже утверждения автору не известно. Оно было установлено в [2] (метод фактически впервые появился в [3]) и будет передоказано иным способом в настоящей статье.

6°. Пространство $L^\infty(\mathbb{T}, l^p)$ BMO-регулярно при $0 < p < \infty$.

Это утверждение верно тривиальным образом и при $p = \infty$ в силу примера 5°.

Несмотря на обилие примеров, самые естественные *общие* вопросы о BMO-регулярных решетках оказываются неожиданно трудными.

Есть основание полагать, что BMO-регулярность не только достаточна для „хорошей“ интерполяции пространств вида X_A, но и близка к необходимому условию. Для комплексной интерполяции в [1] на эту тему доказано несколько конкретных результатов. Например, пусть норма в X p-выпукла при некотором $p > 1$, а норма в Y — q-вогнута при некотором $q < \infty$. Если верна первая формула в (3), а пространство X BMO-регулярно, то таково же и Y. Вероятно, условия p-выпуклости и q-вогнутости можно снять или ослабить, но пока не видно, как это сделать. Для вещественной интерполяции ничего похожего на приведенное утверждение до сих пор известно не было. В этой статье будет доказан один результат такого сорта, который мы сейчас

[1]Всюду в работе символом $L^\infty(w)$ обозначается пространство $\{f : fw^{-1} \in L^\infty(\mathbb{T} \times \Omega)\}$, т.е. $(L^\infty(\mathbb{T} \times \Omega))_w$ в обозначениях примера 2°. При $p < \infty$ используется стандартное определение $L^p(w) = \{f : \int(|f|^p w)^{1/p} < \infty\} = (L^p(\mathbb{T} \times \Omega))_{w^{-1/p}}$.

сформулируем. Неясно, в какой степени существенно, что условие дается в терминах функций, зависящих от одной дополнительной переменной.

Пусть $\lambda > 1$. На пространстве $\mathbb{T}\times\Omega\times\mathbb{Z}$ рассмотрим вес w_λ, $w_\lambda(t,\omega,n) = \lambda^n$. Положим $L^\infty_\lambda = L^\infty(\mathbb{T}\times\Omega\times\mathbb{Z}, w_\lambda)$, $H^\infty_\lambda = (L^\infty_\lambda)_A$. Для банаховой решетки X измеримых функций на $\mathbb{T}\times\Omega$ обозначим $X(l^r) = X(l^r(\mathbb{Z}))$ и $X_A(l^r) = (X(l^r))_A$.

Напомним, что банахова решетка X измеримых функций обладает *свойством Фату*, если постоянная C в формуле (1) равна 1 и из условий $x_n \in X$, $x_n(\tau) \to x(\tau)$ п.в. и $\|x_n\|_X \leqslant 1$ вытекает, что $x \in X$ и $\|x\|_X \leqslant 1$.

Теорема 1. *Предположим, что пространство* (Ω,μ) *дискретно, а банахова решетка* X *измеримых функций на* $\mathbb{T}\times\Omega$ *обладает свойством Фату и удовлетворяет условию* $(*)$ *(см.* §1*). Следующие утверждения равносильны*:

1) *решетка* X BMO-*регулярна*;

2) *для некоторых (эквивалентным образом, для всех)* $r \in [1,\infty)$ *и* $\lambda > 1$ *пара* $(X_A(l^r), H^\infty_\lambda)$ K-*замкнута в* $(X(l^r), L^\infty_\lambda)$.

Я полагаю, что требование дискретности меры μ здесь несущественно и порождено лишь недостатками метода. Заметим, однако, что на довольно многие (но, видимо, не все) решетки X в случае произвольной меры μ теорему 1 и ее следствия можно распространить с помощью аппроксимации.

Следующая теорема отвечает еще на один естественный вопрос (для суперрефлексивных[2] решеток измеримых функций соответствующее утверждение отмечалось в [1]). Обозначим через X' решетку измеримых функций, *порядково сопряженную с* X: $X' = \{g : \int |fg| < \infty, f \in X\}$ с обычной нормой $\|g\| = \sup\{\int |fg| : \|f\|_X \leqslant 1\}$.

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *пространства* X *и* X' BMO-*регулярны или нет одновременно.*

Этот факт — довольно простое следствие теоремы 1. В свою очередь, из него без труда получаются критерии BMO-регулярности пространства X в терминах ограниченности оператора гармонического сопряжения $\mathcal{H}$ на некоторых пространствах, производных от X, а именно на $((X^\alpha)')^{1/2}$ при некотором $\alpha > 0$ [2] либо на $X^{1-\theta}(L^2)^\theta$ при некотором θ, $0 < \theta < 1$ (см. [1], где на X накладывались излишние, как мы увидим, дополнительные требования).

Эти и другие приложения теоремы 1 доказаны в §2, а сама она — в §3. В §1 излагается стандартный вводный материал; в какой-то степени новы, может быть, только леммы 5, 6 и 7 в п. 1.3.

§1. Подготовка

1.1. Условия на решетки. Мы рассматриваем решетки измеримых функций на $(\mathbb{T},m)\times(\Omega,\mu)$, где мера μ σ-конечна. В принципе читатель может считать

[2] Не приводя определения, отметим, что суперрефлексивность равносильна существованию эквивалентной равномерно выпуклой нормы.

ее дискретной (ибо таковой она будет в §2, 3). Это предположение снимает вопросы об измеримости, могущие возникнуть по ходу дела, однако в действительности в §1 оно не нужно. Предполагается, что все рассматриваемые решетки X банаховы (если противное явно не следует из контекста) и имеют в качестве носителя все пространство $\mathbb{T}\times\Omega$.[3] Тогда носитель решетки X' тоже совпадает с $\mathbb{T}\times\Omega$; далее, решетка X' всегда обладает свойством Фату, а если такова же и решетка X, то справедливо равенство $X''=X$ (см., например, [4, гл. VI, §1, теоремы 2, 3 и 7]).

Остановимся чуть подробнее на определении (2) пространства X_A. *Класс Смирнова* N_+ состоит из таких аналитических в круге $\mathbb{D}=\{z:|z|<1\}$ функций F, для которых функции множества

$$e\mapsto\int_e\log^+|F(r\zeta)|dm(\zeta),\quad 0\leqslant r<1,$$

равностепенно абсолютно непрерывны. Как это принято, мы часто не делаем различия между функциями класса Смирнова и их граничными значениями на окружности; например, в формуле (2) имеется в виду, что $f(\cdot,\omega)$ есть граничная функция для некоторой функции класса Смирнова. Чтобы определение (2) не вело к вырождениям, подчиним решетку X следующему условию:

для всякой функции $f\in X$, $f\neq 0$, найдется функция $g\in X$, $g\geqslant|f|$, такая, что $\|g\|\leqslant c\|f\|$ и $\log|g(\cdot,\omega)|\in L^1(\mathbb{T})$ при п.в. $\omega\in\Omega$. (*)

(Любопытно отметить, что формально условие (*) вытекает из требования ВМО-регулярности, хотя это наблюдение не будет играть в дальнейшем сколько-нибудь заметной роли.)

Будем говорить, что последовательность измеримых функций g_n на пространстве с (σ-конечной) мерой (Σ,ν) *ν-сходится* к функции g (обозначение: $g_n\xrightarrow{(\nu)}g$), если она сходится к g по мере на каждом множестве конечной меры. Из теоремы о замкнутом графике для метрических линейных пространств получается, что при выполнении условия (*) из сходимости $\|f_n\|_X\to 0$ вытекает μ-сходимость к нулю последовательности функций $\omega\mapsto\int_{\mathbb{T}}\log(1+|f_n(\cdot,\omega)|)dm$. Отсюда и из следующих двух результатов (которые понадобятся нам и в дальнейшем) легко получить замкнутость пространства X_A в X.

Теорема Хинчина–Островского [5, гл. II, §7.1]. *Пусть $\{f_n\}$ — последовательность аналитических функций в круге такая, что интегралы*

[3]Это означает, что не существует множества положительной меры, на котором все функции из X обращаются в нуль п.в.

$\int_{\mathbb{T}} \log^+ |f_n(r\zeta)| dm(\zeta)$ *ограничены равномерно по* n *и* r. *Предположим, что последовательность граничных функций* $f_n(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{T}$, *сходится по мере к некоторой функции* φ *на множестве* $e \subset \mathbb{T}$, $me > 0$. *Тогда последовательность* f_n *сходится равномерно на каждом компакте, лежащем в* $\mathbb{D}$, *к некоторой аналитической функции* f, *граничные значения которой на множестве* e *совпадают с* φ.

Нам встретятся лишь случаи, когда $e = \mathbb{T}$.

Лемма 1 (о равностепенной абсолютной непрерывности) [5, гл. II, §8.3]. *Пусть* $f_n \in N_+$, *причем функции множества* $e \mapsto \int_e \log^+ |f_n(\zeta)| dm$, $e \subset \mathbb{T}$, *равностепенно абсолютно непрерывны. Тогда функции множества* $e \mapsto \int_e \log^+ |f_n(r\zeta)| dm$ *равностепенно абсолютно непрерывны по всем* $r \in [0, 1)$ *и всем* n.

Ради полноты докажем следующую важную лемму, фактически установленную в [1].

Лемма 2. *Если* X *удовлетворяет условию* (*), *то* X' *тоже удовлетворяет этому условию.*

Доказательство. (a) Пусть $g \in X'$. Легко видеть, что в X найдется такая функция f, что $\log |f(\cdot, \omega)| \in L^1(\mathbb{T})$ при п.в. ω. Так как $|fg| \in L^1(\mathbb{T} \times \Omega, m \times \mu)$, нетрудно понять, что $\log^+ |g(\cdot, \omega)| \in L^1(\mathbb{T})$ при п.в. ω. Действительно, положим $E_1 = \{|g| \geqslant 1\}$, $E_2 = E_1 \cap \{|fg| \geqslant 1\}$. На множестве E_2 воспользуемся равенством $\log^+ |g| = \chi_{E_1}(\log^+ |fg| - \log |f|)$, после чего заметим, что на $E_1 \setminus E_2$ справедлива оценка $1 \leqslant |g| \leqslant |f|^{-1}$, т.е. $0 \leqslant \log |g| \leqslant |\log |f||$.

(b) Пусть φ — строго положительная функция из $L^1(\mathbb{T} \times \Omega, m \times \mu)$. По теореме Лозановского о факторизации (см. [6] или другое доказательство в [7]) можно записать $\varphi = fh$, где $f \in X$ и $h \in X'$, $f, h \geqslant 0$. Мы можем считать с самого начала, что $\int \log \varphi(\cdot, \omega) dm > -\infty$ при п.в. ω, а затем, увеличив f в соответствии с условием (*) (и снова изменив при этом φ), что еще и $\log f(\cdot, \omega) \in L^1(\mathbb{T})$ при п.в. ω. Тогда $\log h(\cdot, \omega) = \log \varphi(\cdot, \omega) - \log f(\cdot, \omega) \in L^1(\mathbb{T})$ при п.в. ω.

(c) Наконец, для $g \in X'$ положим $g_1 = \max(|g|, \eta h)$, где функция h построена в п. (b), а число η достаточно мало. В силу п. (a) функция g_1 будет как раз такой мажорантой для g, как требуется в условии (*) для X'. •

1.2. Множества, замкнутые по мере. Под этим названием мы имеем в виду множества, замкнутые относительно ν-сходимости, которая определена в предыдущем пункте. В [8] (см. также [4, гл. X, §5]) показано, что выпуклые замкнутые по мере множества в банаховых решетках X ν-измеримых функций со свойством Фату[4] обладают рядом замечательных свойств. Нам

[4] И даже более общим образом — в некоторых не обязательно нормированных идеальных пространствах измеримых функций.

понадобятся следующие два.

I. Если A — ограниченное по норме выпуклое ν-замкнутое подмножество в X, а $\{x_\alpha\}_{\alpha\in T}$ — произвольное направление элементов множества A, то существуют множество T', конфинальное с T, и направление $\{y_\beta\}_{\beta\in T'}$, которое ν-сходится и обладает тем свойством, что каждый элемент y_β есть выпуклая комбинация некоторых элементов $\{x_\alpha\}_{\alpha\geqslant\beta}$ [4, гл. X, §5, леммы 2 и 5].

II. Пусть A и B — ν-замкнутые выпуклые множества в X, по крайней мере одно из которых ограничено. Если $A\cap B=\varnothing$, то эти множества можно строго разделить функционалом f из порядково сопряженной решетки X':

$$\sup\{\operatorname{Re} f(x) : x\in A\} < \inf\{\operatorname{Re} f(x) : x\in B\}$$

[4, гл. X, §5, теорема 2].

Отметим, что свойство Фату в решетке X эквивалентно тому, что ее единичный шар ν-замкнут. Пусть X и Y — две решетки со свойством Фату на одном и том же пространстве с мерой (Σ,ν). Положим $X+Y=\{x+y : x\in X, y\in Y\}$ и наделим это множество нормой $\|z\|=\inf\{\|x\|_X+\|y\|_Y : z=x+y, x\in X, y\in Y\}$. Из свойства I легко вывести, что единичный шар пространства $X+Y$ ν-замкнут (коль скоро таковы шары в X и Y), так что $X+Y$ обладает свойством Фату. Тем же способом получается, что если A и B — ограниченные ν-замкнутые выпуклые подмножества в X и Y, то их сумма $A+B$ ν-замкнута.

Лемма 3. *Пусть X — банахова решетка измеримых функций со свойством Фату на $(\mathbb{T}\times\Omega, m\times\mu)$. Если X удовлетворяет условию $(*)$, то единичный шар пространства X_A $(m\times\mu)$-замкнут.*

Доказательство. Так как X' удовлетворяет условию $(*)$ (см. лемму 2), то существует строго положительная функция $g\in X'$ такая, что $\log|g(\cdot,\omega)|\in L^1(\mathbb{T})$ при п.в. $\omega\in\Omega$. Предположим, что $f_n\in X_A$, $\|f_n\|\leqslant 1$ и $f_n\xrightarrow{(m\times\mu)} f$. Интегралы $\int\int_{\mathbb{T}\times\Omega}|f_ng|\,dm\,d\mu$ равномерно ограничены, поэтому последовательность $\{f_ng\}$ сходится в $L^{1/2}(\mathbb{T}\times E)$ для любого множества $E\subset\Omega$, $\mu E<\infty$. Перейдя к подпоследовательности, можем считать, что при п.в. $\omega\in\Omega$ последовательность $\{f_n(\cdot,\omega)g(\cdot,\omega)\}$ сходится в $L^{1/2}(\mathbb{T})$ (в частности, $f_n(\cdot,\omega)\xrightarrow{(m)} f(\cdot,\omega)$ при п.в. ω).

Для фиксированного $\omega\in\Omega$ положим $E^1_{n,\omega}=\{\zeta\in\mathbb{T} : |f_n(\zeta,\omega)|\geqslant 1\}$ и $E^2_{n,\omega}=E^1_{n,\omega}\cap\{\zeta\in\mathbb{T} : |f_n(\zeta,\omega)g(\zeta,\omega)|\geqslant 1\}$. Тогда на $E^1_{n,\omega}\setminus E^2_{n,\omega}$ имеют место неравенства

$$1\leqslant|f_n(\cdot,\omega)|\leqslant\frac{1}{|g(\cdot,\omega)|},\quad\text{т.е. } \log^+|f_n(\cdot,\omega)|\leqslant\big|\log|g(\cdot,\omega)|\big|,$$

на $E^2_{n,\omega}$ можно записать

$$\log^+|f_n(\cdot,\omega)|=\log^+|f_n(\cdot,\omega)g(\cdot,\omega)|-\log|g(\cdot,\omega)|,$$

а на $\mathbb{T} \setminus E^1_{n,\omega}$ имеем $\log^+ |f_n(\cdot,\omega)| = 0$. Так как функции $f_n(\cdot,\omega)g(\cdot,\omega)$ равномерно по n ограничены в $L^{1/2}(\mathbb{T})$ при п.в. ω, из этих формул следует, что при п.в. ω функции множества $e \mapsto \int_e \log^+ |f_n(\cdot,\omega)|dm$ $(e \subset \mathbb{T})$ равностепенно (по n) абсолютно непрерывны.

Теперь доказательство легко завершается применением теоремы Хинчина–Островского и леммы 1. $\bullet$

1.3. Двойственность. Пусть X — банахова решетка на $\mathbb{T} \times \Omega$ с условием (*).

Лемма 4. $(X')_A = \{\bar{z}g : g \in X', \int fg = 0, f \in X_A\}$.

Здесь (и во многих случаях далее) через z обозначается тождественное отображение окружности $\mathbb{T}$ или круга $\mathbb{D}$.

Доказательство. Если $g \in (X')_A$, $f \in X_A$, то для п.в. ω функция $(zfg)(\cdot,\omega)$ лежит в классе Смирнова, обращается в нуль в центре круга, а ее граничные значения лежат в $L^1(\mathbb{T})$. Следовательно, $(zfg)(\cdot,\omega) \in H^1$ и $\int_{\mathbb{T}}(zfg)(\cdot,\omega)dm = 0$.

Обратно, пусть $g \in X'$ и $\int fg = 0$ при всех f из X_A. Найдем в X такую функцию φ, что $\int_{\mathbb{T}} \log |\varphi(\cdot,\omega)| > -\infty$ при п.в. ω, введем „внешнюю“ функцию

$$\Phi(\cdot,\omega) = \exp[\log |\varphi(\cdot,\omega)| + i\mathcal{H}(\log |\varphi(\cdot,\omega)|)] \in X$$

($\mathcal{H}$ — оператор гармонического сопряжения), а затем в равенство $\int fg = 0$ подставим $f(z,\omega) = z^k\Phi(z,\omega)\psi(\omega)$, где $k = 0,1,\ldots$, а ψ — произвольная функция из $L^\infty(\mu)$. Получится, что при п.в. ω функция $g(\cdot,\omega)\Phi(\cdot,\omega)$ (априори лежащая в $L^1(\mathbb{T})$) ортогональна всем мономам z^k, $k = 0,1,\ldots$, т.е. попадает в zH^1. $\bullet$

Банахова решетка X измеримых функций, обладающая свойством Фату, естественным образом изометрически вкладывается в банахово сопряженное $(X')^*$ к решетке X'. Более того, само пространство $(X')^*$ является банаховой решеткой, канонически распадающейся в дизъюнктную сумму $(X')^* = X \oplus L$, где L состоит из так называемых *сингулярных* функционалов. Линейное (вообще говоря, незамкнутое) подпространство $Y \subset X'$ называется *фундаментом*, если его носитель совпадает с основным пространством с мерой (в нашем случае — с $\mathbb{T} \times \Omega$) и оно является идеалом: $f \in Y$, $g \in X$, $|f| \geqslant |g| \implies g \in Y$. Функционалы, лежащие в L — это в точности те, которые обращаются в нуль на некотором фундаменте Y. По поводу материала этого абзаца см. [4, гл. X, §2].

Лемма 5. *Пусть X — решетка на $\mathbb{T} \times \Omega$ со свойством Фату и условием (*) и пусть $\Phi \in (X')^*$, $\Phi = x + l$, где $x \in X$, $l \in L$. Если $\Phi(g) = 0$ при $g \in (X')_A$, то функционалы x и l порознь обладают тем же свойством, т.е. $x \in zX_A$.*

Доказательство. Достаточно проверить, что $x(\cdot,\omega) \in zN_+$ при п.в. ω. Пусть Y — фундамент в X', на котором функционал l обращается в нуль.

Найдем функцию $G \in X'$, для которой $\int_{\mathbb{T}} \log|G(\cdot,\omega)|dm > -\infty$ при п.в. ω, а затем построим „внешнюю“ функцию F по функции $|G|$ как в доказательстве леммы 4. Разумеется, $F \in (X')_A$ и $F(\cdot,\omega)^{-1} \in N_+$ при п. в. ω. Положим $Z = L^\infty(|F|) = L^\infty(m \times \mu) \cdot F$. Тогда $Z_A = H^\infty(m \times \mu) \cdot F$ (через $H^\infty(m \times \mu)$ обозначается пространство $(L^\infty(m \times \mu))_A$). Зададим на $L^\infty(m \times \mu)$ функционалы ψ_1 и ψ_2 формулами $\psi_1(g) = \int gxF = \langle gF, x\rangle$ и $\psi_2(g) = \langle gF, l\rangle$. Функционал ψ_2 сингулярен на $L^\infty(m \times \mu)$, ибо множество $(Y \cap Z) \cdot F^{-1}$ есть фундамент в $L^\infty(m \times \mu)$, на котором ψ_2 обращается в нуль.

Перейдем к пространству S максимальных идеалов алгебры $L^\infty(m \times \mu)$. Тогда эта алгебра отождествляется с $C(S)$, на S возникает мера λ, канонически соответствующая мере $m \times \mu$, функционал ψ_1 порождается мерой σ, абсолютно непрерывной относительно λ, а функционал ψ_2 — мерой ρ, сингулярной относительно λ. При этом $\sigma + \rho \perp H^\infty(\lambda)$ ($H^\infty(\lambda)$ — алгебра, канонически соответствующая алгебре $H^\infty(m \times \mu)$).

Если бы меры μ не было (т.е. мы бы изначально занимались функциями на $\mathbb{T}$), можно было бы применить абстрактную теорему братьев Риссов [9, гл. V, теорема 4.4] и заключить, что меры σ и ρ порознь ортогональны алгебре $H^\infty(\lambda)$. В общем случае на таком пути возникают трудности (мера λ не мультипликативна на $H^\infty(\lambda)$ и т.п.), поэтому мы придем к тому же заключению с помощью варианта леммы Амара и Ледерер: если K — компактное подмножество в S и $\lambda(K) = 0$, то существует множество пика $K_1 \supset K$ для алгебры $H^\infty(\lambda)$ такое, что $\lambda(K_1) = 0$. В случае, когда меры μ нет, доказательство можно найти в [9, гл. V, лемма 5.1]. Введение второй переменной ничего не меняет в том рассуждении.

Пусть $\varepsilon > 0$, K — компактное множество такое, что $|\rho|(S \setminus K) < \varepsilon$ и $\lambda(K) = 0$. В силу сказанного найдутся множество $K_1 \supset K$, $\lambda(K_1) = 0$, и функция $h \in H^\infty(\lambda)$, для которой $h|_{K_1} \equiv 1$ и $|h(s)| < 1$ при $s \notin K_1$. Если $\varphi \in H^\infty(\lambda)$, то $\int_S \varphi h^n d(\sigma + \rho) = 0$, откуда при $n \to \infty$ получаем $\int_{K_1} \varphi d\rho = 0$. Поэтому $|\int_S \varphi d\rho| \leqslant \int_{S\setminus K_1} |\varphi| d|\rho| \leqslant \varepsilon \|\varphi\|_\infty \|\rho\|$, откуда $\rho \perp H^\infty(\lambda)$. Следовательно, и $\sigma \perp H^\infty(\lambda)$, т.е. $xF \in zH^1(m \times \mu)$, так что $x(\cdot,\omega) \in zN_+$ при п.в. ω. •

Лемма 6. *Пусть X — решетка на $\mathbb{T} \times \Omega$ с условием (*) и свойством Фату и пусть $x \in X$. Положим $a = \sup\{|\int xy| : y \in (X')_A, \|y\| \leqslant 1\}$. Тогда найдется функция $f \in X$ такая, что $\|f\| = a$ и $f - x \in zX_A$ (т.е. f порождает тот же функционал на $(X')_A$, что и x).*

Доказательство. Продолжим с сохранением нормы функционал $y \mapsto \int xy$ с $(X')_A$ на X' и разложим получившийся элемент Φ пространства $(X')^*$, как описано перед леммой 5: $\Phi = f + l$, $f \in X$, $l \in L$. Тогда $f - x + l \perp (X')_A$, и по лемме 5 $f - x \in zX_A$. С другой стороны, $\|f\|_X \leqslant \|\Phi\| = a$. •

Следующий важный для нас факт хорошо известен (в гораздо более общем виде) и очень прост, если пространства X' и Y' совпадают с банаховыми сопряженными X^* и Y^*, а пересечение $X \cap Y$ плотно в X и Y. См., например, обзор [2]. Во многих интересных случаях эти условия, однако, нарушаются.

Лемма 7. *Пусть X, Y — решетки измеримых функций на $(\mathbb{T} \times \Omega, m \times \mu)$, в которых выполнены условие $(*)$ и свойство Фату. Следующие условия эквивалентны:*

(a) *пара (X_A, Y_A) K-замкнута в (X, Y);*

(b) *пара $((X')_A, (Y')_A)$ K-замкнута в (X', Y').*

Доказательство. Фактически мы повторим стандартное и естественное рассуждение [2], но применим нестандартные теоремы отделимости. В силу симметрии достаточно проверить лишь, что $(a) \Longrightarrow (b)$. Пусть $f \in (X')_A + (Y')_A$ и $f = f_1 + f_2$, где $f_1 \in X'$, $f_2 \in Y'$. Обозначим $a = \|f_1\|_{X'}$, $b = \|f_2\|_{Y'}$. Нам нужно заменить это разложение элемента f другим, в котором слагаемые имеют те же по порядку нормы, но лежат в $(X')_A$ и $(Y')_A$ соответственно.

Пусть U и V — замкнутые шары с центром в нуле в пространствах $(X')_A$ и $(Y')_A$ с радиусами Ca и Cb. Надо доказать включение $f \in U + V$ при некотором C, не зависящем от участвующих векторов.

Предположим, что $f \notin U + V$. Из леммы 3 и обсуждения перед ней вытекает, что множество $U + V$ $(m \times \mu)$-замкнуто. Как отмечалось в п. 1.2, пространство $X + Y$ обладает свойством Фату. По свойству II, п. 1.2 найдется такой элемент $g \in (X' + Y')' = X \cap Y$, что

$$\left|\int fg\right| > 1 \geqslant \sup\left\{\left|\int(\varphi_1 + \varphi_2)g\right| : \varphi_1 \in U, \varphi_2 \in V\right\}.$$

Если взять здесь верхнюю грань отдельно при условии $\varphi_2 = 0$ и при условии $\varphi_1 = 0$, а затем применить в обоих случаях лемму 6, получится, что существуют функции $\alpha \in X$, $\beta \in Y$ такие, что

$$g - \alpha \in zX_A, \ \|\alpha\|_X \leqslant (Ca)^{-1}; \quad g - \beta \in zY_A, \ \|\beta\|_Y \leqslant (Cb)^{-1}.$$

Мы видим, что $\alpha - \beta \in zX_A + zY_A$, так что по условию (a) можно записать $\alpha - \beta = s - t$, где $s \in zX_A$, $t \in zY_A$, $\|s\|_X \leqslant D(Ca)^{-1}$, $\|t\|_Y \leqslant D(Cb)^{-1}$ (D — постоянная, связанная с K-замкнутостью в условии (a)). Для функции $h = \alpha + s = \beta + t$ выполняются соответствующие оценки как в X, так и в Y: $\|h\|_X \leqslant (D+1)(Ca)^{-1}$, $\|h\|_Y \leqslant (D+1)(Cb)^{-1}$, и она порождает на $(X')_A + (Y')_A$ тот же функционал, что и g. Теперь имеем

$$1 < \left|\int fg\right| = \left|\int fh\right| \leqslant \left|\int f_1 h\right| + \left|\int f_2 h\right| \leqslant 2(D+1)C^{-1},$$

что невозможно при $C \geqslant 2(D+1)$. •

§2. Приложения

2.1. Из всего, что мы собираемся доказать, по настоящему трудна лишь импликация 2) $\Longrightarrow$ 1) в теореме 1. Ею мы займемся в следующем параграфе. Собственно, эта импликация и есть главный результат статьи. Сейчас мы обсудим ее приложения, к которым отнесем, среди прочего, и теорему 2, и импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2) в теореме 1.

Доказательство теоремы 2. Предположим, что решетка X ВМО-регулярна. В силу примера 5° во Введении решетка $X(l^\infty(\mathbb{Z}))$ тоже ВМО-регулярна. Пространством, порядково сопряженным с L^∞_λ, является $L^1(\mathbb{T}\times\Omega\times\mathbb{Z}, w_\lambda)$; его мы обозначим через L^1_λ. Положим $H^1_\lambda = (L^1_\lambda)_A$. В силу замечания после примера 3° во Введении, пространство L^1_λ тоже ВМО-регулярно, а тогда, как уже отмечалось, пара $(X_A(l^\infty(\mathbb{Z})), H^1_\lambda)$ K-замкнута относительно пары $(X(l^\infty(\mathbb{Z})), L^1_\lambda)$ [2]. Из леммы 7 выводим теперь K-замкнутость пары $(X'_A(l^1(\mathbb{Z})), H^\infty_\lambda)$ относительно $(X'(l^1(\mathbb{Z})), L^\infty_\lambda)$. Остается сослаться на принятую нами импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1) в теореме 1, а также заметить, что пространства X и X' равноправны, ибо $X'' = X$. •

Следствие. *Если пространство X на $(\mathbb{T}\times\Omega, m\times\mu)$ ВМО-регулярно и мера μ дискретна, то пространство $X(l^r)$ ВМО-регулярно при $0 < r < \infty$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда $X = L^\infty(m\times\mu)$ (в частности, передокажем утверждение примера 6° во Введении). Пример 3° позволяет считать, что $r > 1$, а теорема 2 — перейти к вопросу о ВМО-регулярности двойственного пространства $L^1(l^{r'})$. Снова в силу примера 3° вместо этого можно заняться пространством $L^2(l^{2r'})$, которое действительно ВМО-регулярно в силу примера 1°.

В общем случае пусть $f = \{f_n\} \in X(l^r)$. Положим $g = (\Sigma|f_n|^r)^{1/r} \in X$ и найдем ВМО-мажоранту G для g в X: $G \geqslant |g|$, $\|G\|_X \leqslant C\|g\|_X$, $\|\log G(\cdot,\omega)\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant C$. Элемент f имеет норму не выше единицы в пространстве $L^\infty(l^r; G)$, которое ВМО-регулярно в силу первой части доказательства и примера 2°. Найдем ВМО-мажоранту $h = \{h_n\}$ для f в этом пространстве. Тогда, в частности, $(\Sigma_n|h_n(\zeta,\omega)|^r)^{1/r} \leqslant C'G(\zeta,\omega)$ п.в., откуда $\|h\|_{X(l^r)} \leqslant C\|G\|_X \leqslant C''\|g\|_X = C''\|f\|_{X(l^r)}$. •

Теперь импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) в теореме 1 (с любыми λ и r) получается просто потому, что при условии 1) обе решетки $X(l^r)$ и L^∞_λ ВМО-регулярны.

2.2. Пространства с порядково абсолютно непрерывной нормой. Так называются банаховы решетки X измеримых функций, в которых выполнен аналог теоремы Лебега:

$$f_n \to 0 \text{ п.в.}, \ |f_n| \leqslant f \in X \Longrightarrow \|f_n\|_X \to 0.$$

Такое бывает тогда и только тогда, когда $X' = X^*$, а в случае сепарабельной меры (как у нас) — тогда и только тогда, когда пространство X сепарабельно [4, гл. IV, §3, теорема 3; гл. VI, §1, следствие 1]. Что касается взаимоотношений этого свойства со свойством Фату, то все четыре мыслимые возможности действительно реализуются.

Сформулируем аналоги теорем 1 и 2 для решеток с порядково абсолютно непрерывной нормой. По-прежнему считаем меру μ дискретной.

Теорема 1′. *Пусть X — решетка с порядково абсолютно непрерывной нормой, удовлетворяющая условию $(*)$. Следующие утверждения равносильны:*

1) *решетка X'* BMO-*регулярна;*

2) *для некоторых (эквивалентным образом, для всех) $s \in (1, \infty]$ и $\lambda > 1$ пара $(X_A(l_n^s), H_\lambda^1)$ K-замкнута в $(X(l_n^s), L_\lambda^1)$ с константой, не зависящей от n.*

Теорема 2′. *Если решетка X с порядково абсолютно непрерывной нормой удовлетворяет условию $(*)$ и* BMO-*регулярна, то* BMO-*регулярны решетки X' и X''.*

Доказательство теоремы 1′. Достаточно проверить, что условие 2) этой теоремы равносильно условию 2) теоремы 1 с X' вместо X и с $r = s'$. Это вытекает из соображений двойственности — вместо леммы 7 нужно использовать результат для банаховых сопряженных, упомянутый перед ее формулировкой [2, лемма 1.2]. От конечномерных пространств $l_n^{s'}$ можно перейти к бесконечномерным, взяв подходящие w^*-предельные точки и воспользовавшись тем, что в X' выполнено свойство Фату, а оценки равномерны по n. •

Замечание. Условие 2) в теореме 2′ можно было бы сразу формулировать для бесконечномерных пространств l^s (вместо l_n^s), только в случае $s = \infty$ нужно было бы использовать не l^∞, а c_0.

Доказательство теоремы 2′. Если пространство X BMO-регулярно, то таково же и $X(l^2)$ ввиду следствия, доказанного в предыдущем пункте (подчеркнем, что в том следствии не требуется, чтобы пространство X обладало свойством Фату). Поэтому выполнено условие 2) теоремы 1′ при $s = 2$, так что решетка X' BMO-регулярна. BMO-регулярность решетки X'' вытекает теперь из теоремы 2. Можно было бы также проверить условие 2) теоремы 1′ с $s = \infty$, опираясь на пример 5° во Введении. •

2.3. Ограниченность оператора $\mathcal{H}$. Напомним, что пространство $X^{1-s}Y^s$ определено при $0 < s < 1$ для любых банаховых решеток X и Y измеримых функций на одном и том же пространстве с мерой. Оно банахово и $(X^{1-s}Y^s)' = (X')^{1-s}(Y')^s$ (см., например, [6, теорема 2]). Удобно ввести еще квазибанахову решетку $XY = \{xy : x \in X, y \in Y\}$, снабженную квазинормой $\|f\| = \inf\{\|x\|\|y\| : xy = f, x \in X, y \in Y\}$. Очевидно, эта решетка BMO-регулярна, если таковы X и Y. Пространство $X^{1-s}Y^s$, разумеется, совпадает с произведением решеток X^{1-s} и Y^s. Всегда $XX' = L^1$ (см. [6,7]).

Начнем со вспомогательного утверждения, которое интересно само по себе.

Лемма 8. *Пусть X и Y — решетки измеримых функций на $\mathbb{T} \times \Omega$, удовлетворяющие условию $(*)$, и пусть $0 < s < 1$. Предположим, что X обладает свойством Фату, а Y либо обладает свойством Фату, либо имеет порядково абсолютно непрерывную норму. Если решетки $X^{1-s}Y^s$ и Y* BMO-*регулярны, то и решетка X* BMO-*регулярна.*

Доказательство. По теоремам 2 и 2′ решетка Y' BMO-регулярна, а тогда такова же и решетка $X^{1-s}Y^s(Y')^s = X^{1-s}(L^1)^s$. Следовательно, BMO-регулярна и двойственная с ней решетка $(X')^{1-s}(L^\infty)^s = (X')^{1-s}$, а значит, и решетка X'. Осталось еще раз сослаться на теорему 2. •

При дополнительном условии суперрефлексивности пространства X лемма 8 была доказана в [1] иным методом.

Теорема 3. *Пусть X — решетка измеримых функций на пространстве $\mathbb{T} \times \Omega$, удовлетворяющая условию $(*)$ и обладающая свойством Фату. Следующие утверждения равносильны:*

1) *решетка X* BMO-*регулярна;*
2) *оператор $\mathcal{H}$ ограничен в пространстве $((X^\alpha)')^{1/2}$ при всех достаточно малых $\alpha > 0$;*
3) *то же самое, но при каком-то одном α, $0 < \alpha \leqslant 1$;*
4) *оператор $\mathcal{H}$ ограничен в пространстве $X^{1-s}(L^2)^s$ для некоторого s, $0 < s < 1$.*

Эквивалентность условий 1) и 4) была доказана в [1] при дополнительном условии q-вогнутости нормы пространства X для некоторого $q < \infty$. Фактически, эквивалентность условий 1)–3) была впервые установлена в [3], однако ровно такая формулировка появилась лишь в обзоре [2]. В [3,2] доказательство импликации 3) $\Longrightarrow$ 1) опиралось на теорему Гротендика, так что его нельзя считать простым. С этим контрастирует следующее рассуждение (нужно, однако, иметь в виду, что оно опирается на материал §3).

Доказательство импликаций 3) $\Longrightarrow$ 1) и 4) $\Longrightarrow$ 1). В силу примера 1° во Введении, либо пространство $((X^\alpha)')^{1/2}$, либо пространство $X^{1-s}(L^2)^s$ BMO-регулярно. В первом случае достаточно применить теорему 2 и (дважды) пример 3°, а во втором — сослаться на лемму 8.

Ради полноты воспроизведем доказательство импликации 1) $\Longrightarrow$ 2). Известно [9], что если $\log v \in \mathrm{BMO}$, то при $0 < \alpha \leqslant \alpha_0$ (где α_0 зависит лишь от величины $\|\log v\|_{\mathrm{BMO}}$) функция v^α удовлетворяет условию Хелсона–Сегё, т.е.

оператор $\mathcal{H}$ ограничен в $L^2(v^\alpha)$; более того, его норма в этом пространстве тоже зависит лишь от величины $\|\log v\|_{\mathrm{BMO}}$. Пусть $f \in X$, w — BMO-мажоранта для f в X, а $\alpha_0 \leqslant 1$ — число, о котором только что говорилось, обслуживающее все функции $w(\cdot,\omega)$, $\omega \in \Omega$. Имеем при $\alpha \leqslant \alpha_0$

$$\begin{aligned}&\int\int |\mathcal{H}g|^2|f|^\alpha dm\,d\mu\\&\quad\leqslant \int\int |\mathcal{H}g|^2 w^\alpha dm\,d\mu \leqslant C\int\int |g|^2 w^\alpha dm\,d\mu \leqslant C\||g|^2\|_{(X^\alpha)'}\|w^\alpha\|_{X^\alpha}\\&\quad\leqslant C'\||g|^2\|_{(X^\alpha)'}\||f|^\alpha\|_{X^\alpha},\end{aligned}$$

а это и есть непрерывность оператора $\mathcal{H}$ в $((X^\alpha)')^{1/2}$.

Импликация 3) $\Longrightarrow$ 4). Так как $\alpha \leqslant 1$, то решетка X^α банахова. Далее, оператор $\mathcal{H}$ ограничен в $L^p(dm\,d\mu)$ при $1 < p < \infty$. Пусть еще $1 < r < \infty$ (значения параметров p и r уточним потом). Комплексная интерполяция между $((X^\alpha)')^{1/2}$ и L^p с параметром β, $0 < \beta < 1$, дает [10, гл. IV, теорема 1.14] ограниченность оператора $\mathcal{H}$ в пространстве

$$((X^\alpha)')^{\frac{1-\beta}{2}}(L^p)^\beta = ((X^\alpha)')^{\frac{1-\beta}{2}}(L^r)^{\frac{r}{p}\beta}.$$

Потребуем, чтобы сумма показателей в правой части формулы была равна 1, и перейдем к двойственному пространству. Получится ограниченность оператора $\mathcal{H}$ в пространстве

$$X^{\frac{\alpha(1-\beta)}{2}}(L^{r'})^{\frac{r\beta}{p}} = X^{\frac{\alpha(1-\beta)}{2}}(L^2)^{2(\frac{r}{p}-\frac{1}{p})\beta}.$$

Утверждение будет доказано, если мы сможем добиться того, чтобы и в этой формуле показатели в правой части в сумме давали 1. Два условия, наложенные на параметры, преобразуются к виду

$$\frac{r}{p} = \frac{1+\beta}{2\beta}, \quad p = \frac{4\beta}{\alpha(1-\beta)+2\beta};$$

при β, близком к 1, эти формулы дают $r > p > 1$, чем оправдываются проведенные построения. •

§3. Доказательство основного результата

Приступим к доказательству импликации 2) $\Longrightarrow$ 1) в теореме 1. Начнем с переформулировки условия $\log a \in \mathrm{BMO}$. Пусть a — неотрицательная функция на $\mathbb{T}\times\Omega$. Последовательность $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ функций из $H^\infty(m\times\mu)$ называется *аналитическим разложением единицы, подчиненным весу* a, если найдутся постоянные $C > 0$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$ и $\gamma > 1$ такие, что

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\varphi_j|^\varepsilon \leqslant C \quad \text{п.в.}; \tag{4}$$

$$|\varphi_j|^\varepsilon a \leqslant C\gamma^j, \quad j \in \mathbb{Z}; \tag{5}$$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\varphi_j|^\varepsilon \gamma^j \leqslant Ca; \tag{6}$$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \varphi_j = 1. \tag{7}$$

Мы будем еще употреблять выражение „вес a допускает аналитическое разложение единицы“.

Как показано в [11], для данного a постоянную ε всегда можно уменьшить (с тем же γ, но иным C и другими функциями φ_j), так что конкретное ее значение не играет роли (в [11] с технической точки зрения было удобно взять $\varepsilon = 1/8$).

Лемма 9. *Существование аналитического разложения единицы, подчиненного весу* a, *эквивалентно равномерной ограниченности* BMO-*норм функций* $\zeta \mapsto \log a(\zeta, \omega)$, $\omega \in \Omega$.

Этот факт был доказан в [11] для случая одной переменной (т.е. пространства $(\mathbb{T}, m)$ в качестве основного пространства с мерой) и $\gamma = 2$. Те же рассуждения годятся при произвольном $\gamma > 1$. В случае двух переменных, если мера μ дискретна (как у нас), достаточно формальной ссылки на результат для пространства $(\mathbb{T}, m)$. Для произвольной меры μ надо повторить доказательство из [11] с соответствующими изменениями. Для дальнейшего существенно, что величина $A = \operatorname{ess\,sup}_{\omega\in\Omega} \|\log a(\cdot, \omega)\|_{\mathrm{BMO}}$ оценивается в терминах постоянных γ, ε и C в (4)–(7). Обратно, при фиксированных $\gamma > 1$ и $\varepsilon \in (0, 1]$ величина C оценивается через A.

Итак, пусть выполнено условие 2) теоремы 1. В силу сказанного выше для каждой функции $f \in X$, $f \geqslant 0$, достаточно указать мажоранту $a \in X$ такую, что $\|a\| \leqslant C'\|f\|$, а вес a^r допускает аналитическое разложение единицы с некоторыми γ, ε и C, зависящими только от X (разумеется, постоянная C' тоже не должна зависеть от f).

В конечном итоге это будет сделано с помощью теоремы Ки Фана—Какутани о неподвижной точке для многозначных отображений.

Теорема Ки Фана—Какутани [12]. *Пусть K — выпуклый компакт в локально-выпуклом пространстве, а Φ — отображение множества K в совокупность непустых выпуклых замкнутых подмножеств в K. Предположим, что график*

$\{(x,y) : x \in K, y \in \Phi(x)\}$ *этого отображения замкнут. Тогда найдется такая точка* $x \in K$, *что* $x \in \Phi(x)$.

Именно при проверке условий этой теоремы для некоторого отображения Φ нам понадобится дискретность меры μ.

Без потери общности в дальнейшем мы можем ограничиться функциями $f \in X$, $f \geqslant 0$, для которых $\log f(\cdot,\omega) \in L^1(\mathbb{T})$, $\omega \in \Omega$. Для такой функции f положим $f_n = (f \vee \lambda^n)^{1/2}$ (λ — постоянная из теоремы 1) и введем внешнюю функцию F_n, удовлетворяющую равенству $|F_n| = f_n$ п.в.:

$$F_n(\cdot,\omega) = \exp[\log f_n(\cdot,\omega) + i\mathcal{H}(\log f_n(\cdot,\omega))].$$

Рассмотрим последовательность $\{\lambda^{n/2}F_n\}$ и покажем, что она лежит в сумме $X(l^r) + L^\infty_\lambda$ (см. обозначения перед теоремой 1). Действительно, $\lambda^{n/2}F_n = \alpha_n + \beta_n$, где $\beta_n = \lambda^{n/2}F_n\chi_{\{f>\lambda^n\}}$. Тогда $|\alpha_n| \leqslant \lambda^n$, т.е. $\|\{\alpha_n\}\|_{L^\infty_\lambda} \leqslant 1$. Далее, обозначив $e_k = \{\lambda^k < f \leqslant \lambda^{k+1}\}$, найдем

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\beta_n|^r &\leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda^{nr/2} \sum_{k\geqslant n} \lambda^{(k+1)r/2}\chi_{e_k} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{n\leqslant k} \lambda^{\frac{nr}{2}}\lambda^{\frac{(k+1)r}{2}}\chi_{e_k}\\ &\leqslant \frac{\lambda^r}{\lambda^{r/2}-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\lambda^{kr}\chi_{e_k}\\ &\leqslant (Cf)^r,\end{aligned}$$

где C зависит лишь от λ и r. Отсюда $\|\{\beta_k\}\|_{X(l^r)} \leqslant C\|f\|_X$.

В силу K-замкнутости (см. утверждение 2 в теореме 1) функции α_n и β_n можно заменить аналитическими примерно с теми же оценками. Иными словами, существует представление $\lambda^{n/2}F_n = g_n + h_n$, где $g_n \in H^\infty(m \times \mu)$, $h_n \in X_A$,

$$|g_n| \leqslant C\lambda^n, \quad \|(\Sigma|h_n|^r)^{1/r}\|_X \leqslant C\|f\|_X.$$

Тогда $1 = \lambda^{-n/2}F_n^{-1}g_n + \lambda^{-n/2}F_n^{-1}h_n \overset{\text{def}}{=} p_n + q_n$. Возведя в квадрат, получим $1 = P_n + Q_n$, где $P_n = p_n^2$, $Q_n = q_n(2p_n + q_n)$.

Функции p_n и q_n (а с ними и P_n, Q_n) лежат в классе Смирнова по первой переменной. Так как $|F_n| \geqslant \lambda^{n/2}$, то $|p_n| \leqslant C$ (следовательно, $|q_n| \leqslant C+1$) и $\lambda^n|1-P_n| = \lambda^n|Q_n| \leqslant C'\lambda^n|q_n| \leqslant C'|h_n|$, откуда

$$\left\|\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\lambda^{nr}|1-P_n|^r\right)^{1/r}\right\|_X \leqslant C_1\|f\|_X.$$

Наконец, $|P_n|f = \lambda^{-n}f_n^{-2}f|g_n|^2 \leqslant C^2\lambda^n$.

Резюмируем результат проведенных рассуждений в виде леммы.

Лемма 10. *Существует такая постоянная $A > 0$, что для всякой функции $f \geqslant 0$ из единичного шара пространства X, удовлетворяющей условию $\int \log f(\cdot,\omega)dm > -\infty$, $\omega \in \Omega$, найдутся функции $U_n \in H^\infty(m \times \mu)$ $(n \in \mathbb{Z})$ со следующими свойствами:*

$$|U_n|f \leqslant A\lambda^n, \quad |U_n| \leqslant A, \quad \left\|\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda^{nr}|1-U_n|^r\right)^{1/r}\right\|_X \leqslant A. \tag{8}$$

Обозначим совокупность всех таких последовательностей $\{U_n\}$ через $K(f)$. Это — непустое выпуклое подмножество пространства $H^\infty(l^\infty)$, содержащееся в шаре радиуса A с центром в нуле. Далее, множество $K(f)$ замкнуто (и, следовательно, компактно) в w^*-топологии пространства $H^\infty(l^\infty)$. Действительно, на любом шаре эта топология метризуема. Пусть $\{U_n^{(k)}\}_{n\in\mathbb{Z}} \in K(f)$, $k = 1,2,\ldots$, и $U_n^k \xrightarrow{w^*} U_n$ при $k \to \infty$. Перейдя к выпуклым комбинациям и применив диагональный процесс, мы можем обеспечить сходимость в L^2 на каждом множестве конечной меры, а затем и сходимость п.в. Неравенства (8) выдерживают сходимость п.в. ввиду свойства Фату в пространстве X.

Теперь зафиксируем функцию $b \in X$, $b \geqslant 0$, $\|b\| = 1/2$, такую, что $\log b(\cdot,\omega) \in L^1(\mathbb{T})$ при $\omega \in \Omega$, и построим требуемую мажоранту для такой функции b. Для этого зададим отображение Φ множества $K(b)$ в совокупность его w^*-компактных выпуклых подмножеств следующим образом: для последовательности $U = \{U_n\} \in K(b)$ положим $\Phi(U) = K(f)$, где

$$f = b + \frac{1}{2A}\left(\sum_n \lambda^{nr}|1-U_n|^r\right)^{1/r}.$$

Это определение корректно, так как, во-первых, $\|f\| \leqslant 1$ (см. последнее неравенство в (8)), а во-вторых, — множество $K(f)$ действительно содержится в $K(b)$, поскольку $f \geqslant b$.

Покажем, что график отображения Φ замкнут. Пусть $U^k = \{U_j^{(k)}\}_{j\in\mathbb{Z}} \in K(b)$, $u^k = \{u_j^{(k)}\}_{j\in\mathbb{Z}} \in \Phi(U^k)$, причем $U^k \to U = \{U_j\}$, $u^{(k)} \to u = \{u_j\}$ в w^*-топологии пространства $H^\infty(m \times \mu, l^\infty)$ при $k \to \infty$. Надо доказать, что $u \in \Phi(U)$. Нетривиальна лишь проверка того, что в неравенстве

$$|u_j^{(k)}|\left[b + \frac{1}{2A}\left(\sum_n \lambda^{nr}|1-U_n^{(k)}|^r\right)^{1/r}\right] \leqslant \lambda^j A, \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{9}$$

можно перейти к пределу при $k \to \infty$. Заметим, однако, что w^*-сходимость в $H^\infty(\mathbb{T})$ влечет равномерную сходимость на компактах внутри круга и что соотношения $w^*\text{-}\lim_{k\to\infty} u_j^{(k)}(\cdot,\omega) = u_j(\cdot,\omega)$ и $w^*\text{-}\lim_{k\to\infty} U_j^{(k)}(\cdot,\omega) = U_j(\cdot,\omega)$ *справедливы при каждом* ω ввиду дискретности меры μ. Если ввести внешнюю функцию $B(\cdot,\omega) = \exp(\log b(\cdot,\omega) + i\mathcal{H}(\log b(\cdot,\omega)))$, нам останется переписать соотношение (9) в виде

$$|u_j^{(k)}(z,\omega)B(z,\omega)| + \frac{1}{2A}\Big[\sum_n \lambda^{nr}|u_j^{(k)}(z,\omega)(1-U_n^{(k)}(z,\omega))|^r\Big]^{1/r} \leqslant \lambda^j A$$

при $|z|<1$ и $\omega\in\Omega$, перейти здесь к пределу при $k\to\infty$, а затем устремить z к единичной окружности вдоль радиусов.

Теперь можно применить теорему Ки Фана—Какутани: найдется последовательность $U=\{U_j\}_{j\in\mathbb{Z}}\in K(b)$ такая, что $U\in\Phi(U)$, т.е.

$$|U_j|\leqslant A,\quad j\in\mathbb{Z}; \tag{10}$$

$$\Big\|\Big(\sum_n \lambda^{nr}|1-U_n|^r\Big)^{1/r}\Big\|_X \leqslant A; \tag{11}$$

$$|U_j|\Big[b+\frac{1}{2A}\Big(\sum_n \lambda^{nr}|1-U_n|^r\Big)^{1/r}\Big] \leqslant A\lambda^j,\quad j\in\mathbb{Z}. \tag{12}$$

Положим $V_j = 1-U_j$, зафиксируем натуральное число $k\geqslant 4r$ и возведем равенство $1=U_j+V_j$ в степень $2k$. В результате получится $1=U_j^k\alpha_j+V_j^k\beta_j$, где $\alpha_j,\beta_j\in H^\infty(m\times\mu)$ и $|\alpha_j|,|\beta_j|\leqslant C=C(A,k)$ в силу (10). Обозначим слагаемые в этом представлении единицы через s_j и t_j. Положим $\varphi_j=s_j-s_{j-1}=t_{j-1}-t_j$, и пусть

$$a = b+\frac{1}{2A}\Big(\sum_n \lambda^{nr}|\varphi_n|^{1/4}\Big)^{1/r}.$$

Проверим, что a является искомой мажорантой для b. Во-первых,

$$|\varphi_n|^{1/4}\leqslant|t_{n-1}|^{1/4}+|t_n|^{1/4}\leqslant C(|V_{n-1}|^r+|V_n|^r)=C(|1-U_{n-1}|^r+|1-U_n|^r); \tag{13}$$

поэтому в силу оценки (11) $\|a\|_X\leqslant\|b\|_X+C\leqslant C'\|b\|_X$, ибо $\|b\|_X=2^{-1}$. Убедимся в том, что функции $\{\varphi_j\}$ образуют аналитическое разложение единицы, подчиненное весу a^r. Неравенство $\sum_n\lambda^{nr}|\varphi_n|^{1/4}\leqslant Ca^r$ очевидно. Далее, $|\varphi_j|^{1/4}\leqslant|s_j|^{1/4}+|s_{j-1}|^{1/4}$, поэтому

$$|\varphi_j|^{1/4}a^r\leqslant C(|U_j|^r+|U_{j-1}|^r)a^r\leqslant C'\lambda^{jr}$$

в силу оценок (12) и (13). Тем самым проверены условия (5) и (6) для веса a^r с $\gamma=\lambda^r$ и $\varepsilon=4^{-1}$. Тогда неравенство (4) для a^r выполняется с $\varepsilon=2^{-1}$:

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\varphi_j|^{1/2}a^r\leqslant C\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\varphi_j|^{1/4}\lambda^{jr}\leqslant C'a^r.$$

Наконец, $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\varphi_n=1$ п.в. (равенство (7)), ибо $s_j\to0$ при $j\to-\infty$ (см. (12)) и $s_j\to1$ при $j\to\infty$ (см. (11)).

Благодарность. Автор признателен А. Б. Александрову, указавшему на некоторые неточности в первоначальном варианте статьи.

Список литературы

[1] Kalton N. J., *Complex interpolation of Hardy-type subspaces*, Math. Nachr. **171** (1995), 227–258.

[2] Kislyakov S. V., *Interpolation of H^p-spaces: some recent developments*, Function Spaces, Interpolation Spaces, and Related Topics (Haifa, Israel, 1995), Israel Math. Conf. Proc., vol. 13, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1999, pp. 102–140.

[3] Rubio de Francia J. L., *Linear operators in Banach lattices and weighted L^2 inequalities*, Math. Nachr. **133** (1987), 197–209.

[4] Канторович Л. В., Акилов Г. П., *Функциональный анализ*, изд. 2-е, перераб., Наука, М., 1977.

[5] Привалов И. И., *Граничные свойства аналитических функций*, ГИТТЛ, М.-Л., 1950.

[6] Лозановский Г. Я., *О некоторых банаховых структурах*, Сиб. мат. ж. **10** (1969), №3, 584–599.

[7] Gillespie T. A., *Factorization in Banach function spaces*, Indag. Math. **43** (1981), 287–300.

[8] Бухвалов А. В., Лозановский Г. Я., *О замкнутых по мере множествах в пространствах измеримых функций*, Тр. Моск. мат. о-ва **34** (1977), 129–150.

[9] Гарнетт Дж., *Ограниченные аналитические функции*, Мир, М., 1984.

[10] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М., *Интерполяция линейных операторов*, Наука, М., 1978.

[11] Kislyakov S. V., *Bourgain's analytic projection revisited*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), 3307–3314.

[12] Fan Ky, *Fixed-point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **38** (1952), 121–126.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
191011, Санкт-Петербург
наб. р. Фонтанки, 27
Россия
E-mail: skis@pdmi.ras.ru

Поступило 5 ноября 2001 г.