В. Ф. Кириченко, А. В. Никифорова, О голоморфно-проективных преобразованиях почти эрмитовых структур,
УМН, 2001, том 56, выпуск 6, 149–150

О ГОЛОМОРФНО-ПРОЕКТИВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ПОЧТИ ЭРМИТОВЫХ СТРУКТУР

В. Ф. Кириченко, А. В. Никифорова

Хорошо известно [1], [2], что келеровы многообразия не допускают нетривиальных проективных (в иной терминологии, геодезических) преобразований метрики, сохраняющих комплексную структуру. В связи с этим внимание многих исследователей обратилось к комплексному аналогу проективных преобразований, так называемым *голоморфно-проективным преобразованиям* келеровых структур, т.е. таким преобразованиям, которые сохраняют голоморфные почти геодезические (в иной терминологии, аналитически планарные кривые) и комплексную структуру келерова многообразия. Понятие голоморфно-проективного преобразования было введено Оцуки и Тасиро в 1954 г. [3] и с тех пор многократно исследовалось с различных точек зрения. Однако до настоящего времени эти исследования велись почти исключительно в рамках геометрии келеровых многообразий, хотя понятие голоморфно-проективного преобразования имеет смысл для любого почти эрмитова многообразия.

В настоящей заметке приведен ряд результатов, полученных авторами и касающихся голоморфно-проективных преобразований произвольных почти эрмитовых структур.

Пусть $(M^{2n}, J, g, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ – почти эрмитово многообразие, $J^2 = -\mathrm{id}$, $\langle JX, JY\rangle = \langle X, Y\rangle$; $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, где $\mathfrak{X}(M)$ – $C^\infty(M)$-модуль гладких векторных полей на M. Пусть $\Omega(X,Y) = \langle X, JY\rangle$ – фундаментальная форма структуры, ξ – вектор Ли, т.е. вектор, дуальный форме Ли

$$\omega = \frac{1}{n-1}\delta\Omega\circ J,$$

где δ – оператор кодифференцирования. Введем в рассмотрение двуместный эндоморфизм T модуля $\mathfrak{X}(M)$ формулой

$$T(X,Y) = \frac{1}{4}\big(\nabla_{JX}(J)Y + \nabla_X(J)(JY)\big).$$

Он называется *композиционным тензором присоединенной Q-алгебры* [4]. Пусть $g \to \widetilde{g}$ – голоморфно-проективное преобразование почти эрмитовой структуры, ∇ и $\widetilde{\nabla}$ – римановы связности метрик g и $\widetilde{g}$ соответственно, $\mathscr{T}$ – тензор аффинной деформации от связности ∇ к связности $\widetilde{\nabla}$.

Предложение. *В принятых обозначениях*

$$\mathscr{T}(X,Y) = \psi(X)Y + \psi(Y)X + \sigma(X)JY + \sigma(Y)JX; \qquad X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

где ψ и σ – подходящие ковекторы на M.

Определение. Голоморфно-проективное преобразование почти эрмитовой структуры назовем *допустимым*, если $\psi = \sigma\circ J$, и *тривиальным*, если $\psi = \sigma = 0$.

Например, классическое голоморфно-проективное преобразование келеровой структуры, сохраняющее свойство келеровости, всегда допустимо [5]. Более того, нами доказана

Теорема 1. *Голоморфно-проективное преобразование почти эрмитовой структуры со знакоопределенной метрикой всегда допустимо.*

В дальнейшем все рассматриваемые голоморфно-проективные преобразования предполагаются допустимыми.

Теорема 2. *Тензоры ∇J, T и ω являются инвариантами голоморфно-проективных преобразований.*

Поднимая индекс у метрики $\widetilde{g}$ посредством метрики g, мы приходим к самосопряженному эндоморфизму f модуля $\mathfrak{X}(M)$, задаваемому тождеством

$$\widetilde{g}(X,Y) = g(X, fY); \qquad X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

который назовем *оператором голоморфно-проективной деформации.*

Напомним [6], что Греем и Хервеллой естественным образом выделены 16 классов почти эрмитовых структур классического типа. Именно, пусть V – $2n$-мерное вещественное линейное пространство, в котором фиксирована эрмитова структура $(J, g = \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle)$. Грей и Хервелла доказали, что унитарная группа $U(n)$ вполне приводимо действует на пространстве W тензоров типа $(3,0)$ линейного пространства V, обладающих определенными свойствами симметрии, и нашли четыре неприводимые компоненты W_1–W_4 этого действия, так что $W = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$. Тем самым в пространстве W внутренним образом определено 16 подпространств, инвариантных относительно этого действия. Оказывается, тензор $\nabla\Omega$ в каждой точке почти эрмитова многообразия принадлежит пространству W. Почти эрмитова структура по Грею–Хервелле принадлежит одному из 16 классов, если тензор $\nabla\Omega$ лежит в соответствующем инвариантном подпространстве в каждой точке многообразия. Эти классы обозначаются как соответствующие им подпространства пространства W. Например, класс $\mathscr{K}$ келеровых структур в этой системе обозначается $\{0\}$, класс $Q\mathscr{K}$ квазикелеровых структур – $W_1 \oplus W_2$, класс $\mathscr{H}$ эрмитовых структур – $W_3 \oplus W_4$, и т.п. Система классов Грея–Хервеллы в известном смысле является полной и охватывает все ранее изучавшиеся классы почти эрмитовых структур. Грей и Хервелла получили аналитические признаки принадлежности почти эрмитовой структуры соответствующему классу [6].

Нами получены следующие результаты:

Теорема 3. *Классы $\{0\}$, W_1, W_3, $W_1 \oplus W_2$, $W_1 \oplus W_3$, $W_3 \oplus W_4$, $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$, $W_1 \oplus W_3 \oplus W_4$ почти эрмитовых структур инвариантны относительно голоморфно-проективных преобразований. Почти эрмитовы структуры классов W_2, W_4, $W_1 \oplus W_4$, $W_2 \oplus W_3$ при голоморфно-проективных преобразованиях переходят в почти эрмитовы структуры классов $W_1 \oplus W_2$, $W_3 \oplus W_4$, $W_1 \oplus W_3 \oplus W_4$, $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ соответственно. Почти эрмитовы структуры классов $W_2 \oplus W_4$, $W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$ и $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ могут переходить в почти эрмитовы структуры любого класса. При этом структуры классов W_2, $W_2 \oplus W_3$, $W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$ переходят в структуры того же класса тогда и только тогда, когда композиционный тензор f-билинеен. Структуры классов W_4, $W_1 \oplus W_4$, $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ переходят в структуры того же класса тогда и только тогда, когда голоморфно-проективное преобразование тривиально в области, где $\xi \neq 0$. Структура класса $W_2 \oplus W_4$ переходит в структуру того же класса тогда и только тогда, когда голоморфно-проективное преобразование тривиально в области, где $\xi \neq 0$, а композиционный тензор f-билинеен.*

Теорема 4. *Собственные почти эрмитовы структуры классов W_4, $W_1 \oplus W_4$, $W_2 \oplus W_4$ и $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ не допускают нетривиальных голоморфно-проективных преобразований.*

Здесь под собственной почти эрмитовой структурой понимается почти эрмитова структура данного класса, не лежащая в каком-либо его подклассе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] W. J. Westlake // Proc. Amer. Math. Soc. 1954. V. 5. №2. P. 301–303. [**2**] K. Yano // C. R. Acad. Sci. Paris. 1956. V. 239. P. 1346–1348. [**3**] T. Otsuki, Y. Tashiro // Math. J. Okayama Univ. 1954. V. 4. №1. P. 57–78. [**4**] V. F. Kirichenko // Geom. Dedicata. 1994. V. 51. P. 75–104. [**5**] Н. С. Синюков. Геодезические отображения римановых пространств. М.: Наука, 1979. [**6**] A. Gray, L. M. Hervella // Ann. Math. Pure Appl. 1980. V. 123. №4. P. 35–58.

Московский педагогический государственный университет

Принято редколлегией 24.09.2001