

УДК 519.71

Критерии неповторности булевых функций в предэлементарных базисах ранга 3

© 2005 г. Н. А. Перязев, И. К. Шаранхаев

Изучается формульное представление булевых функций. В терминах остаточных функций описаны классы неповторных булевых функций в предэлементарных базисах

$$\{\vee, \cdot, -, 0, 1, x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3\}, \quad \{\vee, \cdot, -, 0, 1, x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_2 x_3\}, \\ \{\vee, \cdot, -, 0, 1, x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_2 \bar{x}_3\}.$$

1. Введение

На протяжении статьи под базисами понимаются конечные полные множества булевых функций, содержащие константы.

Булева функция f называется неповторной в базисе B , если ее можно представить в этом базисе формулой, в которой каждая переменная встречается не более одного раза. В противном случае f называется повторной в B .

Все известные критерии неповторности булевых функций представлены в [1–5], в книге [6] имеется обзор всех критериев. Отметим, что они получены в бинарных базисах

$$B_0 = \{\vee, \cdot, -, 0, 1\}, \quad B_1 = \{\vee, \cdot, -, 0, 1, \oplus\}.$$

В настоящей работе впервые найдены критерии неповторности для небинарных базисов.

Изложению основных результатов предположим необходимые определения и обозначения. Все неопределяемые здесь понятия можно найти, например, в [6]. Будут использоваться следующие обозначения: переменные обозначаются символами x, y, z, u, v , возможно, с индексами; константы обозначаются символами $\sigma, \tau, \gamma, \delta$, возможно, с индексами; символом \bar{x} обозначается набор (x_1, \dots, x_n) ; символом $\bar{\bar{x}}$ обозначается набор $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$; $|\bar{x}|$ — длина набора \bar{x} ; $\text{rang } f$ — ранг функции f ; $\rho(f)$ — множество всех существенных переменных функции f ; $\delta(f)$ — множество всех фиктивных переменных функции f ; P_B — множество всех неповторных функций в базисе B ; S_B — множество всех слабоповторных функций в базисе B ;

$$x^\sigma = \begin{cases} x, & \text{если } \sigma = 1, \\ \bar{x}, & \text{если } \sigma = 0. \end{cases}$$

Функция, получаемая из $f(x_1, \dots, x_n)$ подстановкой вместо некоторой переменной x_i константы σ , называется остаточной и обозначается $f_{x_i}^\sigma$. Индуктивно это определение распространяется на подмножество переменных.

Назовем переменную x_i функции f фиктивной, если $f_{x_i}^0 = f_{x_i}^1$, и существенной в противном случае.

Рангом функции f называется число ее существенных переменных. Под рангом базиса понимаем наибольший из рангов входящих в него функций.

Булевы функции от 0, 1 и 2 переменных называются соответственно константными, унарными и бинарными.

Функция f называется слабоповторной в базисе B , если любая остаточная функция от функции f является неповторной, а сама f повторна в базисе B .

Базис

$$B_0 = \{\vee, \cdot, -, 0, 1\}$$

называется элементарным, а базис $B_0 \cup \{f\}$, где f слабоповторна в B_0 , называется предэлементарным.

Единственным (с точностью до вводимой ниже эквивалентности \sim_p) предэлементарным базисом ранга 2 является базис B_1 . Как следует из [7], существует три предэлементарных базиса ранга 3, неэквивалентных B_1 . Введем обозначения для таких базисов:

$$B_n = B_0 \cup \{g_n\}, \quad n = 2, 3, 4,$$

где

$$g_2 = x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3,$$

$$g_3 = x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_2 x_3,$$

$$g_4 = x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_2 \bar{x}_3.$$

Будем говорить, что функции f и g связаны отношением \leq , и писать $f \leq g$, если для любого набора $\bar{\sigma}$ выполняется неравенство $f(\bar{\sigma}) \leq g(\bar{\sigma})$.

Функция f называется обобщенно монотонной по переменной x , если выполняется либо $f_x^0 \leq f_x^1$, либо $f_x^0 \geq f_x^1$. Если функции f является обобщенно монотонной по переменной x , то для краткости будем писать $f \in M_x$.

Функция f называется монотонной, если для любой переменной x выполняется соотношение $f_x^0 \leq f_x^1$.

Функции f и g называются обобщенно однотипными, если

$$f(x_1, \dots, x_n) = g^\sigma(x_{i_1}^{\sigma_1}, \dots, x_{i_n}^{\sigma_n}),$$

где (i_1, \dots, i_n) — некоторая перестановка чисел $1, \dots, n$. Очевидно, что на множестве всех булевых функций отношение обобщенной однотипности является отношением эквивалентности.

Производной функции $f(x_1, \dots, x_n)$ по переменной x_i называется функция

$$f'_{x_i} = f_{x_i}^0 \oplus f_{x_i}^1.$$

Функция называется нечетной, если число наборов, на которых функция равна 1, является нечетным, и четной в противном случае.

Множество булевых функций P , содержащее тождественную функцию, называется наследственным, если для любой функции $f \in P$ любая остаточная функция $f_x^\sigma \in P$.

Множество булевых функций P называется инвариантным, если для любых функций $f(\tilde{u}, y), g(\tilde{v}) \in P$, где $\tilde{u} \cap \tilde{v} = \emptyset$, справедливо включение $f(\tilde{u}, g(\tilde{v})) \in P$.

2. Некоторые вспомогательные утверждения

При получении основных результатов будут использоваться следующие утверждения.

Предложение 1 ([5]). *Множество булевых функций P является наследственным и инвариантным тогда и только тогда, когда P есть множество всех бесповторных функций над некоторым базисом B .*

Следствие 1. *Если для наследственного, инвариантного множества булевых функций P и базиса B верно, что $B \subseteq P$ и $S_B \cap P = \emptyset$, то $P_B = P$.*

Таким образом, для доказательства того, что некоторое множество булевых функций P совпадает с множеством всех бесповторных функций над некоторым базисом B , достаточно показать, что P обладает свойствами наследственности и инвариантности, и проверить, что все слабоповторные в B функции не входят в P .

Предложение 2 ([8]). *Следующая система булевых функций является полной системой представителей классов эквивалентности по отношению обобщенной однотипности для булевых функций, слабоповторных в предэлементарном базисе B_2 :*

$$\begin{aligned} & x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_3x_4; \\ & x_1(x_2 \vee x_3x_4) \vee x_5(x_3 \vee x_2x_4); \\ & x_1(x_2 \vee \dots \vee x_k) \vee x_2 \dots x_k, & k \geq 3; \\ & x_1(x_2 \vee x_3 \dots x_k) \vee x_2\bar{x}_3 \dots \bar{x}_k, & k \geq 3; \\ & x_1 \dots x_k \vee \bar{x}_1 \dots \bar{x}_k, & k \geq 2, \quad k \neq 3; \\ & \bar{x}_1g_2(x_2, x_3, x_4) \vee x_1x_2x_3x_4; \\ & \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{g}_2(x_3, x_4, x_5) \vee x_1x_2x_3x_4x_5; \\ & \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3g_2(x_4, x_5, x_6) \vee x_1x_2x_3x_4x_5x_6. \end{aligned}$$

Предложение 3 ([8]). *Следующая система булевых функций является полной системой представителей классов эквивалентности по отношению обобщенной однотипности для булевых функций, слабоповторных в предэлементарном базисе B_3 :*

$$\begin{aligned} & x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_3x_4; \\ & x_1(x_2 \vee x_3x_4) \vee x_5(x_3 \vee x_2x_4); \\ & x_1(x_2 \vee \dots \vee x_k) \vee x_2 \dots x_k, & k > 3; \\ & x_1(x_2 \vee x_3 \dots x_k) \vee x_2\bar{x}_3 \dots \bar{x}_k, & k \geq 3; \\ & x_1 \dots x_k \vee \bar{x}_1 \dots \bar{x}_k, & k \geq 2; \\ & \bar{x}_1g_3(x_2, x_3, x_4) \vee x_1x_2x_3x_4; \\ & \bar{x}_1g_3(x_2, x_3, x_4) \vee x_1x_2(x_3 \vee x_4); \\ & \bar{x}_1g_3(x_2, x_3, x_4) \vee x_1x_2; \\ & \bar{x}_1x_2g_3(x_3, x_4, x_5) \vee x_1((x_2 \vee x_3)x_4 \vee x_5). \end{aligned}$$

Предложение 4 ([9]). *Следующая система булевых функций является полной системой представителей классов эквивалентности по отношению обобщенной однотипности*

для булевых функций, слабоповторных в предэлементарном базисе B_4 :

$$\begin{aligned}
 & x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_3x_4; \\
 & x_1(x_2 \vee x_3x_4) \vee x_5(x_3 \vee x_2x_4); \\
 & x_1(x_2 \vee \dots \vee x_k) \vee x_2 \dots x_k, & k \geq 3; \\
 & x_1(x_2 \vee x_3 \dots x_k) \vee x_2\bar{x}_3 \dots \bar{x}_k, & k > 3; \\
 & x_1 \dots x_k \vee \bar{x}_1 \dots \bar{x}_k, & k \geq 2; \\
 & \bar{x}_1g_4(x_2, x_3, x_4) \vee x_1g_4(\bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4); \\
 & \bar{x}_1g_4(x_2, x_3, x_4) \vee x_1x_2\bar{x}_3x_4; \\
 & \bar{x}_1g_4(x_2, x_3, x_4) \vee x_1x_2(x_3 \vee x_4); \\
 & \bar{x}_1g_4(x_2, x_3, x_4) \vee x_1x_2x_3.
 \end{aligned}$$

3. Основные результаты

На множестве всех базисов введем частичный порядок следующим образом: базис B p -меньше базиса C (в этом случае используется обозначение $B \leq_p C$), если $P_B \subseteq P_C$. Если $B \leq_p C$ и $C \leq_p B$, то базисы B и C называются p -эквивалентными (в этом случае используется обозначение $B \sim_p C$). Если $B \leq_p C$ и $B \not\sim_p C$, то базис B строго p -меньше базиса C (в этом случае пишем $B <_p C$). Базис B непосредственно p -меньше базиса C (пишем $B \triangleleft_p C$), если $B <_p C$ и не существует базиса D такого, что $B <_p D <_p C$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Для любого базиса B выполняется соотношение $B_0 \leq_p B$.

Доказательство. Докажем, что $P_{B_0} \subseteq P_B$. Для этого достаточно показать, что $B_0 \subseteq P_B$, и более того, $\{-, \cdot\} \subseteq P_B$. Так как B — базис, он содержит нелинейную и немонотонную функции. Теперь необходимое включение следует из того, что подстановкой констант из немонотонной функции можно получить отрицание, а из нелинейной функции с помощью констант и отрицания можно получить конъюнкцию.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Соотношение $B \triangleleft_p C$ выполняется тогда и только тогда, когда

$$C \sim_p B \cup \{f\},$$

где $f \in S_B$.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $B \triangleleft_p C$, тогда найдется функция f такая, что $f \in P_C$, но $f \notin P_B$. Очевидно, что $B <_p B \cup \{f\}$. Так как в любом базисе присутствуют константы, в качестве f всегда можно взять функцию, слабоповторную в B . Итак, $P_{B \cup \{f\}} \subseteq P_C$ и $P_{B \cup \{f\}} \neq P_B$. В силу того, что $B \triangleleft_p C$, выполняется соотношение $C \sim_p B \cup \{f\}$.

Докажем достаточность. Пусть $C \sim_p B \cup \{f\}$, где функция $f \in S_B$. Очевидно, что $B <_p B \cup \{f\}$, то есть $B <_p C$. Докажем, что $B \triangleleft_p C$. Проведем доказательство от противного. Пусть найдется базис D такой, что $B <_p D <_p C$. Тогда имеет место соотношение $P_B \subset P_D \subset P_C$, откуда следует, что $P_B \subset P_D \subset P_{B \cup \{f\}}$, здесь и далее знак \subset означает строгое включение. Нетрудно видеть, что $f \notin P_D$, так как в противном случае $P_D = P_{B \cup \{f\}}$. Поскольку $B <_p D$, найдется слабоповторная в B функция $g \in P_D$.

Отсюда следует, что функции f и g обобщенно однотипны, а это противоречит тому, что $f \notin P_D$.

Теорема 2 доказана.

Отметим, что частично упорядоченное множество базисов с введенным порядком дуально изоморфно частично упорядоченному множеству базисов, рассматриваемому в [10].

Далее будут получены критерии бесповторности булевых функций во всех предэлементарных базисах ранга 3.

Функцию f будем называть 2-нетвердой, если либо $\text{rank } f < 2$, либо для любого $x \in \rho(f)$ выполняется одно из следующих условий:

$$(1) \delta(f) = \delta(f_x^0) \text{ и } \delta(f) \subset \delta(f_x^1);$$

$$(2) \delta(f) = \delta(f_x^1) \text{ и } \delta(f) \subset \delta(f_x^0);$$

$$(3) \delta(f) = \delta(f_x^0) = \delta(f_x^1), f \notin M_x \text{ и найдется } y \in \rho(f'_x) \text{ такой, что } \delta(f'_x) \subset \delta((f'_x)'_y).$$

Функцию f будем называть наследственно 2-нетвердой, если сама f и все ее остаточные функции являются 2-нетвердыми.

Теорема 3. Функция f бесповторна в базисе B_2 тогда и только тогда, когда она является наследственно 2-нетвердой.

Доказательство. Для доказательства теоремы воспользуемся методом, основанным на предложении 1.

Обозначим через P множество всех наследственно 2-нетвердых функций. Множество P является наследственным по определению, покажем его инвариантность.

Пусть $f(\tilde{u}, \tilde{v}) = g(\tilde{u}, h(\tilde{v}))$, где $g(\tilde{u}, y), h(\tilde{v}) \in P$. Если $\tilde{u} = \emptyset$ или $|\tilde{v}| = 1$, то функция f обобщенно однотипна с g или h , поэтому является наследственно 2-нетвердой. Далее считаем, что $\tilde{u} \neq \emptyset$ и $|\tilde{v}| > 1$.

1. Пусть $x \in \tilde{v}$. Если выполняется одно из строгих включений $\delta(h) \subset \delta(h_x^0)$ или $\delta(h) \subset \delta(h_x^1)$, то соответственно либо $\delta(f) \subset \delta(f_x^0)$, либо $\delta(f) \subset \delta(f_x^1)$.

Пусть $\delta(h) = \delta(h_x^0) = \delta(h_x^1)$. Рассмотрим $f'_x = g'_y(\tilde{u}, y)h'_x(\tilde{v})$. Ясно, что существует переменная $z \in \tilde{v}$ такая, что $\delta(h'_x) \subset \delta((h'_x)'_z)$. Так как $(f'_x)'_z = g'_y(\tilde{u}, y)(h'_x)'_z(\tilde{v})$, легко заметить, что $\delta(f'_x) \subset \delta((f'_x)'_z)$. Докажем от противного, что $f \notin M_x$. Пусть для определенности $f_x^0 \leq f_x^1$. Тогда при любых $\tilde{u}, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2$ выполняется неравенство

$$g(\tilde{u}, h(\tilde{v}_1, 0, \tilde{v}_2)) \leq g(\tilde{u}, h(\tilde{v}_1, 1, \tilde{v}_2)).$$

Так как $h \notin M_x$, для любого \tilde{u} имеют место неравенства

$$g(\tilde{u}, 0) \leq g(\tilde{u}, 1), \quad g(\tilde{u}, 0) \geq g(\tilde{u}, 1).$$

Отсюда следует, что $g_y^0 = g_y^1$, то есть переменная y фиктивна, что невозможно.

2. Пусть $x \in \tilde{u}$. В случае выполнения одного из строгих включений $\delta(g) \subset \delta(g_x^0)$ или $\delta(g) \subset \delta(g_x^1)$ справедливо ровно одного из строгих включений $\delta(f) \subset \delta(f_x^0)$ или $\delta(f) \subset \delta(f_x^1)$.

Пусть $\delta(g) = \delta(g_x^0) = \delta(g_x^1)$. Рассмотрим $f'_x = g'_x(\tilde{u}, h(\tilde{v}))$. Если для функции $g'_x(\tilde{u}, y)$ существует переменная z , отличная от y , такая, что $\delta(g'_x) \subset \delta((g'_x)'_z)$, тогда справедливо строгое включение $\delta(f'_x) \subset \delta((f'_x)'_z)$. В противном случае выберем произвольным

образом переменную $z_1 \in \bar{v}$ и рассмотрим $(f'_x)_{z_1} = (g'_x)'_y(\bar{u}, y)h'_{z_1}(\bar{v})$. Из справедливости строгого включения $\delta(g'_x) \subset \delta((g'_x)'_y)$ следует справедливость строгого включения $\delta(f'_x) \subset \delta((f'_x)'_{z_1})$.

Докажем от противного, что $f \notin M_x$. Пусть для определенности $f_x^0 \leq f_x^1$. Тогда при любых $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{v}$ выполняется неравенство

$$g(\bar{u}_1, 0, \bar{u}_2, h(\bar{v})) \leq g(\bar{u}_1, 1, \bar{u}_2, h(\bar{v})).$$

Отсюда следует, что при любых \bar{u}_1, \bar{u}_2 выполняются неравенства

$$g(\bar{u}_1, 0, \bar{u}_2, 0) \leq g(\bar{u}_1, 1, \bar{u}_2, 0), \quad g(\bar{u}_1, 0, \bar{u}_2, 1) \leq g(\bar{u}_1, 1, \bar{u}_2, 1).$$

Тогда $g \in M_x$, получаем противоречие. Таким образом, инвариантность P доказана.

Осталось для наследственного инвариантного множества P найти порождающий его базис. Очевидно, что $B_2 \subseteq P$. Покажем, что все слабповторные функции в базисе B_2 не принадлежат P . Достаточно ограничиться проверкой функций из предложения 2, так как если свойство 2-нетвердости не выполняется для некоторой функции, то оно не выполняется и для всех обобщенно однотипных с ней функций.

(а) $f = x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_3x_4$. Тогда

$$f_{x_1}^0 = x_3x_4, \quad f_{x_1}^1 = x_2 \vee x_3.$$

Обе эти остаточные функции имеют фиктивную переменную существенную в f , поэтому $f \notin P$.

(б) $f = x_1(x_2 \vee x_3x_4) \vee x_5(x_3 \vee x_2x_4)$. Тогда

$$f_{x_4}^0 = x_1x_2 \vee x_3x_5, \quad f_{x_4}^1 = (x_1 \vee x_5)(x_2 \vee x_3).$$

Функции $f_{x_4}^0, f_{x_4}^1$ существенны и $f \in M_{x_4}$, поэтому $f \notin P$.

(в) $f = x_1(x_2 \vee \dots \vee x_k) \vee x_2 \dots x_k$, где $k \geq 3$. Функция $f \notin P$, так как $f_{x_1}^0, f_{x_1}^1$ существенны, а $f \in M_{x_1}$.

(г) $f = x_1(x_2 \vee x_3 \dots x_k) \vee x_2\bar{x}_3 \dots \bar{x}_k$, где $k \geq 3$. При $k = 3$ $f_{x_3}^0 = x_2$ и $f_{x_3}^1 = x_1$. Обе эти остаточные функции имеют фиктивную переменную существенную в f , поэтому $f \notin P$. При $k > 3$

$$\begin{aligned} f_{x_3}^0 &= x_2(x_1 \vee \bar{x}_4 \dots \bar{x}_k), \\ f_{x_3}^1 &= x_1(x_2 \vee x_4 \dots x_k), \\ f'_{x_3} &= \bar{x}_1x_2\bar{x}_4 \dots \bar{x}_k \vee x_1\bar{x}_2x_4 \dots x_k. \end{aligned}$$

Легко видеть, что функции $f_{x_3}^0, f_{x_3}^1, f'_{x_3}$ и производная функции f'_{x_3} по любой переменной существенны, поэтому $f \notin P$.

(е) $f = x_1 \dots x_k \vee \bar{x}_1 \dots \bar{x}_k$, где $k \geq 2$. При $k = 2$ функция $f \notin P$, так как $f_{x_1}^0, f_{x_1}^1$ существенны и $f'_{x_1} = 1$. При $k > 3$ справедливы равенства

$$f_{x_1}^0 = \bar{x}_2 \dots \bar{x}_k, \quad f_{x_1}^1 = x_2 \dots x_k, \quad f'_{x_1} = x_2 \dots x_k \vee \bar{x}_2 \dots \bar{x}_k.$$

Функции $f_{x_1}^0, f_{x_1}^1, f'_{x_1}$ и производная функции f'_{x_1} по любой переменной существенны, поэтому $f \notin P$.

(f) $f = \bar{x}_1 g_2(x_2, x_3, x_4) \vee x_1 x_2 x_3 x_4$. Тогда

$$f_{x_1}^0 = g_2(x_2, x_3, x_4), \quad f_{x_1}^1 = x_2 x_3 x_4, \quad f'_{x_1} = \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4.$$

Функции $f_{x_1}^0$, $f_{x_1}^1$, f'_{x_1} и производная функции f'_{x_1} по любой переменной существенны, поэтому $f \notin P$.

(g) $f = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{g}_2(x_3, x_4, x_5) \vee x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$. Справедливы равенства

$$\begin{aligned} f_{x_3}^0 &= \bar{x}_1 \bar{x}_2 (x_4 \vee x_5), \\ f_{x_3}^1 &= \bar{x}_1 \bar{x}_2 (\bar{x}_4 \vee \bar{x}_5) \vee x_1 x_2 x_4 x_5, \\ f'_{x_3} &= x_1 x_2 x_4 x_5 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_4 x_5 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \bar{x}_5. \end{aligned}$$

Остаточные функции $f_{x_3}^0$ и $f_{x_3}^1$ существенны. В силу того, что представление f'_{x_3} является совершенной дизъюнктивной нормальной формой, нетрудно видеть, что функция f'_{x_3} нечетна, то есть существенна. Очевидно, что производная нечетной функции по любой переменной есть нечетная функция, поэтому $f \notin P$.

(h) $f = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 g_2(x_4, x_5, x_6) \vee x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$. Тогда

$$\begin{aligned} f_{x_1}^0 &= \bar{x}_2 \bar{x}_3 g_2(x_4, x_5, x_6), \\ f_{x_1}^1 &= x_2 x_3 x_4 x_5 x_6, \\ f'_{x_1} &= x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 x_5 x_6 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \bar{x}_6. \end{aligned}$$

Ситуация аналогична случаю (g).

Таким образом,

$$S_{B_2} \cap P = \emptyset, \quad B_2 \subseteq P.$$

Теорема 3 доказана.

Функцию f будем называть 2-нежесткой, если либо $\text{rank } f < 2$, либо для любого $x \in \rho(f)$ справедливо включение $f \in M_x$ и выполняется одно из условий:

- (1) $\delta(f) = \delta(f_x^0)$ и справедливо строгое включение $\delta(f) \subset \delta(f_x^1)$;
- (2) $\delta(f) = \delta(f_x^1)$ и справедливо строгое включение $\delta(f) \subset \delta(f_x^0)$;
- (3) существует $y \in \rho(f'_x)$ такая, что справедливо строгое включение $\delta(f'_x) \subset \delta((f'_x)'_y)$.

Функцию f будем называть наследственно 2-нежесткой, если сама f и все ее остаточные функции являются 2-нежесткими.

Теорема 4. Функция f бесповторна в базисе B_3 тогда и только тогда, когда она является наследственно 2-нежесткой.

Доказательство. Как и для теоремы 3, доказательство проведем с помощью метода, основанного на предложении 1.

Обозначим через P множество всех 2-нежестких функций. Множество P является наследственным по определению, покажем его инвариантность.

Пусть $f(\tilde{u}, \tilde{v}) = g(\tilde{u}, h(\tilde{v}))$, где $g(\tilde{u}, y), h(\tilde{v}) \in P$. Если $\tilde{u} = \emptyset$ или $|\tilde{v}| = 1$, то функция f обобщенно однотипна с g или h , поэтому является наследственно 2-нежесткой. Поэтому считаем, что $\tilde{u} \neq \emptyset$ и $|\tilde{v}| > 1$.

1. Пусть $x \in \tilde{v}$. Если справедливо одно из строгих включений $\delta(h) \subset \delta(h_x^0)$ или $\delta(h) \subset \delta(h_x^1)$, то соответственно либо $\delta(f) \subset \delta(f_x^0)$, либо $\delta(f) \subset \delta(f_x^1)$. В противном случае рассмотрим $f'_x = g'_y(\tilde{u}, y)h'_x(\tilde{v})$. Очевидно, что существует переменная $z \in \tilde{v}$ такая, что $\delta(h'_x) \subset \delta((h'_x)'_z)$. Так как $(f'_x)'_z = g'_y(\tilde{u}, y)(h'_x)'_z(\tilde{v})$, легко заметить, что $\delta(f'_x) \subset \delta((f'_x)'_z)$.

2. Пусть $x \in \tilde{u}$. Если справедливо одно из строгих включений $\delta(g) \subset \delta(g_x^0)$ или $\delta(g) \subset \delta(g_x^1)$, то справедливость ровно одного из строгих включений $\delta(f) \subset \delta(f_x^0)$ или $\delta(f) \subset \delta(f_x^1)$ очевидна. В противном случае рассмотрим $f'_x = g'_x(\tilde{u}, h(\tilde{v}))$. Если для функции $g'_x(\tilde{u}, y)$ существует переменная z , отличная от y , такая, что $\delta(g'_x) \subset \delta((g'_x)'_z)$, тогда справедливо строгое включение $\delta(f'_x) \subset \delta((f'_x)'_z)$. В противном случае выберем произвольным образом переменную $z_1 \in \tilde{v}$ и рассмотрим $(f'_x)'_{z_1} = (g'_x)'_y(\tilde{u}, y)h'_{z_1}(\tilde{v})$. В силу того, что $\delta(g'_x) \subset \delta((g'_x)'_y)$, справедливо строгое включение $\delta(f'_x) \subset \delta((f'_x)'_{z_1})$.

Докажем методом от противного, что $f \in M_x$ для любой переменной x . Пусть $f \notin M_x$, то есть $f_x^0 \not\equiv f_x^1$ и $f_x^0 \not\equiv f_x^1$.

Пусть $x \in \tilde{u}$. Тогда найдутся наборы констант $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3, \bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2, \bar{\tau}_3$ такие, что $|\bar{\sigma}_i| = |\bar{\tau}_i|$ для любого i и

$$g(\bar{\sigma}_1, 0, \bar{\sigma}_2, h(\bar{\sigma}_3)) < g(\bar{\sigma}_1, 1, \bar{\sigma}_2, h(\bar{\sigma}_3)), \quad g(\bar{\tau}_1, 0, \bar{\tau}_2, h(\bar{\tau}_3)) > g(\bar{\tau}_1, 1, \bar{\tau}_2, h(\bar{\tau}_3)).$$

Пусть $h(\bar{\sigma}_3) = \gamma, h(\bar{\tau}_3) = \delta$, тогда

$$g(\bar{\sigma}_1, 0, \bar{\sigma}_2, \gamma) < g(\bar{\sigma}_1, 1, \bar{\sigma}_2, \gamma), \quad g(\bar{\tau}_1, 0, \bar{\tau}_2, \delta) > g(\bar{\tau}_1, 1, \bar{\tau}_2, \delta).$$

Таким образом, $g \notin M_x$, получаем противоречие.

Пусть $x \in \tilde{v}$. Аналогично, найдутся наборы констант $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3, \bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2, \bar{\tau}_3$ такие, что $|\bar{\sigma}_i| = |\bar{\tau}_i|$ для любого i и

$$g(\bar{\sigma}_1, h(\bar{\sigma}_2, 0, \bar{\sigma}_3)) < g(\bar{\sigma}_1, h(\bar{\sigma}_2, 1, \bar{\sigma}_3)), \quad g(\bar{\tau}_1, h(\bar{\tau}_2, 0, \bar{\tau}_3)) > g(\bar{\tau}_1, h(\bar{\tau}_2, 1, \bar{\tau}_3)).$$

В силу того, что $h \in M_x$, справедливы либо неравенства

$$g(\bar{\sigma}_1, 0) < g(\bar{\sigma}_1, 1), \quad g(\bar{\tau}_1, 0) > g(\bar{\tau}_1, 1),$$

либо неравенства

$$g(\bar{\sigma}_1, 1) < g(\bar{\sigma}_1, 0), \quad g(\bar{\tau}_1, 1) > g(\bar{\tau}_1, 0).$$

В обоих случаях получаем противоречие с тем, что $g \in M_x$. Таким образом, доказана инвариантность P .

Теперь для наследственного инвариантного множества P найдем порождающий его базис. Очевидно, что $B_3 \subseteq P$. Проверим, что все слабповторные функции в базисе B_3 не принадлежат P . Достаточно ограничиться проверкой функций из предложения 3, так как если свойство 2-нежесткости не выполняется для некоторой функции, то оно не выполняется и для всех обобщенно однотипных с ней функций.

(а) $f = x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_3x_4$. Тогда

$$f_{x_2}^0 = x_3(x_1 \vee x_4), \quad f_{x_2}^1 = x_1 \vee x_3x_4, \quad f'_{x_2} = x_1\bar{x}_3.$$

Обе остаточные функции $f_{x_2}^0, f_{x_2}^1$ существенны и множество фиктивных переменных функции f'_{x_2} совпадает с множеством фиктивных переменных производной функции f'_{x_2} по любой переменной из $\rho(f'_{x_2})$, поэтому $f \notin P$.

(b) $f = x_1(x_2 \vee x_3x_4) \vee x_5(x_3 \vee x_2x_4)$. Тогда

$$f_{x_4}^0 = x_1x_2 \vee x_3x_5, \quad f_{x_4}^1 = (x_1 \vee x_5)(x_2 \vee x_3), \quad f'_{x_4} = x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_5 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_5.$$

Легко заметить, что функции $f_{x_4}^0$, $f_{x_4}^1$, f'_{x_4} , а также производная функции f'_{x_4} по любой переменной существенны, поэтому $f \notin P$.

(c) $f = x_1 \dots x_k \vee \bar{x}_1 \dots \bar{x}_k$, где $k \geq 2$. Функция $f \notin P$, так как $f \notin M_{x_1}$.

(d) $f = x_1(x_2 \vee x_3 \dots x_k) \vee x_2\bar{x}_3 \dots \bar{x}_k$, где $k \geq 3$. Аналогично (c), функция $f \notin P$, так как $f \notin M_{x_1}$.

(e) $f = x_1(x_2 \vee \dots \vee x_k) \vee x_2 \dots x_k$, где $k > 3$. Тогда

$$f_{x_1}^0 = x_2 \dots x_k, \quad f_{x_1}^1 = x_2 \vee \dots \vee x_k, \quad f'_{x_1} = \overline{x_2 \dots x_k \vee \bar{x}_2 \dots \bar{x}_k}.$$

Функции $f_{x_1}^0$, $f_{x_1}^1$, f'_{x_1} и производная функции f'_{x_1} по любой переменной существенны, поэтому $f \notin P$.

(f) $f = \bar{x}_1g_3(x_2, x_3, x_4) \vee x_1x_2$. Так как $f_{x_1}^0 \not\equiv f_{x_1}^1$ и $f_{x_1}^0 \not\equiv f'_{x_1}$, то $f \notin M_x$, поэтому $f \notin P$.

(g) $f = \bar{x}_1g_3(x_2, x_3, x_4) \vee x_1x_2x_3x_4$. Тогда

$$f_{x_1}^0 = g_3(x_2, x_3, x_4), \quad f_{x_1}^1 = x_2x_3x_4, \quad f'_{x_1} = x_2x_3\bar{x}_4 \vee x_2\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_2x_3x_4.$$

Функции $f_{x_1}^0$, $f_{x_1}^1$, f'_{x_1} и производная функции f'_{x_1} по любой переменной существенны (см. случай (g) в теореме 3), поэтому $f \notin P$.

(h) $f = \bar{x}_1g_3(x_2, x_3, x_4) \vee x_1x_2(x_3 \vee x_4)$. Тогда

$$f_{x_1}^0 = g_3(x_2, x_3, x_4), \quad f_{x_1}^1 = x_2(x_3 \vee x_4), \quad f'_{x_1} = \bar{x}_2x_3x_4.$$

Ситуация аналогична (g).

(i) $f = \bar{x}_1x_2g_3(x_3, x_4, x_5) \vee x_1((x_2 \vee x_3)x_4 \vee x_5)$. В этом случае

$$\begin{aligned} f_{x_2}^0 &= x_1(x_3x_4 \vee x_5), \\ f_{x_2}^1 &= g_3(x_5, x_1 \vee x_3, x_4), \\ f'_{x_2} &= \bar{x}_1x_3x_4x_5 \vee \bar{x}_1x_3x_4\bar{x}_5 \vee \bar{x}_1x_3\bar{x}_4x_5 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3x_4x_5 \vee x_1\bar{x}_3x_4\bar{x}_5. \end{aligned}$$

Ситуация аналогична (g).

Таким образом,

$$S_{B_3} \cap P = \emptyset, \quad B_3 \subseteq P.$$

Теорема 4 доказана.

Функцию f будем называть 2-неплотной, если либо $\text{rank } f < 2$, либо для любого $x \in \rho(f)$ выполняется одно из условий:

- (1) $\delta(f) = \delta(f_x^0)$ и $\delta(f) \subset \delta(f_x^1)$;
- (2) $\delta(f) = \delta(f_x^1)$ и $\delta(f) \subset \delta(f_x^0)$;
- (3) $\delta(f) \subset \delta(f_x^0)$, $\delta(f) \subset \delta(f_x^1)$, $f \notin M_x$ и найдется переменная $y \in \rho(f'_x)$ такая, что $\delta(f'_x) \subset \delta((f'_x)'_y)$;
- (4) $\delta(f) \subset \delta(f'_x)$, причем это строгое включение не выполняется для всех переменных из $\rho(f)$ одновременно.

Функцию f будем называть наследственно 2-неплотной, если сама f и все ее остальные функции являются 2-неплотными.

Теорема 5. *Функция f бесповторна в базисе B_4 тогда и только тогда, когда она является наследственно 2-неплотной.*

Доказательство. Обозначим через P множество всех наследственно 2-неплотных функций. Множество P является наследственным по определению, покажем его инвариантность.

Пусть $f(\tilde{u}, \tilde{v}) = g(\tilde{u}, h(\tilde{v}))$, где $g(\tilde{u}, y), h(\tilde{v}) \in P$. Если $\tilde{u} = \emptyset$ или $|\tilde{v}| = 1$, то функция f обобщенно однотипна с g или h , поэтому является наследственно 2-неплотной. Далее считаем, что $\tilde{u} \neq \emptyset$ и $|\tilde{v}| > 1$.

1. Пусть $x \in \tilde{v}$. Если выполняется ровно одно из строгих включений $\delta(h) \subset \delta(h_x^0)$ или $\delta(h) \subset \delta(h_x^1)$, то соответственно либо $\delta(f) \subset \delta(f_x^0)$, либо $\delta(f) \subset \delta(f_x^1)$.

Пусть $\delta(h) \subset \delta(h_x^0)$ и $\delta(h) \subset \delta(h_x^1)$. Найдется переменная z такая, что выполняется строгое включение $\delta(h'_x) \subset \delta((h'_x)'_z)$, значит $\delta(f'_x) \subset \delta((f'_x)'_z)$. Покажем, что $f \notin M_x$. В силу того, что $h \notin M_x$, найдутся наборы констант $\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2, \tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ такие, что $|\tilde{\tau}_i| = |\tilde{\gamma}_i|$ для любого i и выполняются соотношения

$$0 = h(\tilde{\tau}_1, 0, \tilde{\tau}_2) < h(\tilde{\tau}_1, 1, \tilde{\tau}_2) = 1, \quad 1 = h(\tilde{\gamma}_1, 0, \tilde{\gamma}_2) > h(\tilde{\gamma}_1, 1, \tilde{\gamma}_2) = 0.$$

Переменная $y \in \rho(g)$, следовательно, найдется набор $\tilde{\sigma}$ такой, что $g(\tilde{\sigma}, 0) \neq g(\tilde{\sigma}, 1)$. Пусть для определенности $g(\tilde{\sigma}, 0) < g(\tilde{\sigma}, 1)$. Заменив константы, получаем, что

$$g(\tilde{\sigma}, h(\tilde{\tau}_1, 0, \tilde{\tau}_2)) < g(\tilde{\sigma}, h(\tilde{\tau}_1, 1, \tilde{\tau}_2)), \quad g(\tilde{\sigma}, h(\tilde{\gamma}_1, 0, \tilde{\gamma}_2)) > g(\tilde{\sigma}, h(\tilde{\gamma}_1, 1, \tilde{\gamma}_2)).$$

Отсюда следует, что $f \notin M_x$.

Пусть $\delta(h) \subset \delta(h'_x)$. Так как справедливо равенство $f'_x = g'_y(\tilde{u}, y)h'_x(\tilde{v})$, выполняется строгое включение $\delta(f) \subset \delta(f'_x)$.

2. Пусть $x \in \tilde{u}$. Если выполнено одного из условий $\delta(g) \subset \delta(g_x^0)$ или $\delta(g) \subset \delta(g_x^1)$, то справедливость ровно одного из строгих включений $\delta(f) \subset \delta(f_x^0)$ или $\delta(f) \subset \delta(f_x^1)$ очевидна.

Пусть $\delta(g) \subset \delta(g_x^0)$ и $\delta(g) \subset \delta(g_x^1)$. Если найдется переменная z , отличная от y и такая, что $\delta(g'_x) \subset \delta((g'_x)'_z)$, то $\delta(f'_x) \subset \delta((f'_x)'_z)$. В противном случае выберем произвольным образом $z_1 \in \tilde{v}$ и рассмотрим $(f'_x)'_{z_1} = (g'_x)'_{y_1}(\tilde{u}, y)h'_{z_1}(\tilde{v})$. В силу того, что $\delta(g'_x) \subset \delta((g'_x)'_y)$, справедливо строгое включение $\delta(g'_x) \subset \delta((g'_x)'_{z_1})$. Доказательство того, что $f \notin M_x$, аналогично доказательству в случае $x \in \tilde{v}$.

Пусть $\delta(g) \subset \delta(g'_x)$. Ясно, что $\delta(f) \subset \delta(f'_x)$.

Очевидно, что условие 4 из определения 2-неплотной функции не выполняется для всех переменных функции f одновременно. Таким образом, инвариантность P доказана.

Для наследственного инвариантного множества P найдем порождающий его базис. Очевидно, что $B_4 \subseteq P$. Проверим, что все слабоповторные функции в базисе B_4 не принадлежат P . Очевидно, что достаточно ограничиться проверкой функций из предложения 4.

(а) $f = x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_3x_4$. Тогда $f_{x_1}^0 = x_3x_4$ и $f_{x_1}^1 = x_2 \vee x_3$. Обе эти остаточные функции имеют фиктивную переменную, существенную в f , f_{x_1}' существенна и $f \in M_x$, поэтому $f \notin P$.

(б) $f = x_1(x_2 \vee x_3x_4) \vee x_5(x_3 \vee x_2x_4)$. Тогда

$$f_{x_4}^0 = x_1x_2 \vee x_3x_5, \quad f_{x_4}^1 = (x_1 \vee x_5)(x_2 \vee x_3), \quad f_{x_4}' = x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_5 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_5.$$

Легко заметить, что $f_{x_4}^0$, $f_{x_4}^1$, f_{x_4}' существенны, поэтому $f \notin P$.

(с) $f = x_1(x_2 \vee \dots \vee x_k) \vee x_2 \dots x_k$, где $k \geq 3$. Тогда

$$f_{x_1}^0 = x_2 \dots x_k, \quad f_{x_1}^1 = x_2 \vee \dots \vee x_k, \quad f_{x_1}' = \overline{x_2 \dots x_k \vee \bar{x}_2 \dots \bar{x}_k}.$$

Функции $f_{x_1}^0$, $f_{x_1}^1$, f_{x_1}' существенны, поэтому $f \notin P$.

(д) $f = x_1 \dots x_k \vee \bar{x}_1 \dots \bar{x}_k$, где $k \geq 2$. При $k = 2$

$$f_{x_1}^0 = \bar{x}_2, \quad f_{x_1}^1 = x_2, \quad f_{x_1}' = 1, \quad f_{x_2}^0 = \bar{x}_1, \quad f_{x_2}^1 = x_1, \quad f_{x_2}' = 1.$$

Для любой переменной остаточные функции существенны, а производная несущественна, поэтому функция $f \notin P$. При $k \geq 3$

$$f_{x_1}^0 = \bar{x}_2 \dots \bar{x}_k, \quad f_{x_1}^1 = x_2 \dots x_k, \quad f_{x_1}' = x_2 \dots x_k \vee \bar{x}_2 \dots \bar{x}_k.$$

Ситуация аналогична случаю (б).

(е) $f = x_1(x_2 \vee x_3 \dots x_k) \vee x_2\bar{x}_3 \dots \bar{x}_k$, где $k > 3$. Тогда

$$\begin{aligned} f_{x_3}^0 &= x_2(x_1 \vee \bar{x}_4 \dots \bar{x}_k), \\ f_{x_3}^1 &= x_1(x_2 \vee x_4 \dots x_k), \\ f_{x_3}' &= \bar{x}_1x_2\bar{x}_4 \dots \bar{x}_k \vee x_1\bar{x}_2x_4 \dots x_k. \end{aligned}$$

Ситуация аналогична случаю (б).

(ф) $f = \bar{x}_1g_4(x_2, x_3, x_4) \vee x_1g_4(\bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4)$. Тогда

$$\begin{aligned} f_{x_1}^0 &= g_4(x_2, x_3, x_4), & f_{x_1}^1 &= g_4(\bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4), & f_{x_1}' &= x_2x_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3, \\ f_{x_2}^0 &= g_4(x_1, \bar{x}_4, \bar{x}_3), & f_{x_2}^1 &= g_4(\bar{x}_1, x_4, x_3), & f_{x_2}' &= x_1\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_4, \\ f_{x_3}^0 &= g_4(x_1, x_4, \bar{x}_2), & f_{x_3}^1 &= g_4(\bar{x}_1, \bar{x}_4, x_2), & f_{x_3}' &= x_1x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_4, \\ f_{x_4}^0 &= g_4(\bar{x}_2, x_3, x_1), & f_{x_4}^1 &= g_4(x_2, \bar{x}_3, \bar{x}_1), & f_{x_4}' &= x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2x_3. \end{aligned}$$

Легко видеть, что по любой переменной остаточные функции существенны, а производная несущественна, поэтому $f \notin P$.

(g) $f = \bar{x}_1 g_4(x_2, x_3, x_4) \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$. Тогда

$$f_{x_1}^0 = g_4(x_2, x_3, x_4), \quad f_{x_1}^1 = x_2 \bar{x}_3 x_4, \quad f'_{x_1} = x_3(x_2 \vee \bar{x}_4).$$

Ситуация аналогична случаю (b).

(h) $f = \bar{x}_1 g_4(x_2, x_3, x_4) \vee x_1 x_2(x_3 \vee x_4)$. Тогда

$$f_{x_1}^0 = g_4(x_2, x_3, x_4), \quad f_{x_1}^1 = x_2(x_3 \vee x_4), \quad f'_{x_1} = \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4.$$

Ситуация аналогична случаю (b).

(i) $f = \bar{x}_1 g_4(x_2, x_3, x_4) \vee x_1 x_2 x_3$. Тогда

$$f_{x_2}^0 = \bar{x}_1 x_3 \bar{x}_4, \quad f_{x_2}^1 = x_3 \vee \bar{x}_1 x_4, \quad f'_{x_2} = g_4(x_3, x_4, x_1).$$

Ситуация аналогична случаю (b).

Таким образом,

$$S_{B_4} \cap P = \emptyset, \quad B_4 \subseteq P.$$

Теорема 5 доказана.

Список литературы

1. Субботовская Б. А., О сравнении базисов при реализации функций алгебры логики формулами. *Докл. АН СССР* (1963) **149**, №4, 784–787.
2. Гурвич В. А., Критерии неповторности функций алгебры логики. *Докл. АН СССР* (1991) **318**, №3, 532–537.
3. Перязев Н. А., Реализация булевых функций неповторными формулами в некоторых базисах. В кн.: *Алгебра, логика и приложения*. Иркутск, 1994, с. 143–154.
4. Перязев Н. А., Реализация булевых функций неповторными формулами. *Дискретная математика* (1995) **7**, №3, 61–68.
5. Кириченко К. Д., О критериях неповторности булевых функций в различных базисах. *Оптимизация, управление, интеллект* (2000) **4**, 93–101.
6. Винокуров С. Ф., Перязев Н. А., *Избранные вопросы теории булевых функций*. Физматлит, Москва, 2001.
7. Стеценко В. А., О предплохих базисах в P_2 . *Матем. вопросы киберн.* (1992) **4**, 139–177.
8. Кириченко К. Д., Слабовопторные булевы функции в некоторых предэлементарных базисах. *Дискретная математика и информатика* вып. 13. Изд-во Иркутского ун-та, Иркутск, 2000.
9. Шаранхаев И. К., Слабовопторные булевы функции в некоторых базисах. *Дискретная математика и информатика* вып. 17. Изд-во Иркутского ун-та, Иркутск, 2003.
10. Черухин Д. Ю., Алгоритмический критерий сравнения булевых базисов. *Матем. вопросы киберн.* (1999) **8**, 77–122.

Статья поступила 24.05.2004.