



Общероссийский математический портал

А. А. Федотов, И. И. Лукашова, О самоподобном поведении логарифмических сумм, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2021, том 506, 279–292

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.83

19 января 2025 г., 06:53:29



А. А. Федотов, И. И. Лукашова

О САМОПОДОБНОМ ПОВЕДЕНИИ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ СУММ

§1. ВВЕДЕНИЕ

Для $\omega \in (0, 1)$ и $\zeta \in \mathbb{C}_-$, мы исследуем поведение сумм вида

$$S_N(\omega, \zeta) = \sum_{n=0}^{N-1} \ln \left(1 + e^{-2\pi i(\omega n + \frac{\omega}{2} + \zeta)} \right) \quad (1)$$

при больших $N \in \mathbb{N}$. Это эквивалентно исследованию при больших $\operatorname{Re} z$ решений уравнения

$$\sigma_h(z+h) = (1 + e^{-iz}) \sigma_h(z-h), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (2)$$

с $h = \pi\omega$. Это и родственные ему уравнения возникают во многих задачах математической физики, например, теории дифракции и распространения волн [1, 2], в теории интегрируемых систем [3], в теории узлов, квантовой теории Тейхмюллера и комплексной теории Черна–Саймонса [4], теории квазипериодических операторов [5]. Мероморфные решения (2) имеют богатые сложные множества полюсов и нулей, расположенных на вещественной оси. Эти нули и полюса быстро накапливаются к бесконечности, и поведение решений при $\operatorname{Re} z \rightarrow \pm\infty$, оказывается сложным, сильно зависит от арифметических свойств ω , и, насколько мы знаем, очень мало изучено.

В этой статье почти для всех ω мы получаем асимптотику *логарифмической* суммы (1), используя перенормировочную формулу, подобную тем, которые возникают в теории экспоненциальных сумм Гаусса, см., например, [6]. Эта формула выражает $S_N(\omega, \zeta)$ через логарифмическую сумму с меньшим количеством слагаемых и новыми параметрами вместо ω и ζ .

Ключевые слова: тригонометрические произведения, тригонометрический аналог Γ -функции Эйлера, асимптотики, типичное поведение.

Работа поддержана грантом РФФИ No. 20-01-00451-а.

Логарифмические суммы, очевидно, связаны с произведениями вида

$$\Pi_N(\omega, \theta) = \prod_{n=0}^{N-1} \cos \pi(\omega n + \theta), \quad N \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Последние часто появляются в теории квазипериодических операторов, см., например, [7–9]. Для них получены тонкие оценки. Мы считаем, что наши асимптотические формулы будут важным дополнением к этим оценкам.

Напомним, что $\text{Im } \zeta < 0$. В (1) выбрана ветвь функции $\zeta \mapsto \ln(1 + e^{-2\pi i \zeta})$, аналитическая в \mathbb{C}_- и стремящаяся к нулю при $\text{Im } \zeta \rightarrow -\infty$.

Для почти всех $\omega \notin \mathbb{Q}$ мы описываем типичное асимптотическое поведение логарифмических сумм при $N \rightarrow \infty$. Чтобы сформулировать наши результаты, положим для $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\begin{aligned} \omega_{l+1} &= \left\{ \frac{1}{\omega_l} \right\}, \quad \omega_0 = \omega, \quad N_{l+1} = [\omega_l N_l], \quad N_0 = N, \\ \xi_l &= \{\omega_l N_l\}, \quad \zeta_{l+1} = \left\{ -\frac{\zeta_l^*}{\omega_l} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\omega_l} \right] \right\}, \quad \zeta_0 = \zeta, \end{aligned} \quad (4)$$

где $*$ – комплексное сопряжение, $[\cdot]$ и $\{\cdot\}$ – целая и дробные части, и для $z \in \mathbb{C}$ $\{z\} = \{\text{Re } z\} + i \text{Im } z$.

Прокомментируем формулы (4). Напомним, что любое $\omega \notin (0, 1) \setminus \mathbb{Q}$ может быть представлено бесконечной цепной дробью [10], и

$$\omega = \frac{1}{a_1 + \omega_1} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \omega_2}} = \dots = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots}}} \quad (5)$$

где a_1, a_2, \dots – натуральные числа, называемые *элементами цепной дроби*, изображающей ω . Для бесконечной цепной дроби в (5) используется обозначение $[0; a_1, a_2, \dots]$.

Для всех $l \geq 0$

$$\text{Im } \zeta_l = \frac{\text{Im } \zeta_0}{\omega_0 \omega_1 \dots \omega_{l-1}}. \quad (6)$$

Легко проверить, что (см. параграф 5)

$$\omega_0 \omega_1 \dots \omega_{L-1} < \frac{1}{2^{\lfloor L/2 \rfloor}}, \quad L \in \mathbb{N}. \quad (7)$$

Отсюда следует, что при $l \rightarrow \infty$ последовательность $\{\operatorname{Im} \zeta_l\}$ возрастает по крайней мере экспоненциально быстро.

Ясно, что $N_0 \geq N_1 \geq N_2 \dots \geq 0$, и $N_l > N_{l+1}$ если $N_l > 0$. Для $N_0 = N > 0$ определим $L(N) \in \mathbb{N}$ так, чтобы $N_{L(N)-1} > 0$ и $N_{L(N)} = 0$. В параграфе 5 мы убедимся, что из (7) вытекает оценка

$$L(N) \leq 2 \log_2(2N). \quad (8)$$

Мы покажем (см. теорему 4), что для иррациональных ω_0

$$S_N(\omega_0, \zeta_0) = \sum_{l=0}^{L(N)-1} \left(\ln \sigma_{\pi\omega_l}(2\pi(\zeta_l + \xi_l)) - \ln \sigma_{\pi\omega_l}(2\pi(\zeta_l)) \right)^{*l}, \quad (9)$$

где \cdot^{*l} обозначает комплексное сопряжение, примененное l раз. Сравним суммы в правой и левой частях этой формулы. Грубо говоря, все слагаемые в сумме S_N имеют одинаковый порядок. С другой стороны, мы увидим (см. теорему 2), что $\ln \sigma_h(z)$ ведет себя как $\frac{1}{h} e^{\operatorname{Im} z}$ при $\operatorname{Im} z \rightarrow -\infty$. Напомним, что числа $-\operatorname{Im} \zeta_l$ экспоненциально быстро растут с ростом l . Поэтому, если среди ω_l нет подпоследовательности, стремящейся к нулю слишком быстро, слагаемые в правой части (9) убывают сверхэкспоненциально быстро при $l \rightarrow \infty$.

Эти рассуждения показывают, что поведение логарифмической суммы с большим количеством слагаемых определяется самыми малыми из чисел ω_l . Исследованию этого явления и посвящена наша основная теорема:

Theorem 1. Пусть $Y > 0$ и $Y_l = \frac{Y}{\omega_0 \omega_1 \dots \omega_{l-1}}$, $l \in \mathbb{N}$.

Предположим, что $\{c_l\}_{l=1}^{\infty} \in l^1(\mathbb{N})$ и

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{|c_l|} e^{-2\pi Y_l} < \infty. \quad (10)$$

Для почти каждого $\omega \in (0, 1) \setminus \mathbb{Q}$, имеется такое конечное множество $\mathcal{L} \subset \mathbb{N}$, что

$$\frac{1}{\omega_l} \cdot e^{-2\pi Y_l} \leq |c_l| \quad \text{если } l \notin \mathcal{L}. \quad (11)$$

Если $N \in \mathbb{N}$ и $\text{Im } \zeta < -Y$, то

$$S_N(\omega, \theta) = \sum_{l \in \mathcal{L}, l < L(N)} \frac{1}{\omega_l} \int_{\zeta_l}^{\zeta_l + \xi_l} \ln(1 + e^{(-2\pi i \zeta)^* l}) d\zeta + \delta, \quad (12)$$

$$\delta \leq C \left(\sum_{l \in \mathcal{L}} \omega_l e^{-2\pi Y l} + \sum_{l \geq 0, l \notin \mathcal{L}} |c_l| \right), \quad (13)$$

где C обозначает положительные постоянные, зависящие только от Y .

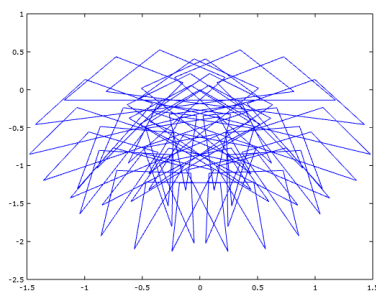
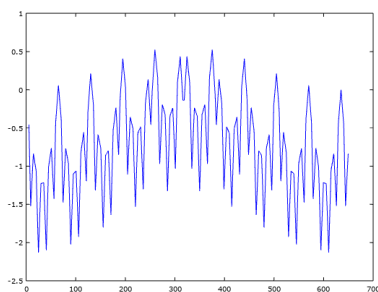
Заметим, что первая и вторая суммы в (13) ограничены суммами сходящихся рядов $\sum_{l \geq 1} \omega_l e^{-2\pi Y l}$ и $\sum_{l \geq 1} |c_l|$ соответственно.

Грубо говоря, теорема 1 утверждает, что поведение S_N как функции N в существенном определяется конечным числом малых членов последовательности $\{\omega_l\}$. Позже мы увидим, что старший член в (12) определяется асимптотикой σ_h при $h \rightarrow 0$. Эта асимптотика имеет квазиклассический характер, см. [11]. Таким образом, поведение S_N при больших N в существенном определяется квазиклассическими эффектами.

Теорема 1 касается случая, когда $\text{Im } \zeta < 0$. Случай, когда $\text{Im } \zeta > 0$ сводится к рассматриваемому. Для $\zeta \in \mathbb{R}$, поведение S_N во многом определяется и другими эффектами.

Заметим, что по мере роста N каждое из чисел ξ_l в (12) систематически пробегает интервал $(0, 1)$, и последовательность последовательных значений логарифмической суммы является квазипериодической.

Опишем результаты компьютерных вычислений. В комплексной плоскости для каждого $N = 1, 2, 3, \dots$, мы будем отмечать точку, изображающую $S_N(\omega, \zeta)$, и соединять точки, изображающие S_N и S_{N+1} , отрезком прямой. Полученную кривую будем называть *графиком* логарифмической суммы. Для $2\pi\zeta = -i/10$ и $\omega = [0; 3, 3, 1, 9, \dots]$ такой график показан на рис. 1. Этот симпатичный рисунок не слишком информативен. Поэтому мы растянем график логарифмической суммы вдоль вещественной оси, добавив к значениям $S_N(\omega, \zeta)$ числа $5N$. В итоге получится Рис. 2. На этом рисунке заметны три квазипериодических структуры с периодами приблизительно равными 3, 13 и 130. Первая и вторая соответствуют первому и второму элементам цепной

Рис. 1. График суммы $S_N(\omega, \zeta)$.Рис. 2. График суммы $S_N(\omega, \zeta) + 5N$.

доби, изображающей ω , а третья соответствует ее четвертому элементу, равному 9. Остальные элементы не вносят заметного вклада в приведенный график. Это хорошо согласуется с (12), так как $1/\omega_0 \approx 3$, $1/\omega_0\omega_1 \approx 13$, $1/\omega_0\omega_1\omega_2\omega_3 \approx 130$.

Легко видеть, что в случае, когда $\omega \in \mathbb{Q}$, логарифмическая сумма $S_N(\omega, \zeta)$ является суммой периодической и линейной функций. Их нетрудно описать напрямую. Используя нашу перенормировочную формулу, мы получаем нетривиальное представление для периодической функции.

Опишем структуру статьи. В следующем разделе мы кратко обсудим свойства специальной функции удовлетворяющей (2). В разделе 3 мы выведем перенормировочную формулу для логарифмических сумм. В разделе 4 мы изучаем поведение логарифмических сумм

$S_N(\omega, \zeta)$ для больших N . Сначала рассматривается случай иррациональных ω и доказывается теорема 1. Затем, исследуется случай рациональных ω . Наконец, в разделе 5, мы проверим оценки (7) и (8).

§2. СПЕЦИАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

Пусть $h \in (0, \pi)$. Здесь мы обсудим специальную функцию σ_h , являющуюся мероморфным решением уравнения (2), которое однозначно выделяется следующими свойствами. Оно аналитично и не имеет нулей в полосе $\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| < \pi\}$, стремится к 1 при $\operatorname{Im} z \rightarrow -\infty$, и растет с минимальной возможной скоростью при $\operatorname{Im} z \rightarrow +\infty$.

Можно сказать, что функция σ_h является тригонометрическим аналогом Γ -функции Эйлера: она удовлетворяет однородному разностному уравнению первого порядка, единственным коэффициентом которого является тригонометрический полином первого порядка.

Имеется длинный список хорошо известных свойств σ_h , см., например, [1–5]. В частности, ее полюса и нули расположены в точках

$$z = -\pi - h - 2\pi k - 2hl, \quad k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \text{и} \quad z = \pi + h + 2\pi k + 2hl, \quad k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

соответственно. Поскольку все они находятся на вещественной оси, а их множество становится все более и более плотным по мере того, как возрастает $|z|$, асимптотика σ_h при стремлении z к бесконечности вдоль линий, параллельных вещественной оси, очень сложна.

Функция σ_h удовлетворяет еще одному разностному уравнению:

$$\sigma_h(z + \pi) = (1 + e^{-\frac{i\pi}{h}z})\sigma_h(z - \pi). \quad (14)$$

Тот факт, что σ_h удовлетворяет еще одному разностному уравнению с $2h$ -периодическим коэффициентом не удивителен. Он следует из наблюдения, что обе функции $z \mapsto \sigma_h(z)$ и $z \mapsto \sigma_h(z + 2\pi)$ удовлетворяют уравнению (2), и что отношение двух решений (2) является $2h$ -периодической функцией. Однако тот факт, что новое уравнение (14) подобно (2) очень необычен. Уравнение (14) играет важную роль в нашем анализе.

Нам потребуется и следующая теорема:

Theorem 2. *Фиксируем положительные X и Y . Существует такая постоянная $C > 0$, что при $|\operatorname{Re} z| < X$ и $\operatorname{Im} z < -Y$*

$$\sigma_h(z) = \exp\left(\frac{1}{2h} \int_{-i\infty}^z \ln(1 + e^{-iz}) dz + \delta\right), \quad |\delta| \leq C h e^{-|y|}, \quad (15)$$

где мы интегрируем вдоль кривой $z - i[0, +\infty)$.

Эта теорема является прямым следствием теоремы 4.1. из [11]. Сравните ее с предложением III.7 в [3]. При $h \rightarrow 0$ формула (15) описывает асимптотику σ_h . Отметим, что эта асимптотика имеет квазиклассический характер [11].

§3. ПЕРЕНОРМИРОВОЧНАЯ ФОРМУЛА

3.1. Единичная перенормировка. В этом разделе мы опишем формулу, которая выражает заданную логарифмическую сумму в терминах логарифмической суммы с меньшим количеством слагаемых. Чтобы ее описать, мы должны определить несколько объектов.

Поскольку в \mathbb{C}_- функция σ_h аналитична, не имеет нулей и стремится к 1 при $\text{Im } z \rightarrow -\infty$ (локально равномерно по $\text{Re } z$), то в \mathbb{C}_- существует одна аналитическая ветвь функции $z \mapsto \ln \sigma_h(z)$, удовлетворяющая условию $\ln \sigma_h(z) \rightarrow 0$ при $\text{Im } z \rightarrow -\infty$ (локально равномерно по $\text{Re } z$). Мы ее и используем всюду ниже.

Через $N_0 = N$, $\zeta_0 = \zeta$ и $\omega_0 = \omega$, определим N_1 , ζ_1 , ω_1 и ξ_0 формулами (4). Пусть $S_0(\omega, \zeta) = 0$ для всех ω и ζ . Справедливо следующее утверждение:

Theorem 3. Для всех $\zeta_0 \in \mathbb{C}_-$, $\omega_0 \in (0, 1)$ и натуральных N_0

$$S_{N_0}(\omega_0, \zeta_0) = (S_{N_1}(\omega_1, \zeta_1))^* + \ln \sigma_{\pi\omega_0}(2\pi(\zeta_0 + \xi_0)) - \ln \sigma_{\pi\omega_0}(2\pi\zeta_0), \quad (16)$$

где $*$ обозначает комплексное сопряжение.

Так как $\omega_0 \in (0, 1)$ и $N_1 = [\omega_0 N_0]$, эта теорема выражает $S_{N_0}(\omega_0, \zeta_0)$ через логарифмическую сумму с меньшим количеством слагаемых.

Доказательство. Из уравнения (2) следует, что

$$\begin{aligned} & \ln \sigma_{\pi\omega_0}(2\pi(\zeta_0 + \omega_0 N_0)) \\ &= \ln \sigma_{\pi\omega_0}(2\pi(\zeta_0 + \omega(N_0 - 1))) + \ln(1 + e^{-2\pi i(\omega_0(N_0 - 1) + \frac{\omega_0}{2} + \zeta_0)}) \quad (17) \\ &= \dots = \ln \sigma_{\pi\omega_0}(2\pi\zeta_0) + S_{N_0}(\omega_0, \zeta_0). \end{aligned}$$

Если $N_1 = [\omega_0 N_0] = 0$, то $\omega_0 N_0 = \xi_0$, $S_{N_1}(\omega_1, \zeta_1) = 0$, и из (17) напрямую вытекает (16). В противном случае, используя (14) – второе

разностное уравнение для σ_h , мы получим

$$\begin{aligned} & \ln \sigma_{\pi\omega_0}(2\pi(\zeta_0 + \omega_0 N_0)) \\ &= \ln \sigma_{\pi\omega_0}(2\pi(\zeta_0 + \omega_0 N_0 - 1)) + \ln \left(1 + e^{-\frac{2\pi i}{\omega_0}(\zeta_0 + \omega_0 N_0 - 1/2)}\right) \\ &= \dots = \ln \sigma_{\pi\omega_0}(2\pi(\zeta_0 + \omega_0 N_0 - N_1)) + \tilde{S} \end{aligned}$$

с

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= \sum_{n=0}^{N_1-1} \ln \left(1 + e^{-\frac{2\pi i}{\omega_0}(\zeta_0 + \omega_0 N_0 - 1/2 - n)}\right) = \sum_{n=0}^{N_1-1} \ln \left(1 + e^{-\frac{2\pi i}{\omega_0}(\zeta_0 - 1/2 - n)}\right) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{N_1-1} \ln \left(1 + e^{-\frac{2\pi i}{\omega_0}(-\zeta_0^* + 1/2 + n)}\right) \right)^* . \end{aligned}$$

Используя определения ω_1 и ζ_1 , мы приходим к формуле

$$e^{-\frac{2\pi i}{\omega_0}(-\zeta_0^* + \frac{1}{2} + m)} = e^{-2\pi i \left(-\frac{\zeta_0^*}{\omega_0} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\omega_0} \right] + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\omega_0} \right\} + m \left\{ \frac{1}{\omega_0} \right\} \right)} = e^{-2\pi i (\zeta_1 + \frac{\omega_1}{2} + m\omega_1)} .$$

В итоге, оказывается, что $\tilde{S} = (S_{N_1}(\omega_1, \zeta_1))^*$, а поскольку $\omega_0 N_0 = N_1 + \xi_0$, получаем окончательно

$$\ln \sigma_{\pi\omega_0}(2\pi(\zeta_0 + \omega_0 N_0)) = \ln \sigma_{\pi\omega_0}(2\pi(\zeta_0 + \xi_0)) + (S_{N_1}(\omega_1, \zeta_1))^* . \quad (18)$$

Сравнивая (17) с (18), приходим к (16). \square

3.2. Последовательные перенормировки. Выразив сумму $S_{N_0}(\omega_0, \zeta_0)$ через логарифмическую сумму $S_{N_1}(\omega_1, \zeta_1)$, содержащую меньшее количество слагаемых, естественно попытаться применить теорему 3 к логарифмической сумме $S_{N_1}(\omega_1, \zeta_1)$ и так далее. Это ведет к следующим результатам.

Пусть сначала $\omega \notin \mathbb{Q}$. Тогда цепная дробь, изображающая ω бесконечна, и все ω_l с $l \in \mathbb{N}$ корректно определены и отличны от нуля. Поэтому можно определить бесконечные последовательности $\{\omega_l\}$, $\{N_l\}$, $\{\xi_l\}$ и $\{\zeta_l\}$ формулами (4). Справедливо следующее утверждение.

Theorem 4. Для всех $\zeta_0 \in \mathbb{C}_-$, $\omega_0 \in (0, 1) \setminus \mathbb{Q}$ и $N = N_0 \in \mathbb{N}$ справедлива формула (9).

Доказательство. Пусть $L \in \mathbb{N}$. С помощью теоремы 3 получаем, что

$$\begin{aligned} S_{N_0}(\omega_0, \zeta_0) &= (S_{N_1}(\omega_1, \zeta_1))^* + \ln \sigma_{\pi\omega_0}(2\pi(\zeta_0 + \xi_0)) - \ln \sigma_{\pi\omega_0}(2\pi\zeta_0) \\ &= S_{N_2}(\omega_2, \zeta_2) + \sum_{l=0}^1 \left(\ln \sigma_{\pi\omega_l}(2\pi(\zeta_l + \xi_l)) - \ln \sigma_{\pi\omega_l}(2\pi\zeta_l) \right)^{*l} = \dots \quad (19) \\ &= (S_{N_L}(\omega_L, \zeta_L))^{*L} + \sum_{l=0}^{L-1} \left(\ln \sigma_{\pi\omega_l}(2\pi(\zeta_l + \xi_l)) - \ln \sigma_{\pi\omega_l}(2\pi\zeta_l) \right)^{*l}. \end{aligned}$$

Если $L = L(N_0)$, то $S_{N_L}(\omega_L, \zeta_L) = 0$, и мы приходим к (9). \square

Наконец, обратимся к случаю, когда ω_0 рационально. Тогда цепная дробь, представляющая ω_0 , конечна. Существует такое $M = M(\omega_0)$, что $\omega_M = 0$, а $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{M-1} \neq 0$.

Theorem 5. Пусть $\zeta_0 \in \mathbb{C}_-$, $\omega_0 \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$, и $N_0 \in \mathbb{N}$. Если $L(N) \leq M = M(\omega)$, то выполнено (9). В противном случае,

$$S_{N_0}(\omega_0, \zeta_0) = N_M \ln(1 + e^{-2\pi i \zeta_M}) + \sum_{l=0}^{M-1} \left(\ln(\sigma_{\pi\omega_l}(\zeta_l + \xi_l)) - \ln(\sigma_{\pi\omega_l}(\zeta_l)) \right)^{*l}. \quad (20)$$

Доказательство. Пусть $M = M(\omega)$. Если $L(N_0) \leq M$, формула (9) следует из (19) с $L = L(N_0)$. Если $L(N_0) > M$, формула (20) следует из (19) с $L = M$ и равенства

$$S_{N_M}(\omega_M, \zeta_M) = S_{N_M}(0, \zeta_M) = N_M \ln(1 + e^{-2\pi i \zeta_M})$$

которое вытекает из определений $M(\omega)$ и $S_N(\omega, \zeta)$. \square

§4. ПОВЕДЕНИЕ $S(z, h, N)$ ПРИ БОЛЬШИХ N

4.1. Иррациональные ω . Здесь мы предполагаем, что $\omega \notin \mathbb{Q}$, и доказываем Теорему 1.

Фиксируем $Y > 0$ и предположим, что $\text{Im } \zeta_0 = \text{Im } \zeta \leq -Y$. Обратите внимание, что, согласно (6), для всех $l \geq 0$ выполнено неравенство $\text{Im } \zeta_l < -Y$, и что $0 \leq \text{Re } \zeta_l < 1$ и $0 \leq \xi_l < 1$. Следовательно, в силу теоремы 2 формулу (9) можно переписать в виде

$$S_N(\omega, \zeta) = \sum_{l=0}^{L(N)-1} t_l, \quad t_l = \frac{1}{2\pi\omega_l} \int_{2\pi\zeta_l}^{2\pi(\zeta_l + \xi_l)} \ln(1 + e^{(-iz)^{*l}}) dz + O(\omega_l e^{-2\pi i \zeta_l}), \quad (21)$$

где интегрируем по прямой, параллельной вещественной оси. Кроме того, в виду (6) и поскольку $0 < \omega_l < 1$ для всех $l \geq 0$

$$|t_l| \leq \frac{C}{\omega_l} e^{-\frac{2\pi |\operatorname{Im} \zeta_0|}{\omega_0 \omega_1 \dots \omega_{l-1}}}$$

где C – положительная постоянная, зависящая только от Y .

Теперь нам потребуется теорема:

Theorem 6. Пусть $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$. Если $\sum_{l=0}^{\infty} 1/\varphi(l) < \infty$, то для почти всех $\omega \in (0, 1) \setminus \mathbb{Q}$ неравенство $a_l \geq \varphi(l)$ выполнено только для конечного числа элементов цепной дроби $[0; a_1, a_2, \dots]$, изображающей ω .

Эта теорема является одним из утверждений теоремы 30 из [10]. Теперь пусть $\{c_l\} \in l^1(\mathbb{N})$ – последовательность, удовлетворяющая (10). По теореме 6 для почти всех $\omega \in (0, 1) \setminus \mathbb{Q}$, существует такое конечное множество $\mathcal{L} \subset \mathbb{N}$, что

$$a_{l+1} \leq \frac{c_l}{1 + \frac{\omega_{l+1}}{a_{l+1}}} e^{\frac{2\pi |Y|}{\omega_0 \omega_1 \dots \omega_{l-1}}} \quad l \notin \mathcal{L}, \quad (22)$$

где a_l – l -й элемент цепной дроби для ω . Ясно, что формула (22) эквивалентна (11). Мы можем записать (21) в виде (12) с δ , удовлетворяющим оценке

$$|\delta| \leq C \left(\sum_{\substack{l \in \mathcal{L}, \\ l < L(N)}} \omega_l e^{-\frac{2\pi |Y|}{\omega_0 \omega_1 \dots \omega_{l-1}}} + \sum_{\substack{l \notin \mathcal{L}, \\ l < L(N)}} \frac{1}{\omega_l} e^{-\frac{2\pi |Y|}{\omega_0 \omega_1 \dots \omega_{l-1}}} \right) \quad (23)$$

с константой, зависящей только от Y . Согласно (11) вторая сумма в правой части (23) ограничена $\|c\|_1$. Поэтому из оценки (23) следует (13). Доказательство теоремы 1 завершено.

4.2. Рациональные ω . Легко видеть, что в случае, когда $\omega \in \mathbb{Q}$, отображение $N \mapsto S_N(\omega, \zeta)$ представляет собой сумму периодической и линейной функций. Действительно, фиксируем ζ и ω так, чтобы $\omega = p/q$, где p и q – взаимно простые целые числа. Поскольку ω и ζ фиксированы, ниже мы не указываем зависимость от них.

Lemma 1. *Функция*

$$N \rightarrow P_N = S_N - \frac{N}{q} S_q. \quad (24)$$

является периодической с периодом q .

Доказательство. Поскольку функция $n \rightarrow \ln(1 + e^{-2\pi i(\omega n + \frac{\omega}{2} + \zeta)})$ является периодической с периодом q ,

$$\sum_{n=m}^{m+q-1} \ln(1 + e^{-2\pi i(\omega n + \frac{\omega}{2} + \zeta)}) = \sum_{n=m+1}^{m+q} \ln(1 + e^{-2\pi i(\omega n + \frac{\omega}{2} + \zeta)}), \quad \forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (25)$$

Поэтому,

$$P_{N+q} - P_N = \sum_{n=N}^{N+q-1} \ln(1 + e^{-2\pi i(\omega n + \frac{\omega}{2} + \zeta)}) - \sum_{n=0}^{q-1} \ln(1 + e^{-2\pi i(\omega n + \frac{\omega}{2} + \zeta)}) = 0. \quad \square$$

Из этой леммы вытекает представление

$$S_N = P_N + \frac{N}{q} S_q, \quad (26)$$

где первое слагаемое является q -периодическим по N , а второе – линейным. Из (20) вытекает следующая лемма.

Лемма 2. Если $\zeta \in \mathbb{C}_-$, то

$$P_N = a \left(N_M - \frac{N}{q} \right) + \Delta_N, \quad (27)$$

$$\Delta_N = \sum_{l=0}^{M-1} \left(\ln \sigma_{\pi\omega_l}(2\pi(\zeta_l + \xi_l)) - \ln \sigma_{\pi\omega_l}(2\pi\zeta_l) \right)^{*l},$$

$$S_q = a, \quad a = \ln(1 + e^{-2\pi i\zeta_M}), \quad (28)$$

где $M = M(\omega)$, а ω_l , ζ_l , ξ_l и N_l определяются обычным образом через $\omega_0 = \omega$, $\zeta_0 = \zeta$ и $N_0 = N$.

Стоит отметить, что (28) можно получить напрямую, а (27) – нетривиальная формула: мы уже видели, что слагаемые суммы Δ_N могут быстро убывать с ростом l .

Доказательство. Достаточно проверить, что функции $N \mapsto N_M - N/q$ и $N \rightarrow \Delta_N$ являются q -периодическими. Действительно, сравнивая (20) с (26), мы получаем

$$N_M a + \Delta_N = P_N + \frac{N}{q} S_q. \quad (29)$$

Разделим эту формулу на N и устремим N к бесконечности. Если $N_M - N/q$ и Δ_N являются периодическими,

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} S_q &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Delta_N - P_N + N_M a}{N} = a \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_M}{N} \\ &= \frac{a}{q} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{N_M - N/q}{N/q} \right) = \frac{a}{q}, \end{aligned}$$

и утверждение леммы получится из (29).

Проверим периодичность $N_M - N/q$ и Δ_N . Представим числа ω_l , с $l = 1, 2 \dots M(\omega) - 1$, в виде $\omega_l = p_l/q_l$, где p_l и q_l – взаимно простые натуральные числа. Для $l = M(\omega)$ выберем $p_l = 0$ и $q_l = 1$.

Лемма 3. При замене N_0 на $N_0 + q_0$ для всех $l = 0, 1 \dots M(\omega)$

- N_l заменится на $N_l + q_l$;
- ξ_l не изменится.

Доказательство. Из формулы $\omega_{l+1} = \{1/\omega_l\}$ следует, что

$$q_l = p_{l-1}, \quad l = 1, \dots, M(\omega).$$

С помощью этих соотношений по индукции по $l = 0, 1, 2 \dots M(\omega) - 1$, проверяется, что

$$[\omega_l(N_l + q_l)] = [\omega_l N_l + p_l] = N_{l+1} + q_{l+1}, \quad \{\omega_l(N_l + q_l)\} = \{\omega_l N_l + p_l\} = \xi_l.$$

Из этих формул следует утверждение леммы. \square

Поскольку ζ_l не зависят от N_0 , нужная нам периодичность вытекает из леммы 3. \square

§5. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ОЦЕНКИ

Здесь мы доказываем оценки (7) и (8). Предположим, что $\omega \in (0, 1) \setminus \mathbb{Q}$. Тогда $\omega_0 = \omega = [0; a_1, a_2, a_3 \dots]$, где все a_l – натуральные числа.

Выберем $l \in \mathbb{N}$ и докажем, что $\omega_{l-1}\omega_l < 1/2$. Достаточно рассмотреть случай, когда $\omega_{l-1} > 1/2$. Тогда, поскольку $\omega_{l-1} = \frac{1}{a_l + \omega_l}$,

$$\omega_{l-1}\omega_l = 1 - a_l\omega_{l-1} < 1 - \omega_{l-1} < \frac{1}{2}.$$

Отсюда вытекает (7).

Пусть $L = L(N)$. Тогда $[\omega_{L-2} \dots [\omega_1[\omega_0 N] \dots]] \geq 1$, и $\omega_{L-2} \dots \omega_1 \omega_0 N \geq 1$.

Из последней оценки и (7) вытекает, что

$$\log_2 N \geq \log_2 \frac{1}{\omega_{L-2} \dots \omega_1 \omega_0} > \frac{L-2}{2}.$$

Откуда и следует (8).

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарны М. А. Лялинову за внимание к работе, прочтение статьи и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. G. D. Maliuzhinets, *Excitation, reflection and emission of surface waves from a wedge with given face impedances*. — Soviet Phys.: Doklady **3** (1958), 752–755.
2. V. Babich, M. Lyalinov, V. Grikurov, *Diffraction theory: the Sommerfeld–Malyuzhinets technique*, Alpha Science, Oxford 2008.
3. S. Ruijsenaars, *First order analytic difference equations and integrable quantum systems*. — J. Math. Phys. **38** (1997), 1069–1146.
4. S. Garoufalidis, R. Kashaev, *Resurgence of Faddeev’s quantum dilogarithm*, arXiv:2008.12465.
5. V. Buslaev, A. Fedotov, *On the difference equations with periodic coefficients*. — Adv. Theor. Math. Phys. **5** (2001), 1105–1168.
6. A. Fedotov, F. Klopp, *An exact renormalization formula for Gaussian exponential sums and its applications*. — Amer. J. Math. **134**, No. 3 (2012), 711–748.
7. A. Avila, S. Jitomirskaya, *The ten Matryny problem*. — Ann. Math. **170** (2009), 303–342.
8. А. А. Федотов, *Матрица монодромии для уравнения почти-Матье с малой константой связи*. — Функц. анализ и его прил. **52**, No. 4 (2018), 89–93.
9. S. Jitomirskaya, F. Yang, *Pure point spectrum for the Maryland model: a constructive proof*. — Ergodic Theory Dynam. Systems, in press (2020).
10. А. Я. Хинчин, *Цепные дроби*, Физматлит, М., 1960.
11. А. А. Федотов, *Квазиклассические асимптотики функций Малюжинца*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **451** (2016), 178–187.

Fedotov A. A., Lukashova I. I. On a self-similar behavior of logarithmic sums.

The logarithmic sums $S_N(\omega, \zeta) = \sum_{n=0}^{N-1} \ln(1 + e^{-2\pi i(\omega n + \frac{\omega}{2} + \zeta)})$, where ω and ζ are parameters, are related to trigonometric products from the theory of quasiperiodic operators, as well as to a special function kindred to the Malyuzhinets function from the diffraction theory, hyperbolic Ruijsenaars G -function arising in connection with the theory integrable systems,

and the Faddeev quantum dilogarithm, which plays an important role in the knot theory, Teichmüller quantum theory and complex Chern-Simons theory. Assuming that $\omega \in (0, 1)$ and $\zeta \in \mathbb{C}_-$, and using renormalization formulas similar to the ones well known in the theory of the Gauss exponential sums, we describe the behavior of the logarithmic sums for large N .

С.-Петербургский государственный
университет, С.-Петербург, Россия
E-mail: a.fedotov@spbu.ru

Поступило 7 ноября 2021 г.

С.-Петербургский государственный
университет, С.-Петербург, Россия
E-mail: ilukashova072@gmail.com