G. I. Arkhipov, V. N. Chubarikov, Arithmetic conditions for solvability of nonlinear systems of Diophantine equations, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1985, Volume 284, Number 1, 16–21 *равномерная относительно* $(t^0, x^0) \in Q_T^\rho$, *то* $u \in C^\lambda(Q_T^\rho)$ (*соответственно* $u \in$ $\in C^{1+\lambda}(Q_T^\rho)$).

Авторы выражают благодарность В.А. Ильину, Е.М. Ландису и Н.Н. Уральцевой за полезное обсуждение результатов.

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР
Баку

Поступило
19 VII 1984

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 2. *Talenti G.* – Ann. Mat. Pura ed Appl., 1965, vol. 69, № 4. 3. *Gordes H.O.* – Math. Ann., 1956, vol. 131. 4. *Кружков С.Н.* – ДАН, 1966, т. 170, № 3. 5. *Fiorito G.* – Matematiche, 1980, vol. 35. 6. *Ильин В.А.* – УМН, 1960, т. 15, вып. 2. 7. *Pucci C.* Equazioni elittiche estremalli. In courso di stampe, 1966.

УДК 511 МАТЕМАТИКА

Г.И. АРХИПОВ, В.Н. ЧУБАРИКОВ

ОБ АРИФМЕТИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком В.С. Владимировым 9 VII 1984)

В настоящей работе рассматривается задача, сформулированная в [1]. Мы продолжаем исследования по p-адическому методу А.А. Карацубы. Здесь даны условия разрешимости в натуральных числах системы уравнений

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{k} x_{1,j}^{t_1} x_{2,j}^{t_2}\ldots x_{r,j}^{t_r} = N(t_1, t_2, \ldots, t_r),\\ &0 \leqslant t_1 \leqslant n_1, \quad 0 \leqslant t_2 \leqslant n_2, \ldots, 0 \leqslant t_r \leqslant n_r,\end{aligned} \tag{1}$$

и родственных ей систем.

Имеется два типа таких условий: условия порядка и арифметические условия. При этом арифметические условия эквивалентны разрешимости систем сравнений вида

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{k} x_{1,j}^{t_1} x_{2,j}^{t_2}\ldots x_{r,j}^{t_r} \equiv N(t_1, t_2, \ldots, t_r) \pmod q,\\ &0 \leqslant t_1 \leqslant n_1, \quad 0 \leqslant t_2 \leqslant n_2, \ldots, 0 \leqslant t_r \leqslant n_r,\end{aligned} \tag{2}$$

для всех модулей q, не превосходящих T, где $T = T(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ – некоторая положительная постоянная. Связь между разрешимостью систем сравнений (2) и некоторой системой линейных уравнений в целых числах устанавливается в теореме 2. Разрешимость этой линейной системы уравнений в целых числах и будет арифметическим условием.

Отметим также, что условия порядка состоят в том, что найдется решение системы уравнений (1) в действительных числах и такое, что матрица Якоби, соответствующая этому решению, имеет максимальный ранг.

Как условия порядка, так и арифметические условия, приведенные в настоящей статье, являются обобщением соответствующих условий работы [4], стр. 26 (см. также [2, 3]).

Рассмотрим систему диофантовых уравнений

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
&\epsilon_1 + \epsilon_2 + \ldots + \epsilon_s = M_0,\\
&\epsilon_1 x_1 + \epsilon_2 x_2 + \ldots + \epsilon_s x_s = M_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\epsilon_1 x_1^n + \epsilon_2 x_2^n + \ldots + \epsilon_s x_s^n = M_n,
\end{aligned}
$$

где $M_0, M_1, \ldots, M_n$ – фиксированные натуральные числа; неизвестными системы являются величины $x_1, x_2, \ldots, x_s, \epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_s$, причем $x_1, x_2, \ldots, x_s$ принимают неотрицательные целые значения, а неизвестные $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_s$ принимают значения ± 1. Рассмотрим далее систему линейных уравнений в целых числах $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$:

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
&t_0 + t_1 + t_2 + \ldots + t_n = M_0,\\
&t_1 + 2t_2 + \ldots nt_n = M_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&t + 2^n t_2 + \ldots + n^n t_n = M_n.
\end{aligned}
$$

Л е м м а 1. *Из разрешимости системы* (3) *следует разрешимость системы* (4); *и наоборот, из разрешимости системы уравнений* (4) *следует, что найдется такое s, при котором система* (3) *имеет решение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала для любого целого x найдем решение в целых числах $T_0, T_1, \ldots, T_n$ системы уравнений

$$
(5)\qquad \sum_{i=0}^{n} T_i i^s = x^s, \quad s = 1, 2, \ldots, n.
$$

Величины $T_i = T_i(x)$ как функции от x являются многочленами степени n, причем

$$
T_i = T_i(x) = (-1)^{n-i} \frac{x(x-1)\ldots(x-i-1)(x-i+1)\ldots(x-n)}{i!(n-i)!}.
$$

Отсюда следует, что T_i – целые числа. Пусть теперь система (3) разрешима и $x_1, x_2, \ldots, x_s, \epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_s$ является ее решением. Положим в системе уравнений (5) $x = x_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, s$. Вместо $1, x_\nu, \ldots, x_\nu^n$ в (3) подставим левые части уравнений из (5). Приводя подобные члены при $1, i, \ldots, i^n, i = 0, 1, \ldots, n$, получим решение системы уравнений (4):

$$
t_i = \sum_{\nu=1}^{s} T_i(x_\nu), \quad i = 0, 1, \ldots, n.
$$

Первая часть утверждения леммы доказана.

Пусть теперь $t_0, t_1, \ldots, t_n$ – решение системы уравнений (4). Положим

$$
\begin{aligned}
&s = |t_0| + |t_1| + \ldots + |t_n|,\\
&x_1 = \ldots = x_{|t_0|} = 0, \quad \epsilon_1 = \ldots = \epsilon_{|t_0|} = \operatorname{sgn} t_0,\\
&x_{|t_0|+1} = \ldots = x_{|t_0|+|t_1|} = 1, \quad \epsilon_{|t_0|+1} = \ldots = \epsilon_{|t_0|+|t_1|} = \operatorname{sgn} t_1, \ldots,\\
&x_{|t_0|+\ldots+|t_{n-1}|+1} = \ldots = x_s = n, \quad \epsilon_{|t_0|+\ldots+|t_{n-1}|+1} = \ldots = \epsilon_s = \operatorname{sgn} t_n.
\end{aligned}
$$

Приведенный набор $x_1, x_2, \ldots, x_s, \epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_s$ является решением системы уравнений (3). Лемма доказана.

Пусть $N_1, N_2, \ldots, N_k$, k – натуральные числа, $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ – многочлены с целыми коэффициентами, n равно максимуму степеней многочленов $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$. Рассмотрим систему уравнений

$$(6) \qquad \sum_{r=1}^{s} \epsilon_r f_\nu(x_r) = N_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, k,$$

где неизвестными системы являются величины $x_1, x_2, \ldots, x_s, \epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_s$, причем $x_1, x_2, \ldots, x_s$ принимают неотрицательные целые значения, а $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_s$ принимают значения ± 1. Рассмотрим далее систему линейных уравнений в целых числах $t_0, t_1, \ldots, t_n$:

$$(7) \qquad \sum_{r=0}^{n} t_r f_\nu(r) = N_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, k.$$

Теорема 1. *Из разрешимости системы уравнений* (6) *следует разрешимость* (7); *и наоборот, из разрешимости* (7) *следует, что при некотором s система уравнений* (6) *имеет решение.*

Доказательство. Очевидно, из разрешимости (7) следует, что система уравнений (6) имеет решение. Пусть теперь $x_1, x_2, \ldots, x_s, \epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_s$ – решение системы уравнений (6), $f_\nu(x) = a_0^{(\nu)} + a_1^{(\nu)} x + \ldots + a_n^{(\nu)} x^n$. Тогда, пользуясь леммой 1, числа N_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, k$, можно представить в виде

$$N_\nu = \sum_{r=1}^{s} \epsilon_r f_\nu(x_r) = \sum_{r=1}^{s} \epsilon_r \sum_{j=0}^{n} a_j^{(\nu)} x_r^j = \sum_{j=0}^{n} a_j^{(\nu)} \sum_{r=1}^{s} \epsilon_r x_r^j =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} a_j^{(\nu)} \sum_{i=0}^{n} t_i i^j = \sum_{i=0}^{n} t_i \sum_{j=0}^{n} a_j^{(\nu)} i^j = \sum_{i=0}^{n} t_i f_\nu(i).$$

Найденные величины $t_0, t_1, \ldots, t_n$ являются решением системы уравнений (7).

Пусть $1 \leqslant l < \ldots < m < n$ – натуральные числа. Рассмотрим систему уравнений

$$(8) \qquad \begin{aligned} &\epsilon_1 x_1^l + \ldots + \epsilon_s x_x^l = N_l, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\epsilon_1 x_1^m + \ldots + \epsilon_s x_s^m = N_m, \\ &\epsilon_1 x_1^n + \ldots + \epsilon_s x_s^n = N_n, \end{aligned}$$

где неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_s$ принимают целые неотрицательные значения, а $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_s$ – значения ± 1. Рассмотрим далее систему линейных уравнений в целых числах $t_1, t_2, \ldots, t_n$:

$$(9) \qquad \begin{aligned} &t_1 + t_2 \cdot 2^l + \ldots + t_n \cdot n^l = N_l, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &t_1 + t_2 \cdot 2^m + \ldots + t_n \cdot n^m = N_m, \\ &t_1 + t_2 \cdot 2^n + \ldots + t_n \cdot n^n = N_n. \end{aligned}$$

Следствие: *Из разрешимости системы* (8) *следует разрешимость* (9); *и наоборот, из разрешимости* (9) *следует, что найдется такое s, при котором система* (8) *имеет решение.*

Доказательство. Этот результат вытекает из теоремы 1 при $f_1(x) = x^l, \ldots, f_{k-1}(x) = x^m$, $f_k(x) = x^n$. Рассмотрим систему уравнений

$$
(10)\quad \begin{aligned} &\sum_{j=1}^{s} \epsilon_j x_{1,j}^{t_1} x_{2,j}^{t_2} \ldots x_{r,j}^{t_r} = M(t_1, t_2, \ldots, t_r), \\ &0 \leqslant t_1 \leqslant n_1, \quad 0 \leqslant t_2 \leqslant n_2, \ldots, 0 \leqslant t_r \leqslant n_r, \end{aligned}
$$

где неизвестные $x_{\nu,j}$, $\nu = 1, 2, \ldots, r, j = 1, 2, \ldots, s$, принимают неотрицательные целые значения, а $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_s$ принимают два значения ± 1. Рассмотрим систему линейных уравнений в целых числах $c(i_1, i_2, \ldots, i_r)$, $0 \leqslant i_1 \leqslant n_1, 0 \leqslant i_2 \leqslant n_2, \ldots, 0 \leqslant i_r \leqslant n_r$:

$$
(11)\quad \begin{aligned} &\sum_{i_1=0}^{n_1} \ldots \sum_{i_r=0}^{n_r} c(i_1, i_2, \ldots, i_r) i_1^{t_1} i_2^{t_2} \ldots i_r^{t_r} = M(t_1, t_2, \ldots, t_r), \\ &0 \leqslant t_1 \leqslant n_1, \quad 0 \leqslant t_2 \leqslant n_2, \ldots, 0 \leqslant t_r \leqslant t_r. \end{aligned}
$$

Теорема 2. *Из разрешимости системы* (11) *следует разрешимость* (10); *и наоборот, из разрешимости системы* (10) *следует, что найдется такое* s, *при котором система* (11) *имеет решение.*

Доказательство. Очевидно, из разрешимости (11) следует разрешимость (10). Покажем теперь, что разрешима система уравнений в целых числах $c_{i_1, \ldots, i_r} = c_{i_1, \ldots, i_r}(x_1, x_2, \ldots, x_r)$:

$$
(12)\quad \begin{aligned} &\sum_{i_1=0}^{n_1} \ldots \sum_{i_r=0}^{n_r} c_{i_1, \ldots, i_r} \cdot i_1^{t_1} i_2^{t_2} \ldots i_r^{t_r} = x_1^{t_1} x_2^{t_2} \ldots x_r^{t_r}, \\ &0 \leqslant t_1 \leqslant n_1, \quad 0 \leqslant t_2 \leqslant n_2, \ldots, 0 \leqslant t_r \leqslant n_r. \end{aligned}
$$

В качестве решения (12) возьмем

$$
c_{i_1, \ldots, i_r} = T_{i_1}(x_1) T_{i_2}(x_2) \ldots T_{i_r}(x_r),
$$

где $T_i(x)$ – решение системы (5). Получим

$$
\begin{aligned} &\sum_{i_1=0}^{n_1} \ldots \sum_{i_r=0}^{n_r} c_{i_1, \ldots, i_r} i_1^{t_1} i_2^{t_2} \ldots i_r^{t_r} = \\ &= \left(\sum_{i_1=0}^{n_1} T_{i_1}(x_1) i_1^{t_1} \right) \left(\sum_{i_2=0}^{n_2} T_{i_2}(x_2) i_2^{t_2} \right) \ldots \left(\sum_{i_r=0}^{n_r} T_{i_r}(x_r) i_r^{t_r} \right) = \\ &= x_1^{t_1} x_2^{t_2} \ldots x_r^{t_r}. \end{aligned}
$$

Далее аналогично доказательству леммы 1, подставляя решение (12) в (10), получим решение системы (11).

Пусть $N_1, N_2, \ldots, N_k$, k – натуральные числа, $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_r), \ldots, f_k(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ – многочлены с целыми коэффициентами, n_l – максимум степеней многочленов $f_1, f_2, \ldots, f_k$ по переменной x_l, $l = 1, 2, \ldots, r$. Рассмотрим систему уравнений

$$
(13)\quad \sum_{j=1}^{s} \epsilon_j f_t(x_{1,j}, x_{2,j}, \ldots, x_{r,j}) = N_t, \quad 1 \leqslant t \leqslant k,
$$

где неизвестные $x_{1,j}, x_{2,j}, \ldots, x_{r,j}$, $j = 1, 2, \ldots, s$, принимают целые неотрицательные значения, а $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_s$ – значения ± 1.

Рассмотрим далее систему линейных уравнений в целых числах $c(i_1, i_2, \ldots, i_r)$, $0 \leqslant i_1 \leqslant n_1$, $0 \leqslant i_2 \leqslant n_2, \ldots, 0 \leqslant i_r \leqslant n_r$:

$$(14) \quad \sum_{i_1=0}^{n_1} \sum_{i_2=0}^{n_2} \ldots \sum_{i_r=0}^{n_r} c(i_1, i_2, \ldots, i_r) f_t(i_1, i_2, \ldots, i_r) = N_t, \quad 1 \leqslant t \leqslant k.$$

Теорема 3. *Из разрешимости* (13) *следует разрешимость* (14); *и наоборот, из разрешимости системы* (14) *следует, что найдется такое* s, *при котором система* (13) *имеет решение.*

Доказательство. Вывод теоремы 3 аналогичен выводу теоремы 1, но вместо леммы 1 используется теорема 2.

Пусть $f(x) = f(x;\ a_0, a_1, \ldots, a_n) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ – многочлен с целыми коэффициентами. Рассмотрим уравнение в многочленах

$$(15) \quad g(x) = \epsilon_1 f_1^k(x) + \epsilon_2 f_2^k(x) + \ldots + \epsilon_s f_s^k(x),$$

где $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_s(x)$ – неизвестные многочлены, степени которых не превосходят n, а величины $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_s$ принимают значения ± 1. Рассмотрим также линейное уравнение с целыми коэффициентами $t(i_0, i_1, \ldots, i_n)$, $0 \leqslant i_0, \ldots, i_n \leqslant k$:

$$(16) \quad g(x) = \sum_{i_0=0}^{k} \sum_{i_1=0}^{k} \ldots \sum_{i_n=0}^{k} t(i_0, i_1, \ldots, i_n) f^k(x;\ i_0, i_1, \ldots, i_n).$$

Теорема 4. *Из разрешимости уравнения* (15) *следует разрешимость* (16); *и наоборот, из разрешимости* (16) *следует, что найдется такое* s, *при котором уравнение* (15) *имеет решение.*

Доказательство. Очевидно, из разрешимости (16) следует разрешимость уравнения (15). Покажем прежде всего, что разрешимо в целых числах $c(i_0, i_1, \ldots, i_n)$, $0 \leqslant i_0, \ldots, i_n \leqslant k$, уравнение

$$(17) \quad \sum_{i_0=0}^{k} \sum_{i_1=0}^{k} \ldots \sum_{i_n=0}^{k} c(i_0, i_1, \ldots, i_n) f^k(x;\ i_0, i_1, \ldots, i_n) = f^k(x;\ a_0, a_1, \ldots, a_n).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений, эквивалентную предыдущему уравнению:

$$(18) \quad \sum_{i_0=0}^{k} \ldots \sum_{i_n=0}^{k} c(i_0, i_1, \ldots, i_n) \sum_{\substack{t_0=0 \\ t_0+\ldots+t_n=k \\ t_1+\ldots+t_n=s}}^{k} \ldots \sum_{t_n=0}^{k} i_0^{t_0} \ldots i_n^{t_n} =$$

$$= \sum_{\substack{t_0=0 \\ t_0+\ldots+t_n=k \\ t_1+\ldots+t_n=s}}^{k} \ldots \sum_{t_n=0}^{k} a_0^{t_0} \ldots a_n^{t_n}, \quad 0 \leqslant s \leqslant k.$$

В силу теоремы 2 разрешима система уравнений в целых числах $c(i_0, i_1, \ldots, i_n)$:

$$(19) \quad \begin{gathered} \sum_{i_0=0}^{k} \ldots \sum_{i_n=0}^{k} c(i_0, i_1, \ldots, i_n) i_0^{t_0} \ldots i_n^{t_n} = a_0^{t_0} a_1^{t_1} \ldots a_n^{t_n}, \\ 0 \leqslant t_0, t_1, \ldots, t_n \leqslant k. \end{gathered}$$

Из разрешимости (19) следует разрешимость (18), а следовательно, разрешимость (13). Подставляя полученные решения в (15), найдем решение (16). Теорема доказана.

Таким образом, выполнение условий порядка и арифметических условий является необходимым для разрешимости системы уравнений (1). Можно показать по аналогии с одномерным случаем (проблема Гильберта – Камке), что при большом числе слагаемых k системы (1) эти условия будут и достаточными. В последующих работах мы предполагаем найти точный порядок числа k, начиная с которого эти условия будут необходимыми и достаточными.

Мы выражаем глубокую благодарность проф. А.А. Карацубе за внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
13 VII 1984

ЛИТЕРАТУРА

1. *Архипов Г.И., Карацуба А.А., Чубариков В.Н.* Тр. МИАН, 1980, с. 151. 2. *Виноградов И.М.* Избр. тр. М.: Изд-во АН СССР, 1952. 3. *Марджанишвили К.К.* – Изв. АН СССР. Сер. матем., 1937, т. 1, с. 609–631. 4. *Архипов Г.И.* – Там же, 1984, т. 48, № 1, с. 3–52.

УДК 517.947 МАТЕМАТИКА

А.Л. БУХГЕЙМ

МНОГОМЕРНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА

(Представлено академиком М.М. Лаврентьевым 9 VII 1984)

В шаре $\Omega = \{x \in R^n \mid |x| < 1\}$ рассматривается задача на собственные значения для уравнения Шредингера

(1) $Lu \equiv -\Delta u + q(x)u = \lambda u, \qquad x \in \Omega;$

(2) $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma(x)u = 0, \qquad x \in \partial\Omega,$

с достаточно гладким вещественным потенциалом q и функцией $\sigma \geqslant 0$. Здесь ν – единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$. Для простоты формулировок будем считать, что все встречающиеся далее функции бесконечно дифференцируемы, в частности, $q \in C^\infty(\bar\Omega)$, $\sigma \in C^\infty(\partial\Omega)$, причем

(3) $\operatorname{supp} q \subseteq \{x \mid |x| \leqslant s\} = \Omega_s, \qquad s < 1,$

где $\operatorname{supp} q$ – носитель функции q. Пусть λ_k – собственные значения краевой задачи (1), (2), занумерованные в порядке возрастания с учетом кратности, а $u_k(x)$ – соответствующие им ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции. Спрашивается, когда спектральные данные, т.е. некоторый набор функционалов от λ_k, u_k, однозначно определяют оператор L или, другими словами, функции q и σ? В одномерном случае $\Omega = (-1, 1)$ теорема В.А. Марченко [1] утверждает, что спектральные данные $\{\lambda_k, u_k(-1)\}$ однозначно определяют оператор L. Можно показать, что в этом случае оператор L однозначно определяется спектральными данными вида $\{\lambda_k, \langle u_k, f\rangle u_k(-1)\}$, где f – заданная функция класса $C_0^\infty(\Omega)$, $f(x) \neq 0$ при $x \in \Omega_s$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. Обобщению этого утверждения на