E. L. Bashkirov, The group Spin_8 and some subgroups of the unitary group of degree four over a quaternion algebra,
Algebra i Analiz, 2001, Volume 13, Issue 3, 43–64

Алгебра и анализ
Том 13 (2001), вып. 3

ГРУППА Spin_8 И НЕКОТОРЫЕ ПОДГРУППЫ УНИТАРНОЙ ГРУППЫ СТЕПЕНИ 4 НАД ТЕЛОМ КВАТЕРНИОНОВ

© Е. Л. Башкиров

В статье проводится распознавание линейных групп степени 4 над телом кватернионов, содержащих специальную унитарную группу над подполем этого тела, ассоциированную с невырожденной косоэрмитовой формой, индекс Витта которой равен 1.

§1. Введение

Описание линейных групп, заключенных между двумя заданными линейными группами, т.е. так называемых промежуточных групп, является достаточно плодотворным и распространенным методом изучения подгруппового строения линейных групп. Наиболее полно результаты, полученные этим методом, отражены в [1–3]. Настоящая статья, являясь продолжением работы [4], имеет своей целью распознавание промежуточных групп, заключенных между полной линейной группой степени 4 над телом кватернионов и специальной унитарной группой над подполем этого тела, ассоциированной с косоэрмитовой формой от четырех переменных, индекс Витта которой равен 1. Такие группы появляются в [4] при решении общей задачи описания линейных групп над телом кватернионов, содержащих квадратичную унипотентную подгруппу вычета 1 над центральным подполем этого тела. Данная задача возникает как этап классификации линейных групп над полем, содержащих подгруппу квадратичных унипотентных элементов вычета 2. В свою очередь, последняя классификационная проблема является составной частью построения бесконечного аналога теории квадратичных пар Томпсона [5].

Пусть D — ассоциативное кольцо с единицей, E — правый унитарный свободный D-модуль, имеющий базис из $n \geqslant 2$ элементов, E^* — сопряженный к E модуль (являющийся левым D-модулем), D^* — мультипликативная группа всех обратимых элементов кольца D. Если $n \geqslant 2$ — целое число, то D^n — правый D-модуль, состоящий из всех элементов $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ с

Ключевые слова: спинорная группа, унитарная группа, кватернионы.

покомпонентными операциями сложения и умножения на элементы из D. $M_n(D)$ — кольцо всех матриц степени n над D, 1_n — единичная матрица степени n. Если L — надкольцо кольца D, то через $E_{(L)}$ обозначается правый L-модуль, полученный из E расширением D до L, т.е. $E_{(L)} = E \otimes_D L$. Полная линейная группа $\mathrm{GL}_n(D) = \mathrm{GL}(E)$ модуля E — это группа всех автоморфизмов модуля E. Для любых $t \in E \setminus \{0\}$, $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$ таких , что $\varphi(t) = 0$, преобразование $E \to E : x \to x + t\varphi(x)$ содержится в $\mathrm{GL}(E)$ и называется трансвекцией модуля E. Подгруппа группы $\mathrm{GL}_n(D)$, порожденная всеми трансвекциями модуля E, называется специальной линейной группой модуля E и обозначается $\mathrm{SL}(E) = \mathrm{SL}_n(D)$. Если $X \subseteq \mathrm{GL}_n(D)$, то $T(X)$ — множество всех трансвекций, содержащихся в X. Квадратичным унипотентным элементом из $\mathrm{GL}_n(D)$, вычет которого равен $r \geq 1$, называется любая матрица из $\mathrm{GL}_n(D)$, сопряженная в $\mathrm{GL}_n(D)$ с матрицей

$$\operatorname{diag}\left(\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}}_{r \text{ раз}}, 1_{n-2r}\right).$$

Трансвекция — это квадратичный унипотентный элемент вычета 1, называемый еще корневым элементом. Квадратичный унипотентный элемент вычета 2 называется длинным корневым элементом. Через $\mathrm{Inv}(D)$ обозначим множество всех инволюций (антиавтоморфизмов порядка 2) кольца D. Предположим, что $\mathrm{Inv}(D) \neq \varnothing$, и пусть $\sigma \in \mathrm{Inv}(D)$. Через $S_D^+(\sigma)(S_D^-(\sigma))$ обозначим множество всех σ-симметричных (σ-кососимметричных) элементов из D. Совокупность всех невырожденных σ-косоэрмитовых форм на $E \times E$ обозначим $\mathrm{Fsd}(E, \sigma)$. Отметим, что все косоэрмитовы формы, фигурирующие в этой статье, полулинейны по первому аргументу. Пусть $\Phi \in \mathrm{Fsd}(E, \sigma)$. Если L — надкольцо кольца D и L имеет инволюцию π, продолжающую σ, то π-косоэрмитова форма, полученная из Φ расширением D до L и продолжением σ до π, обозначается $\Phi_{(L,\pi)}$. Если из контекста видно, о какой инволюции π идет речь или же эта инволюция для нас несущественна, то последняя форма обозначается просто как $\Phi_{(L)}$. Через $\mathrm{Ist}(E, \Phi)$ обозначается множество всех изотропных элементов из E, т.е. всех таких $x \in E$, что $\Phi(x, x) = 0$. Через $U_n(D, \Phi, \sigma) = U_n(D, \Phi) = U(E, \Phi, \sigma) = U(E, \Phi)$ обозначается унитарная группа, ассоциированная с Φ, а через $T_n(D, \Phi, \sigma) = T_n(D, \Phi) = T(E, \Phi, \sigma) = T(E, \Phi)$ — нормальный делитель группы $U_n(D, \Phi, \sigma)$, порожденный множеством $T(U_n(D, \Phi, \sigma))$. Если $t \in \mathrm{Ist}(E, \Phi)$, $\lambda \in S_D^+(\sigma)$, то трансвекция $E \to E : x \to x + t\lambda\Phi(t, x)$ содержится в $U_n(D, \Phi, \sigma)$, т.е. в $T_n(D, \Phi, \sigma)$. Эта трансвекция обозначается $\tau_{t,\lambda}^{(\Phi)}$ или же $\tau_{t,\lambda}$, если понятно, о какой форме Φ идет речь. При этом $\tau_t = \tau_{t,1}$. Если Z — множество, то $|Z|$ — мощность множества Z.

Если F — поле, то $\mathrm{Sfq}(F)$ — множество всех тел кватернионов над F, $\mathrm{Alq}(F)$ — множество всех алгебр кватернионов над F. Если $A \in \mathrm{Alq}(F)$, то $I(A)$ — множество всех $J \in \mathrm{Inv}(A)$ таких, что $S_A^+(J) = F$. Отметим, что $|I(A)| = 1$. Если, кроме того, $A \notin \mathrm{Sfq}(F)$, то $A \cong M_2(F)$ и при интерпретации элементов из A как матриц из $M_2(F)$ действие инволюции $J \in I(A)$ задается формулой

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^J = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (a, b, c, d \in F).$$

Основным результатом статьи [4] является следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Пусть F — поле, $\mathrm{char}\, F \neq 2$, $D \in \mathrm{Sfq}(F)$, $K \subseteq D$ — подполе, $J' \in \mathrm{Inv}(K)$, $K_0 \subseteq K$ — поле инвариантов автоморфизма J', $\Phi \in \mathrm{Fsd}(K^4, J')$, $J \in I(D)$, $k = K_0 \cap F$. Предположим, что индекс Витта формы Φ равен 1, D алгебраично над k, и $|k| > 5$. Тогда если $T_4(K, \Phi) \leqslant X \leqslant \mathrm{GL}_4(D)$, то X содержит нормальную подгруппу G, для которой выполняется одно из следующих утверждений:*

1) *$G = \mathrm{SL}_4(L)$ или $G = T_4(L, \Phi_{(L)})$, где L — тело, $K \subseteq L \subseteq D$;*

2) *$[K : k] = 2$, $J' = J|K$, группа G изоморфна спинорной группе $\mathrm{Spin}_m(P, f)$, где P — поле, $k \subseteq P \subseteq F$, $m = 7$ или $m = 8$, f — невырожденная квадратичная форма от m переменных, индекс Витта которой равен 2;*

3) *$[K : k] = 2$, $J' = J|K$, существуют поля $P, P_0 \subseteq F$ такие, что $k \subseteq P_0 \subset P$, $[P : P_0] = 2$, индекс Витта формы $\Phi_{(Q)} = \Phi_{(Q,J)}$, где $Q = K(P_0)$, равен 1, G порождается группой $T_4(Q, \Phi_{(Q)}, J)$ и трансвекцией $\tau_{e_1+e_2u\theta+e_3v+e_4(v^2)^\sigma v} \in T_4(D, \Phi_{(D)}, J)$, где $u \in Q \setminus P_0$, $u^2 \in P_0$, $v \in D$, $uv = -vu$, $v^2 \in P$, $\theta \in P \setminus P_0$, $\theta^2 \in P_0$, σ — нетривиальный автоморфизм поля P над P_0, e_1, e_2, e_3, e_4 — базис пространства Q^4, относительно которого форма $\Phi_{(Q)}$ имеет матрицу*

$$\mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, 2u\theta((v^2)^\sigma - v^2)^{-1}, -2u\theta((v^2)^\sigma - v^2)^{-1}v^{-2}(v^{-2})^\sigma\right).$$

Предметом настоящей статьи является группа, возникающая в пункте 3) теоремы 1.1. В [4] эта группа обозначена через $Y(A, \theta, u, v, e_1, e_2, e_3, e_4, \Phi_{(Q)})$, где $A = P + Pu + Pv + Puv \in \mathrm{Sfq}(P)$, причем, как показано в лемме 2 [4], A не содержит подтела из $\mathrm{Sfq}(P_0)$. Основная цель настоящей работы — доказательство следующего утверждения.

Теорема 1.2. *Пусть θ, u, v, e_1, e_2, e_3, e_4, J, Q, $\Phi_{(Q)}$ обозначают то же, что в теореме 1.1, и пусть $A = P + Pu + Pv + Puv$. Тогда для группы $Y(A, \theta, u, v, e_1, e_2, e_3, e_4, \Phi_{(Q)})$ существуют:*

a) *квадратичная форма q от восьми переменных над полем Q, коэффициенты которой лежат в P_0, а индекс Витта равен 3;*

б) *группа* $Z \leqslant \mathrm{GL}_8(Q(\theta))$, *изоморфная спинорной группе* $\mathrm{Spin}_8(Q,q)$;

в) J*-полулинейная полуинволюция* d *пространства* $(Q(\theta))^8$ — *такие, что группа* $Y(A,\theta,u,v,e_1,e_2,e_3,e_4,\Phi_{(Q)})$ *изоморфна подгруппе группы* Z, *порожденной всеми длинными корневыми элементами из* Z, *коммутирующими с* d.

С учетом теоремы 1.2 данное в теореме 1.1 описание подгрупп группы $\mathrm{GL}_4(D)$, содержащих группу $T_4(K,\Phi)$, принимает следующий вид.

Теорема 1.3. *Пусть имеют место все предположения и обозначения теоремы 1.1. Тогда группа* X *содержит нормальную подгруппу* G, *для которой выполняется одно из следующих утверждений*:

1) G *такова, как в п.* 1), 2) *теоремы* 1.1;

2) $[K:k]=2$, $J'=J|K$, *существуют поля* $P, P_0 \subseteq F$, *такие, что* $k \subseteq P_0 \subset P$, $[P:P_0]=2$, *индекс Витта формы* $\Phi_{(Q,J)}$, *где* $Q=K(P_0)$, *равен* 1, *и группа* G *изоморфна подгруппе* Z_0 *группы* $Z \leqslant \mathrm{GL}_8(K(P))$, *где* Z *изоморфна спинорной группе некоторой квадратичной формы от восьми переменных над полем* Q, *все коэффициенты которой лежат в поле* P_0 *и которая имеет индекс Витта, равный* 3, *а* Z_0 *порождается всеми длинными корневыми элементами из* Z, *перестановочными с подходящей* J*-полулинейной полуинволюцией пространства* $(K(P))^8$.

Непосредственное доказательство теоремы 1.2 проводится в §4. В §5 формулируется одно достаточное условие, при выполнении которого группа $Y(A,\theta,u,v,e_1,e_2,e_3,e_4,\Phi_{(Q)})$ является подгруппой спинорной группы квадратичной формы от восьми переменных, индекс Витта которой равен 2. В §6 строятся примеры, показывающие, что существуют тела кватернионов как удовлетворяющие, так и не удовлетворяющие этому условию. §2 и 3 посвящены доказательству необходимых вспомогательных утверждений.

§2. Трансвекции в унитарной группе над алгеброй кватернионов

Пусть P — поле, $\mathrm{char}\, P \neq 2$, $A \in \mathrm{Alq}(P)$, $J \in I(A)$, E — правый A-модуль, $\Phi \in \mathrm{Fsd}(E,J), U=U(E,\Phi,J)$.

Лемма 2.1. *Каждый элемент* $g \in T(U)$ *имеет вид* $g=\tau_{a,\lambda}^{(\Phi)}$, *где* $\Phi(a,a)=0, \lambda \in S_A^+(J)$.

Доказательство. Если $A \in \mathrm{Sfq}(P)$, то лемма 2.1 — частный случай хорошо известного общего факта, установленного в [6]. Пусть $A \notin \mathrm{Sfq}(P)$, т.е. $A \cong M_2(P)$. Будем рассматривать элементы из A как 2×2-матрицы над P, и если $\alpha \in A$, то элемент $\alpha+\alpha^J$ обозначим через $\mathrm{tr}(\alpha)$. Считаем $g \neq 1$ и положим $g=g(a,\rho)$, где $a \in E$, $\rho \in E^*$. Пусть x, y — произвольные элементы из E. Так как $g \in U$, то

$$\Phi(x,a)\rho(y) + \rho(x)^J\Phi(a,y) + \rho(x)^J\Phi(a,a)\rho(y) = 0. \tag{2.1}$$

Если в (2.1) положить $y = a$, то

$$\rho(x)^J\Phi(a,a) = 0,$$

и значит,

$$\Phi(x,a)\rho(y) + \rho(x)^J\Phi(a,y) = 0. \tag{2.2}$$

Взяв в (2.2) $y = x$, получим

$$\rho(x)^J\Phi(a,x) \in P1_2. \tag{2.3}$$

Предположим, что $\rho(x)$ необратимо при всех $x \in E$. Тогда, согласно (2.3), $\rho(x)^J\Phi(a,x)$ — необратимая скалярная матрица, т.е.

$$\rho(x)^J\Phi(a,x) = 0,$$

и значит, при всех $x, y \in E$

$$\rho(x)^J\Phi(a,y) = -\rho(y)^J\Phi(a,x). \tag{2.4}$$

Сопоставив (2.2) и (2.4), найдем, что

$$\mathrm{tr}(\Phi(a,x)^J\rho(y)) = 0.$$

Заменив в последнем равенстве y на $y\lambda$, где λ — произвольный элемент из A, будем иметь $\Phi(a,x)^J\rho(y) = 0$ при всех $x, y \in E$. Зафиксировав y и используя невырожденность Φ, получим $g = 1$. Значит, для некоторого $x \in E$ элемент $\rho(x)$ обратим. Если при этом $\Phi(a,x)$ необратимо, то из (2.3), (2.2) следует $g = 1$. Значит, $\Phi(a,x) \in A^*$, и, используя (2.2), найдем $\lambda \in A^*$ такое, что $\rho(x) = \lambda\Phi(a,x)$ при всех $x \in A$. Из (2.2) следует тогда, что

$$(\Phi(x,a)\lambda + \Phi(x,a)^J\lambda^J)\Phi(a,y) = 0$$

при всех $x, y \in E$. Выбрав в качестве x, y элементы, для которых $\Phi(a,y)$, $\Phi(x,a) \in A^*$, получим $\lambda \in S_A^+(J) = P1_2$, и $\lambda \neq 0$. Отсюда

$$0 = \rho(a) = \lambda\Phi(a,a),$$

и $\Phi(a,a) = 0$. Лемма доказана. •

§3. Унипотентные элементы в группе Spin_8

Пусть P — поле, $\operatorname{char} P \neq 2$, P_1 — P-алгебра размерности 2 (P_1 не обязательно является полем), $B \in \mathrm{Alq}(P)$, $\overline{B} = B \otimes_P P_1$ — алгебра кватернионов над P_1, $\{1, u_1, v_1, u_1 v_1\}$ — базис алгебры B такой, что

$$u_1^2 \in P^*, \quad v_1^2 \in P^*, \quad u_1 v_1 = -v_1 u_1.$$

Предположим, что алгебра P_1 имеет базис $\{1, u_2\}$ такой, что $u_2^2 \in P^*$. Подгруппа группы $\mathrm{GL}_4(\overline{B})$, порожденная всеми матрицами

$$\left.\begin{array}{c}
\begin{pmatrix}1&0&0&r\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},
\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&r&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},
\begin{pmatrix}1&0&r&0\\0&1&0&-r\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}1&0&u_1r&0\\0&1&0&u_1r\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},
\begin{pmatrix}1&0&v_1r&0\\0&1&0&v_1r\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}1&0&w_1u_2r&0\\0&1&0&w_1u_2r\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},
\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&r&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},
\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\r&0&0&1\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\r&0&1&0\\0&-r&0&1\end{pmatrix},
\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\u_1r&0&1&0\\0&u_1r&0&1\end{pmatrix},
\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\v_1r&0&1&0\\0&v_1r&0&1\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\w_1u_2r&0&1&0\\0&w_1u_2r&0&1\end{pmatrix},
\end{array}\right\} \tag{3.1}$$

где $r \in P^*$, изоморфна спинорной группе квадратичной формы

$$q = \xi_1^2 - \xi_2^2 + \xi_3^2 - \xi_4^2 + \xi_5^2 - u_1^2\xi_6^2 + u_1^2 v_1^2 \xi_7^2 - v_1^2 u_2^2 \xi_8^2$$

над P, индекс Витта $\nu(q)$ которой не меньше 2. В этой статье нас будет интересовать лишь тот случай, когда P_1 — поле, и значит, $\nu(q) \leqslant 3$. Если $\nu(q) = 2$, то $\overline{B} \in \mathrm{Sfq}(P_1)$. Если же $\nu(q) = 3$, то $B \cong M_2(P)$, и $\overline{B} \cong M_2(P_1)$.

В этом случае можно считать $u_1^2 = 1$ и отождествить u_1 с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Если при этом $v_1^2 = c \in P^*$, то v_1 отождествляется с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & c \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Наконец, u_2 отождествляется с матрицей $\begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$, где δ — элемент из алгебраического замыкания поля P такой, что $\delta^2 = u_2^2$. Введем в $\overline{B}$ умножения $\odot$, положив $a \odot b = 2^{-1}(ab + ba)$ $(a, b \in \overline{B})$. Тогда P-модуль $\overline{B}$ относительно этой операции является йордановой P-алгеброй, которая обозначается $\overline{B}^{(+)}$. Во всей оставшейся части статьи через Φ_0 обозначается матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть E — свободный правый унитарный $\overline{B}$-модуль, имеющий базис из четырех элементов f_1, f_2, f_3, f_4. Не будем отличать автоморфизмы модуля E от матриц из $M_4(\overline{B})$, определяемых ими в этом базисе. Пусть $J \in I(\overline{B})$, $\Phi \in \mathrm{Fsd}(E, J)$, и матрица формы Φ относительно базиса f_1, f_2, f_3, f_4 равна Φ_0. Если $s, t \in E$, причем $\Phi(s, s) = \Phi(t, t) = \Phi(s, t) = 0$, то для всех $x \in E$ и для всех $\beta \in \overline{B}$ положим

$$\tau_{s,t,\beta}(x) = x + s\beta\Phi(t, x) + t\beta^J\Phi(s, x).$$

Ясно, что $\tau_{s,t,\beta} \in U_4(\overline{B}, \Phi, J) = U$. В этом параграфе запись $\tau_{s,\lambda}$ $(s \in \mathrm{Ist}(E, \Phi)$, $\lambda \in P_1)$ означает $\tau_{s,\lambda}^{(\Phi)}$. Тогда матрицы (3.1) — это следующие преобразования из U:

$$\tau_{f_1,-r},\ \tau_{f_2,r},\ \tau_{f_1,f_2,r},\ \tau_{f_1,f_2,u_1r},\ \tau_{f_1,f_2,v_1r},$$
$$\tau_{f_1,f_2,w_1u_2r},\ \tau_{f_3,-r},\ \tau_{f_4,r},\ \tau_{f_3,f_4r_3}\ \tau_{f_3,f_4,u_1r},\ \tau_{f_3,f_4v_1,r},\ \tau_{f_3,f_4,w_1u_2r} \quad (r \in P).$$

Группу, порожденную этими преобразованиями (или матрицами (3.1)), обозначим через $Y^{(0)}(\overline{B}, P, u_2, u_1, v_1, f_1, f_2, f_3, f_4) = Y^{(0)}$. Заметим, что $Y^{(0)}$ порождается следующими трансвекциями из U:

$$\tau_{f_1,r},\ \tau_{f_2}\tau_{f_1+f_2},\ \tau_{f_1+f_2u_1},\ \tau_{f_1+f_2v_1},\ \tau_{f_1+f_2w_1u_2},$$
$$\tau_{f_3},\ \tau_{f_4},\ \tau_{f_3+f_4},\ \tau_{f_3+f_4u_1},\ \tau_{f_3+f_4v_1},\ \tau_{f_3+f_4w_1u_2} \quad (r \in P),$$

и значит, $Y^{(0)} \leqslant T_4(\overline{B}, \Phi, J)$. Положим $M^{(0)} = P(u_1) + P(u_1u_2)v_1$.

Лемма 3.1. *Если* $a, b, c \in M^{(0)}$, *то* $a + a^J$, $ab + b^J a^J \in P$, $ab + ba, abc + cba, aba \in M^{(0)}$.

Доказательство. Если π — инволюция алгебры $\overline{B}$ такая, что

$$u_1^\pi = u_1, \quad v_1^\pi = v_1, \quad u_2^\pi = -u_2,$$

то $M^{(0)} = S^+_{\overline{B}}(\pi)$, и значит, $M^{(0)}$ — подалгебра йордановой алгебры $\overline{B}^{(+)}$. Утверждения леммы легко выводятся из этого замечания и простейших свойств йордановых алгебр (см., например, [7]). •

Лемма 3.2. *Если* $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4 \in \overline{B}$ *и* $\eta_1\eta_4^J - \eta_3\eta_2^J, \eta_1\eta_4^J u_1 - u_1\eta_3\eta_2^J \in M^{(0)}$, *то* $\eta_1\eta_4^J v_1 - v_1\eta_3\eta_2^J \in M^{(0)}$ *тогда и только тогда, когда* $\eta_1\eta_4^J w_1 u_2 - w_1 u_2 \eta_3\eta_2^J \in M^{(0)}$.

Доказательство. Положим $\eta_i\eta_j^J = a_{ij} + b_{ij}v_1$, $a_{ij}, b_{ij} \in P(u_1)$. Пусть $\eta_1\eta_4^J v_1 - v_1\eta_3\eta_2^J \in M^{(0)}$. Тогда $b_{14} + b_{23}, -b_{14}u_1 + u_1 b_{23}, a_{14} - a_{23} \in P(u_1u_2)$. Разложив b_{14}, b_{23} по базису $1, u_1, u_2, u_1u_2$ P-алгебры $P_1(u_1)$, получаем $-b_{14} + b_{23}^J \in Pu_2 + Pu_1u_2$, что и требовалось. Положим $v_1' = w_1u_2$. Заменив базис P-алгебры $\overline{B}$, состоящий из произведений элементов $1, u_1, v_1, u_2$, на базис, состоящий из произведений элементов $1, u_1, v_1', u_2$, получаем обратное утверждение. Лемма доказана. •

Обозначим через $\mathcal{R}^{(0)}(\overline{B}, P, u_2, u_1, v_1, f_1, f_2, f_3, f_4) = \mathcal{R}^{(0)}$ множество всех элементов $f_1\eta_1 + f_2\eta_2 + f_3\eta_3 + f_4\eta_4 \in E$ $(\eta_i \in \overline{B})$ таких, что

$$\left.\begin{aligned} \eta_i\eta_i^J &\in P && (1 \leqslant i \leqslant 4), \\ \eta_1\eta_4^J + \eta_4\eta_1^J, \eta_2\eta_3^J + \eta_3\eta_2^J &\in P, && \\ \eta_i\eta_j^J &\in M^{(0)} && (i = 1, 4,\ j = 2, 3), \\ \eta_1\eta_4^J - \eta_3\eta_2^J, \eta_1\eta_4^J u_1 - u_1\eta_3\eta_2^J &\in M^{(0)}, && \\ \eta_1\eta_4^J v_1 - v_1\eta_3\eta_2^J &\in M^{(0)}. && \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

Положим $\operatorname{Ist}(E, \Phi) = I$ и через $R^{(0)}(\overline{B}, P, u_2, u_1, v_1, f_1, f_2, f_3, f_4) = R^{(0)}$ обозначим множество $\mathcal{R}^{(0)} \cap I$.

Лемма 3.3. *Группа* $Y^{(0)}$ *индуцирует подгруппы групп всех перестановок множеств* $\mathcal{R}^{(0)}$ *и* $R^{(0)}$.

Доказательство. Достаточно доказать лемму для $\mathcal{R}^{(0)}$. Пусть σ_0 — преобразование из $Y^{(0)}$ такое, что $\sigma_0(f_1) = -f_4$, $\sigma_0(f_2) = -f_3$, $\sigma_0(f_3) = f_2$, $\sigma_0(f_4) = f_1$. Группа $Y^{(0)}$ порождается всеми преобразованиями

$$\sigma_0, \quad \tau_{f_1,f_2,r}, \quad \tau_{f_1,f_2,u_1r}, \quad \tau_{f_1,f_2,v_1r}, \quad \tau_{f_1,f_2,w_1u_2r} \quad (r \in P). \tag{3.3}$$

Поэтому достаточно показать, что каждое из этих преобразований переводит любой элемент из $\mathcal{R}^{(0)}$ в элемент из $\mathcal{R}^{(0)}$. Для преобразований (3.3) это проверяется непосредственно с использованием лемм 3.1 и 3.2. С целью проверки соответствующего утверждения для преобразований τ_{f_1,f_2,w_1u_2r} положим $w_1u_2 = v_1'$. Тогда, как нетрудно убедиться, $\mathcal{R}^{(0)}\ (\overline{B}, P, u_2, u_1, v_1', f_1, f_2, f_3, f_4) = \mathcal{R}^{(0)}$, и равенство $\tau_{f_1,f_2,w_1u_2r}(\mathcal{R}^{(0)}) = \mathcal{R}^{(0)}$ следует из уже доказанного равенства $\tau_{f_1,f_2,v_1r}(\mathcal{R}^{(0)}) = \mathcal{R}^{(0)}$, где v_1 заменено на v_1', а $\mathcal{R}^{(0)}$ — на $\mathcal{R}^{(0)}(\overline{B}, P, u_2, u_1, v_1', f_1, f_2, f_3, f_4)$. Лемма доказана. •

Введем в рассмотрение множество $\mathcal{R}_0^{(0)}$ всех элементов $f_1\eta_1 + f_2\eta_2 + f_3\eta_3 + f_4\eta_4 \in E$ $(\eta_i \in \overline{B})$ таких, что

$$\begin{aligned}\eta_i\eta_i^J &= 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant 4),\\ \eta_i\eta_j^J &= 0 \quad (i = 1,4,\ j = 2,3),\\ \eta_1\eta_4^J - \eta_3\eta_2^J &= 0,\end{aligned}$$

и положим $R_0^{(0)} = \mathcal{R}_0^{(0)} \cap I$. Заметим, что если $\overline{B} \in \mathrm{Sfq}(P_1)$, то $R_0^{(0)} = \mathcal{R}_0^{(0)} = \{0\}$. В силу этого следующие две леммы нетривиальны лишь в случае, когда $\overline{B} \notin \mathrm{Sfq}$, и именно этот случай предполагается в их доказательствах без всяких оговорок.

Лемма 3.4. 1) *Если* $s = f_1\eta_1 + f_2\eta_2 + f_3\eta_3 + f_4\eta_4 \in \mathcal{R}_0^{(0)}$, *то* $\eta_1\eta_4^J = \eta_2\eta_3^J = 0$;

2) $\mathcal{R}_0^{(0)} \subseteq \mathcal{R}^{(0)}$, $R_0^{(0)} \subseteq R^{(0)}$;

3) *если* $s \in R^{(0)}$, *то* $\tau_{s,r} = 1$ *при всех* $r \in P_1$.

Доказательство. Утверждение 2) следует из 1). Для доказательства 3) достаточно записать матрицу трансвекции $\tau_{s,r}$ относительно базиса $\{f_i \mid 1 \leqslant i \leqslant 4\}$ (положив $s = f_1\eta_1 + f_2\eta_2 + f_3\eta_3 + f_4\eta_4$) и воспользоваться 1). Докажем 1). Если $\eta_1 = 0$ или $\eta_2 = 0$, то утверждение 1), очевидно, выполнено. Предположим, что $\eta_1 \neq 0$, $\eta_2 \neq 0$. Рассматривая η_i как элементы из $M_2(P_1)$, положим

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}, \quad \eta_3 = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}, \quad \eta_4 = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix}$$
$$(a_i, b_i, c_i, d_i \in P_1).$$

Так как при любом $g \in \overline{B}^*$ элементы $g^{-1}\eta_i g$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ удовлетворяют всем равенствам, определяющим $\mathcal{R}_0^{(0)}$, и

$$\eta_1\eta_4^J = \eta_2\eta_3^J = 0 \iff (g^{-1}\eta_1 g)(g^{-1}\eta_4 g)^J = (g^{-1}\eta_2 g)(g^{-1}\eta_3 g)^J = 0,$$

то η_i можно заменить на $g^{-1}\eta_i g$. Сделав это при подходящем $g \in \overline{B}^*$, можно считать $a_1 = a_3 = 0$. Тогда

$$\eta_1\eta_2^J = \begin{pmatrix} -a_2b_3 & a_2b_1 \\ -a_4b_3 & a_4b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и поскольку $a_2 \neq 0$ или $a_4 \neq 0$, то $b_1 = b_3 = 0$. Аналогично из равенств $\eta_1\eta_3^J = \eta_2\eta_4^J = 0$ и предположения $\eta_2 \neq 0$ следует $c_1 = c_3 = d_1 = d_3 = 0$. Поэтому $\eta_1\eta_4^J = \eta_2\eta_3^J = 0$. Лемма доказана. •

Если $s \in E$, то $Y^{(0)}(s) = \{g(s) \mid g \in Y^{(0)}\}$ — орбита элемента s при действии группы $Y^{(0)}$. Через N обозначим совокупность всех элементов $f_1\eta_1 + f_2\eta_2 + f_3\eta_3 + f_4\eta_4 \in E$ $(\eta_i \in \overline{B})$ таких, что элемент η_1 необратим, т.е. $\eta_1\eta_1^J = 0$.

Лемма 3.5. *Пусть $s \in E$. Если $Y^{(0)}(s) \subseteq N$, то $s \in \mathcal{R}_0^{(0)}$. Если при этом $s \in I$, то $s \in R_0^{(0)}$.*

Доказательство. Положим $s = f_1\eta_1 + f_2\eta_2 + f_3\eta_3 + f_4\eta_4$ $(\eta_i \in \overline{B})$. Поскольку $s \in Y^{(0)}(s)$, то $\eta_1\eta_1^J = 0$. Так как $\tau_{f_1,\pm1}(s) \in Y^{(0)}(s)$, то

$$\eta_1\eta_4^J + \eta_4\eta_1^J = 0, \tag{3.4}$$

$$\eta_4\eta_4^J = 0. \tag{3.5}$$

Пусть $\beta \in M^{(0)}$. Тогда $\tau_{f_1,f_2,\pm\beta}(s) \in Y^{(0)}(s)$, и значит,

$$\eta_3\eta_3^J = 0, \tag{3.6}$$

а также $\operatorname{tr}(\beta\eta_3\eta_1^J) = 0$ при всех $\beta \in M^{(0)}$. Множество $M^{(0)}$ содержит элементы $1, u_1, v_1, w_1u_2$, отождествимые соответственно с матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & c \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & c\delta \\ -\delta & 0 \end{pmatrix}.$$

Эти матрицы линейно-независимы над P_1, и потому порождают P_1-модуль $M_2(P_1)$. Следовательно, $\operatorname{tr}(\beta\eta_3\eta_1^J) = 0$ при всех $\beta \in M_2(P_1)$, откуда $\eta_1\eta_3^J = 0$. Заменив s на $\tau_{f_1,f_2,\beta}(s)$ $(\beta \in M^{(0)})$ и применив к последнему элементу (3.4), получим $\eta_3\eta_4^J = 0$. Применив (3.6) к $\tau_{f_3,\pm1}(s)$, а затем (3.4) к $\tau_{f_3,f_4,\beta},(s)$, находим, что $\eta_2\eta_3^J + \eta_3\eta_2^J = 0$,

$$\eta_2\eta_2^J = 0, \tag{3.7}$$

$$\eta_1\eta_2^J = 0. \tag{3.8}$$

Применив (3.7), (3.5), (3.8) к $\tau_{f_1,f_2,\beta}(s)$ $(\beta \in M^{(0)})$, получим, что $\eta_2\eta_4^J = 0$ и $\eta_1\eta_4^J\beta - \beta\eta_3\eta_2^J = 0$ при всех $\beta \in M^{(0)}$. Лемма доказана. •

Лемма 3.6. *Группа $Y^{(0)}$ индуцирует подгруппы групп всех перестановок множеств $\mathcal{R}_0^{(0)}$ и $R_0^{(0)}$.*

Доказательство этой леммы проводится по схеме доказательства леммы 3.3, и потому здесь опускается. •

Лемма 3.7. *Группа $Y^{(0)}$ индуцирует подгруппу группы всех перестановок множества $R^{(0)} \setminus R_0^{(0)}$.*

Доказательство. Лемма следует из лемм 3.6 и 3.3. •

Лемма 3.8. *Группа $Y^{(0)}$ действует транзитивно на множестве всех моногенных подмодулей модуля E, порожденных элементами из $R^{(0)} \setminus R_0^{(0)}$.*

Доказательство. Пусть $s = f_1\eta_1 + f_2\eta_2 + f_3\eta_3 + f_4\eta_4 \in R^{(0)} \setminus R_0^{(0)}$, где $\eta_i = x_i + y_i v_1$, $x_i, y_i \in P(u_1)$. Достаточно показать, что $f_1 \in Y^{(0)}(s)$. В силу леммы 3.5 можно считать, что $\eta_1 = 1$. Так как $x_2, x_3 \in P(u_1)$, то, заменив s на $\tau_{f_3,f_4,-x_3}\tau_{f_4,f_2,-x_2^J}(S)$, можно считать, что $x_1 = 1$, $y_1 = x_2 = x_3 = y_4 = 0$. Если $y_2 = y_3 = 0$, то $x_4 \in P$, $\tau_{f_4,-x_4}(s) = f_1$, и все доказано. В противном случае, не умаляя общности, предположим, что $y_2 \neq 0$. Поскольку $\eta_2\eta_4^J \in M^{(0)}$ и $P(u_1u_2)$ — поле, то $x_4 \in P(u_1u_2)$. Положим $x_4 = a + du_1u_2$, $y_3^J y_e v^2 = a' + d'u_1u_2$ $(a, d, a', d' \in P)$. Так как $s \in I$, то $d' = d$, и заменив s на $\tau_{f_4,a'-a}(s)$, можно считать, что $s = f_1 + f_2y_2v_1 + f_3y_3v_1 + f_4y_2^J y_3 v_1^2$. Тогда $\tau_{f_3,f_4,-y_3v_1}(s) = f_1 + f_2y_2v_1$, и значит, $f_1 + f_3y_2v_1 = s_1 \in Y^{(0)}(s)$. Наконец, $\tau_{f_3,f_4,-y_2v_1}(s_1) = f_1$, и лемма доказана. •

Предложение 3.1. *Если $g \in Y^{(0)}$, $g \neq 1$, то $g \in T(Y^{(0)})$ тогда и только тогда, когда $g = \tau_{s,r}$ для некоторых $s \in R^{(0)} \setminus R_0^{(0)}$ и $r \in P^*$.*

Доказательство. Пусть $g \in T(Y^{(0)})$. Поскольку $Y^{(0)} \leqslant T_4(\overline{B}, \Phi, J)$, то по лемме 2.1 $g = \tau_{s,r}$, где $s \in I$, $r \in P_1^*$. Положим $s = f_1\eta_1 + f_2\eta_2 + f_3\eta_3 + f_4\eta_4$ $(\eta_i \in \overline{B})$. Так как $g \neq 1$, то по лемме 3.4 можно считать, что $\eta_1 \in \overline{B}^*$. Положим $g(-f_4) = f_1\eta_1' + f_2\eta_2' + f_3\eta_3' + f_4\eta_4'$. Здесь

$$\begin{aligned} \eta_1' &= \eta_1\eta_1^J r, \\ \eta_2' &= \eta_2\eta_1^J r, \\ \eta_3' &= \eta_3\eta_1^J r, \\ \eta_4' &= -1 + \eta_4\eta_1^J r. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Поскольку $-f_4 \in R^{(0)}$, то по лемме 3.3 $g(-f_4) \in R^{(0)}$, т.е.

$$\eta_1'\eta_4'^J + \eta_4'\eta_1'^J \in P, \tag{3.10}$$

$$\left.\begin{aligned} \eta_i'\eta_i'^J &\in P \qquad (1 \leqslant i \leqslant 4), \\ \eta_2'\eta_3'^J + \eta_3'\eta_2'^J &\in P, \\ \eta_i'\eta_j'^J &\in M^{(0)} \quad (i = 1,4,\ j = 2,3), \\ \eta_1'\eta_4'^J - \eta_3'\eta_2'^J, \eta_1'\eta_4'^J u_1 - u_1\eta_3'\eta_2'^J, \eta_1'\eta_4'^J v_1 - v_1\eta_3'\eta_2'^J &\in M^{(0)}. \end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

Из (3.10) и (3.9) имеем

$$-2\eta_1\eta_1^J r + \eta_1\eta_1^J\eta_4\eta_1^J r^2 + r^2\eta_1\eta_4^J\eta_1\eta_1^J \in P. \tag{3.12}$$

Так как $\tau_{s,-r} = g^{-1} \in Y^{(0)}$, то в (3.12) можно заменить r на $-r$. Сложив полученное включение с (3.12), найдем, что

$$\eta_1\eta_1^J r \in P^*, \tag{3.13}$$

$$r(\eta_1\eta_4^J + \eta_4\eta_1^J) \in P. \tag{3.14}$$

Учитывая (3.13) и подставляя значения для η_i' из (3.9) в (3.11), получим

$$\left.\begin{aligned} r\eta_i\eta_i^J &\in P \qquad (2 \leqslant i \leqslant 4), \\ r(\eta_2\eta_3^J + \eta_3\eta_2^J) &\in P, \\ r\eta_i\eta_j^J &\in M^{(0)} \quad (i = 1,4,\ j = 2,3), \\ r(\eta_1\eta_4^J - \eta_3\eta_2^J), r(\eta_1\eta_4^J u_1 - u_1\eta_3\eta_2^J), r(\eta_1\eta_4^J v_1 - v_1\eta_3\eta_2^J) &\in M^{(0)}. \end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

Так как $g = \tau_{s\eta_1^{-1}, \eta_1\eta_1^J r}$, то в (3.13)–(3.15) можно заменить r на $\overline{r} = \eta_1\eta_1^J r$ и η_i на $\overline{\eta_i} = \eta_i\eta_1^{-1}$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$. Поскольку $\overline{r} \in P^*$, то

$$\begin{aligned} \overline{\eta}_i\overline{\eta}_i^J &\in P \qquad (1 \leqslant i \leqslant 4), \\ \overline{\eta}_1\overline{\eta}_4^J + \overline{\eta}_4\overline{\eta}_1^J, \overline{\eta}_2\overline{\eta}_3^J + \overline{\eta}_3\overline{\eta}_2^J &\in P, \\ \overline{\eta}_i\overline{\eta}_j^J &\in M^{(0)} \quad (i = 1,4,\ j = 2,3), \\ \overline{\eta}_1\overline{\eta}_4^J - \overline{\eta}_3\overline{\eta}_2^J, \overline{\eta}_1\overline{\eta}_4^J u_1 - u_1\overline{\eta}_3\overline{\eta}_2^J, \overline{\eta}_1\overline{\eta}_4^J v_1 - v_1\overline{\eta}_3\overline{\eta}_2^J &\in M^{(0)}. \end{aligned}$$

Поэтому $s\eta_1^{-1} \in R^{(0)} \setminus R_0^{(0)}$. Обратное утверждение следует из леммы 3.8. Предложение доказано. •

§4. Вложение в группу Spin_8 индекса 3

В настоящем параграфе доказывается теорема 1.2. Для удобства несколько изменим обозначения и будем исследовать следующую ситуацию.

Пусть k_1 — поле, $\mathrm{char}\, k_1 \neq 2$ и k_1 содержит подполе k такое, что $[k_1 : k] = 2$. Зафиксируем в $k_1 \setminus k$ элемент θ, для которого $\theta^2 \in k$. Пусть $A \in \mathrm{Sfq}(k_1)$. Предположим, что A содержит подполе $K \not\subseteq k_1$ такое, что $[K : k] = 2$, и зафиксируем элемент $u \in K \setminus k$, для которого $u^2 \in k$. Предположим, что A не содержит подтела из $\mathrm{Sfq}(k)$. Это означает, что $v^2 \notin k$ для всех $v \in A^*$, антикоммутирующих с u. Пусть $J \in I(A)$. Ограничение инволюции J на любое подтело тела A, инвариантное в целом относительно J, обозначается также через J. Поле $K_1 = k_1(u)$ является расширением Галуа степени 4 поля k. Обозначим через σ автоморфизм над k поля K_1 такой, что $u^\sigma = u, \theta^\sigma = -\theta$. Пусть E — векторное K-пространство размерности 4. Зафиксируем базис e_1, e_2, e_3, e_4 модуля E и определим на $E \times E$ форму из $\mathrm{Fsd}(E, J)$, матрица которой относительно базиса $\{e_i \mid 1 \leqslant i \leqslant 4\}$ равна

$$\mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, 2u\theta((v^2)^\sigma - v^2)^{-1}, -2u\theta((v^2)^\sigma - v^2)^{-1}v^{-2}(v^{-2})^\sigma\right).$$

Согласно результатам статьи [4], индекс Витта формы Φ равен 1, $e_1 + e_2 u\theta + e_3 v + e_4 (v^2)^\sigma v \in \mathrm{Ist}(E_{(A)}, \Phi_{(A,J)})$ и

$$Y(A, \theta, u, v, e_1, e_2, e_3, e_4, \Phi) = \langle T_4(K, \Phi), \tau^{(\Phi)}_{e_1 + e_2 u\theta + e_3 v + e_4 (v^2)^\sigma v}\rangle$$

— собственная подгруппа группы $T_4(A, \Phi_{(A)}, J)$. Всюду на протяжении этого параграфа группу $Y(A, \theta, u, v, e_1, e_2, e_3, e_4, \Phi)$ отождествляем с ее матричной реализацией относительно базиса $\{e_i \mid 1 \leqslant i \leqslant 4\}$ и обозначаем эту реализацию через Y. Основная цель настоящего параграфа — доказательство следующей теоремы.

Теорема 4.1. *Для группы Y существуют:*

а) *квадратичная форма q от восьми переменных над полем K, коэффициенты которой лежат в k, а индекс Витта равен* 3;

б) *группа $Z \leqslant \mathrm{GL}_8(K_1)$, изоморфная группе $\mathrm{Spin}_8(K, q)$;*

в) *J-полулинейная полуинволюция d пространства K_1^8 такие, что Y изоморфна подгруппе группы Z, порожденной всеми длинными корневыми элементами из Z, коммутирующими с d.*

Введем в рассмотрение двумерную k_1-алгебру P_1, имеющую базис 1, u_0 такой, что $u_0^2 = u^2$. Алгебра P_1 изоморфна максимальному подполю тела A, и значит, P_1 — поле разложения для A, т.е. $\overline{B} = A \otimes_{k_1} P_1 \cong M_2(P_1)$.

Положим $u_1 = uu_0^{-1}$, $\Phi(e_ie_i) = \alpha_i = r_iu$, $r_i \in k^*$ $(i = 3,4)$. Ясно, что $u_1^2 = 1$. Поскольку $v^2 \neq 0$, то в k можно выбрать y так, что если $\xi = 2^{-1}((r_3 - r_4y^2)y^{-1}r_4^{-1} + (r_3 + r_4y^2)r_4^{-1}y^{-1}u_1)$, то $\mu = 1 + \xi^{-1}(v^2)^\sigma \in \overline{B}^*$. Положим $v_1 = \mu v$. Тогда $v_1^2 = v^2 + (v^2)^\sigma + (r_3 - r_4y^2)y^{-1}r_4^{-1} \in k$ и $B = k(u_0) + k(u_0)u_1 + k(u_0)v_1 + k(u_0)u_1v_1 \in \mathrm{Alq}(k(u_0))$. Положим $f_1 = e_1$, $f_2 = e_3 + e_4\xi$, $f_3 = (e_3 - e_4\xi)2^{-1}\alpha_3^{-1}$, $f_4 = -e_2$. Очевидно, $\{f_i \mid 1 \leqslant i \leqslant 4\}$ — базис модуля $E_{(k(u)(u_0))}$, и матрица J-косоэрмитовой формы $\Phi_{(k(u)(u_0))}$ относительно этого базиса равна Φ_0. Инволюцию J продолжим до инволюции из $I(\overline{B})$, которую также будем обозначать через J. Через M обозначим поле $k(u_0)$. Поскольку $\overline{B} = B \otimes M(\theta)$, то определена группа $Y^{(0)}(\overline{B}, M, \theta, u_1, v_1, f_1, f_2, f_3, f_4)$, которую мы отождествим с ее матричной реализацией относительно базиса $\{f_i \mid 1 \leqslant i \leqslant 4\}$, и эту реализацию обозначим через $Y^{(0)}$. Определено также множество $R^{(0)}$ $(\overline{B}, M, \theta, u_1, v_1, f_1, f_2, f_3, f_4) = R^{(0)}$. Пусть

$$d_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{-1} & 2^{-1}\xi^{-1} \\ 0 & 0 & \alpha_3 & -\alpha_3\xi^{-1} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

— матрица перехода от базиса $\{f_i \mid 1 \leqslant i \leqslant 4\}$ к базису $\{e_i \mid 1 \leqslant i \leqslant 4\}$. Основная часть доказательства теоремы 4.1 заключена в доказательстве следующего предложения.

Предложение 4.1. *Группа Y совпадает с подгруппой группы $d_1^{-1}Y^{(0)}d_1$, порожденной всеми трансвекциями из $d_1^{-1}Y^{(0)}d_1$, содержащимися в* $\mathrm{GL}_4(A)$.

Введем в рассмотрение множество $R(A, \theta, u, v, e_1, e_2, e_3, e_4, \Phi) = R$, определенное в §2 [4]. Напомним, что это множество состоит из всех векторов $e_1\lambda_1 + e_2\lambda_2 + e_3\lambda_3 + e_4\lambda_4 \in \mathrm{Ist}(E_{(A)}, \Phi_{(A,J)})$ $(\lambda_i \in A)$ таких, что

$$\lambda_i\lambda_i^J \in k \qquad (i = 1,2), \tag{4.2}$$

$$\lambda_i\lambda_j^J \in K + K_1v \qquad (i = 1,2,\ j = 3,4), \tag{4.3}$$

$$\lambda_3\lambda_4^J \in K + K_1v, \tag{4.4}$$

$$\lambda_1\lambda_2^J + \alpha_3\lambda_3\lambda_3^J \in K + K_1u, \tag{4.5}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_i\lambda_3^Jv^2 + \lambda_i\lambda_4^J \in K_1 + k(u\theta)v, \\ &\lambda_i\lambda_3^Jv^2 - \lambda_i\lambda_4^J \in K_1 + (ku + k\theta)v \quad (i = 1,2). \end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

Доказательство предложения 4.1 опирается на три нижеследующие леммы.

Лемма 4.1. $R = R^{(0)} \cap E_{(A)}$.

Доказательство. а) Пусть $s = e_1\lambda_1 + e_2\lambda_2 + e_3\lambda_3 + e_4\lambda_4 \in R$. Это означает, что для $\lambda_i \in A$ выполняются включения (4.2)–(4.6). Положим $\eta_1 = \lambda_1$, $\eta_2 = 2^{-1}\lambda_3 + 2^{-1}\xi^{-1}\lambda_4$, $\eta_3 = \alpha_3\lambda_3 - \alpha_3\xi^{-1}\lambda_4$, $\eta_4 = -\lambda_2$. Тогда $s = f_1\eta_1 + f_2\eta_2 + f_3\eta_3 + f_4\eta_4$, и нужно показать, что для η_i выполняются включения (3.2), в которых P заменено на M, а в качестве $M^{(0)}$ взято $M(u_1) + M(u_1\theta)v_1$. Пусть $\lambda_i\lambda_j^J = a_{ij} + b_{ij}v$ $(a_{ij}, b_{ij} \in K_1)$. То, что $\eta_i\eta_i^J \in M$ следует при $i = 1, 4$ из (4.2), а при $i = 2, 3$ из (2.12) [4] и (4.4). Включение $\eta_1\eta_4^J + \eta_4\eta_1^J \in M$ очевидно. Далее,

$$\eta_2\eta_3^J + \eta_3\eta_2^J = 2^{-1}[(\xi^{-1}a_{34}^J\alpha_3^J - a_{34}\xi^{-J}\alpha_3^J) + (\xi^{-1}a_{34}^J\alpha_3^J - a_{34}\xi^{-J}\alpha_3^J)^J] \in M,$$

как элемент из $S^+_{M(u)}(J)$. Включение $\eta_2\eta_t^J \in M^{(0)}$ $(t = 1, 4)$ равносильно включениям

$$a_{i3} + a_{i4}\xi^{-1} \in M(u_1), \quad (b_{i3} + b_{i4}\xi^{-1})v \in M(u_1\theta)v_1 \quad (i = 1, 2),$$

первое из которых очевидно. Для доказательства второго, учитывая равенство $v = \mu^{-1}v_1$, достаточно установить, что $(b_{i3} + b_{i4}\xi^{-1})\mu^{-1} \in M(u_1\theta)$. Но (4.6) равносильно равенству $b_{i4} = (b_{i3}v^2)^{J\sigma}$, и значит, достаточно показать, что $b_{i3}^{J\sigma}(v^2)^\sigma\xi^{-1}\mu^{-1} = (b_{i3}\mu^{-1})^{J\sigma}$. Если $b_{i_03} = 0$ для некоторого $i_0 = 1, 2$, то это равенство очевидно, а если $b_{i3} \neq 0$ (при каждом $i = 1, 2$), то оно выполняется в силу соотношения $\xi\xi^J = v^2(v^2)^\sigma$. Совершенно аналогично проверяется включение $\eta_3\eta_t^J \in M^{(0)}$ $(t = 1, 4)$. Покажем, что $\eta_1\eta_4^J - \eta_3\eta_2^J \in M^0$. Это равносильно включениям

$$a_{12} + 2^{-1}\alpha_3\lambda_3\lambda_3^J + 2^{-1}\alpha_3a_{34}\xi^{-J} - 2^{-1}\alpha_3\xi^{-1}a_{34}^J - \alpha_3\xi^{-1}\xi^{-J}\lambda_4\lambda_4^J \in M(u_1),$$
$$b_{12}v + \alpha_3b_{34}\xi^{-1}v \in M(u_1\theta)v_1.$$

Первое из этих включений следует из (4.4) и (2.2) [4]. Второе выполняется согласно равенству $\alpha_3b_{34} = (b_{12}v^2)^{J\sigma}$, равносильного включениям (2.10), (2.11) из леммы 4 [4]. Аналогично устанавливается, что $\eta_1\eta_4^Ju_1 - u_1\eta_3\eta_2^J \in M^{(0)}$. Включение $\eta_1\eta_4^Jv_1 - v_1\eta_3\eta_2^J \in M^{(0)}$ равносильно включениям

$$b_{12}\mu^Jv^2 - \alpha_3\xi^{-J}b_{34}^J\mu v^2 \in M(u_1),$$
$$a_{12} - 2^{-1}\alpha_3\lambda_3\lambda_3^J + 2^{-1}\alpha_3\xi^{-1}a_{34} - 2^{-1}\alpha_3\xi^{-1}a_{34}^J + 2^{-1}\alpha_3\xi^{-1}\xi^{-J}\lambda_4\lambda_4^J \in M(u_1\theta),$$

первое из которых справедливо в силу равенств $\alpha_3b_{34} = (b_{12}v^2)^{J\sigma}$ и $b_{12}^\sigma(v^2)^\sigma\xi^{-J}\mu v^2 = (b_{12}\mu^Jv^2)^\sigma$, а второе вытекает из включения

$$a_{12} - 2^{-1}\alpha_3\lambda_3\lambda_3^J + 2^{-1}\alpha_3\xi^{-1}\xi^{-J}\lambda_4\lambda_4^J \in M(u_1\theta),$$

доказываемого аналогично включению (2.13) из леммы 4 [4]. Таким образом, $s \in R^{(0)}$, и значит, $R \subseteq R^{(0)} \cap E_{(A)}$.

б) Пусть $s = f_1\eta_1 + f_2\eta_2 + f_3\eta_3 + f_4\eta_4 \in R^{(0)} \cap E_{(A)}$ $(\eta_i \in \overline{B})$, т.е. $s \in \mathrm{Ist}(E_{(\overline{B})}, \Phi_{(\overline{B},J)})$, и для η_i выполняются включения (3.2), где P заменено на M, и $M^{(0)} = M(u_1) + M(u_1\theta)v_1$. Положим $\lambda_1 = \eta_1$, $\lambda_2 = -\eta_4$, $\lambda_3 = \eta_2 + 2^{-1}\alpha_3^{-1}\eta_3$, $\lambda_4 = \xi\eta_2 - 2^{-1}\xi\alpha_3^{-1}\eta_3$. Тогда $s = e_1\lambda_1 + e_2\lambda_2 + e_3\lambda_3 + e_4\lambda_4$. Предположим еще, что все $\lambda_i \in A$. Для доказательства включения $R^{(0)} \cap E_{(A)} \subseteq R$ нужно установить справедливость (4.2)–(4.6). Так как $\lambda_1\lambda_1^J = \eta_1\eta_1^J \in M$ и $\lambda_1 \in A$, то $\lambda_1\lambda_1^J \in M \cap A = k$. Аналогично $\lambda_2\lambda_2^J \in k$. Положим $\lambda_i\lambda_j^J = a_{ij} + b_{ij}v$, $a_{ij}, b_{ij} \in K_1$, $\eta_i\eta_j^J = c_{ij} + d_{ij}v_1$, $c_{ij}, d_{ij} \in M(\theta, u_1)$. Покажем, что $\lambda_1\lambda_3^J = \eta_1\eta_2^J - 2^{-1}\eta_1\eta_3^J\alpha_3^{-1} \in K + K_1v$. Поскольку $\eta_1\eta_2^J, \eta_1\eta_3^J \in M^{(0)}$, то $c_{12}, c_{13} \in M(u_1)$, и значит, $a_{12} = c_{12} - c_{13}2^{-1}\alpha_3^{-1} \in M(u_1)$. Но $\lambda_1\lambda_3^J \in A$, и значит, $a_{13} \in K_1 \cap M(u_1) = K$, что и требовалось. Аналогично доказываются остальные включения (4.3), а также включения (4.4). Для доказательства (4.5) сначала установим, что

$$\begin{aligned}\lambda_1\lambda_2^J + \alpha_3\lambda_3\lambda_3^J &= -\eta_1\eta_4^J + \alpha_3\eta_2\eta_2^J + 2^{-1}\alpha_3\eta_2\eta_3^J\alpha_3^{-J} + 2^{-1}\eta_3\eta_2^J + 4^{-1}\alpha_3^{-J}\eta_3\eta_3^J \\ &\in M(u) + M(\theta, u)v.\end{aligned}$$

Для этого достаточно показать, что

$$-\eta_1\eta_4^J + 2^{-1}\alpha_3\eta_2\eta_3^J\alpha_3^{-J} + 2^{-1}\eta_3\eta_2^J \in M(u_1). \tag{4.7}$$

Но $\eta_2\eta_3^J = r - \eta_3\eta_2^J$ для некоторого $r \in M$, и (4.7) равносильно включению $-c_{14} + c_{23}^J \in M(u_1) = M(u)$, которое выполняется в силу (3.2). Далее, $\lambda_1\lambda_2^J + \alpha_3\lambda_3\lambda_3^J \in A$. Значит, если положить $\lambda_1\lambda_2^J + \alpha_3\lambda_3\lambda_3^J = a + bv_1$ $(a, b \in M(\theta, u))$, то $a \in K_1 \cap M(u) = K$, и (4.5) доказано. Докажем (4.6), что равносильно доказательству равенства $b_{i4} = (b_{i3}v^2)^{J\sigma}$ $(i = 1, 2)$, которое, в свою очередь, следует из соотношений

$$\begin{aligned}&b_{13} = (d_{12} + d_{13}\alpha_3^{-1}2^{-1})\mu, \quad b_{14} = (d_{12}\xi - d_{13}\alpha_3^{-1}\xi)\mu,\\ &b_{23} = (d_{24} + 2^{-1}d_{34}\alpha_3^{-1})\mu, \quad b_{24} = (d_{24}\xi - 2^{-1}d_{34}\alpha_3^{-1}\xi)\mu, \quad \xi\mu = \mu^{J\sigma}(v^2)^{\sigma},\end{aligned}$$

и того, что $d_{12}, d_{13}, d_{24}, d_{34} \in M(u)$. Лемма доказана. •

Лемма 4.2. *Пусть* $g \in T(Y)$, $g \neq 1$. *Тогда* $g \in d_1^{-1}Y^{(0)}d_1$.

Доказательство. Лемма доказывается последовательным применением леммы 15 [4], леммы 4.1 и предложения 3.1. •

Лемма 4.3. *Пусть $g \in T(Y^{(0)})$, $g \neq 1$, и матрица преобразования g относительно базиса $\{e_1 \mid 1 \leqslant i \leqslant 4\}$ содержится в $\mathrm{GL}_4(A)$ (т.е. $d_1^{-1} g d_1 \in \mathrm{GL}_4(A)$). Тогда $g \in Y$.*

Доказательство. По лемме 2.1 $g = \tau_{s,n}$, где $s \in \mathrm{Ist}(E_{(\overline{B})}, \Phi_{(\overline{B},J)})$, $r \in M(\theta)$. Положим $s = e_1\lambda_1 + e_2\lambda_2 + e_3\lambda_3 + e_4\lambda_4$ ($\lambda_i \in \overline{B}$). Заменив g на hgh^{-1} при подходящем $h \in T_4(K, \Phi)$, можно считать, что $\lambda_2 \neq 0$. Предположим, что λ_2 необратимо. Трансвекция g относительно базиса $\{e_i \mid 1 \leqslant i \leqslant 4\}$ имеет матрицу

$$\overline{g} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda_1\lambda_2^J r & \lambda_1\lambda_1^J r & \lambda_1\lambda_3^J\alpha_3 r & \lambda_1\lambda_4^J\alpha_4 r \\ -\lambda_2\lambda_2^J r & 1 + \lambda_2\lambda_1^J r & \lambda_2\lambda_3^J\alpha_3 r & \lambda_2\lambda_4^J\alpha_4 r \\ -\lambda_3\lambda_2^J r & \lambda_3\lambda_1^J r & 1 + \lambda_3\lambda_3^J\alpha_3 r & \lambda_3\lambda_4^J\alpha_4 r \\ -\lambda_4\lambda_2^J r & \lambda_4\lambda_1^J r & \lambda_4\lambda_3^J\alpha_3 r & 1 + \lambda_4\lambda_4^J\alpha_4 r \end{pmatrix},$$

все коэффициенты которой лежат в теле A. В частности, $\lambda_1\lambda_2^J r$ — необратимый элемент из A, т.е. $\lambda_1\lambda_2^J r = 0$. Поскольку $r \neq 0$ (ибо $g \neq 1$) и r содержится в поле $M(\theta)$, то r — обратимый элемент (в $\overline{B}$), и значит, $\lambda_1\lambda_2^J = 0$. Так как $\lambda_2 \neq 0$, то отсюда вытекает, что λ_1 необратимо, т.е. $\lambda_1\lambda_1^J = 0$. Применяя сходные рассуждения к элементам, занимающим в $\overline{g}$ позиции (23) и (41), получим $\lambda_2\lambda_3^J = \lambda_2\lambda_4^J = 0$, и λ_3, λ_4 необратимы. Отсюда $g = 1$, что противоречит условию. Следовательно, $\lambda_2 \in \overline{B}^*$. Поскольку $g \in Y^{(0)}$, то по лемме 3.3 g отображает каждый элемент из $R^{(0)}$ в элемент из $R^{(0)}$. Кроме того, g переводит каждый элемент из $E_{(A)}$ в элемент из $E_{(A)}$. Следовательно, g переводит любой элемент из $R^{(0)} \cap E_{(A)}$ вновь в элемент из $R^{(0)} \cap E_{(A)}$, т.е. по лемме 4.1 g переводит каждый элемент из R в элемент из R. В частности, $g(e_1) \in R$. Таким образом, если $\eta_1 = 1 - \lambda_1\lambda_2^J r$, $\eta_2 = -\lambda_2\lambda_2^J r$, $\eta_3 = -\lambda_3\lambda_2^J r$, $\eta_4 = -\lambda_4\lambda_2^J r$, то $e_1\eta_1 + e_2\eta_2 + e_3\eta_3 + e_4\eta_4 = g(e_1) \in R$. В частности, $\eta_1\eta_2^J + \alpha_3\eta_3\eta_3^J \in K + K_1 v$, т.е.

$$-r\lambda_2\lambda_2^J + r^2\lambda_1\lambda_2^J\lambda_2\lambda_2^J + r^2\alpha_3\lambda_3\lambda_2^J\lambda_2\lambda_3^J \in K + K_1 v. \tag{4.8}$$

Так как $\tau_{s,-r} = g^{-1}$ и g^{-1} удовлетворяет условиям леммы, то в (4.8) можно заменить r на $-r$. Сложив полученное включение с (4.8), будем иметь

$$\begin{aligned} r^2\lambda_1\lambda_2^J\lambda_2\lambda_2^J + r^2\alpha_3\lambda_3\lambda_2^J\lambda_2\lambda_3^J &\in K + K_1 v, \\ r\lambda_2\lambda_2^J &\in K + K_1 v. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Но $r\lambda_2\lambda_2^J$ содержится в центре алгебры $\overline{B}$, т.е.

$$r\lambda_2\lambda_2^J \in M(\theta) \cap (K + K_1 v_1) = k. \tag{4.10}$$

Поэтому из (4.9) следует, что

$$r(\lambda_1\lambda_2^J+\alpha_3\lambda_3\lambda_3^J)\in K+K_1v. \tag{4.11}$$

Применив аналогичную процедуру к включениям

$$\eta_1\eta_3^J,\eta_1\eta_4^J,\eta_3\eta_4^J\in K+K_1v,\qquad \eta_1\eta_3^Jv^2+\eta_1\eta_4^J\in K_1+k(u\theta)v,$$
$$\eta_1\eta_3^Jv^2-\eta_1\eta_4^J\in K_1+(ku+k\theta)v,\qquad \eta_1\eta_1^J\in k,$$

получаем с учетом (4.10)

$$\left.\begin{array}{ll} r\lambda_i\lambda_j^J\in K+K_1v & (i=1,2,\ j=3,4),\\ r\lambda_3\lambda_4^J\in K+K_1v, & \\ r(\lambda_1\lambda_2^J+\alpha_3\lambda_3\lambda_3^J)\in K+K_1v, & \\ r(\lambda_i\lambda_3^Jv^2+\lambda_i\lambda_4^J)\in K_1+k(u\theta)v, & \\ r(\lambda_i\lambda_3^Jv^2-\lambda_i\lambda_4^J)\in K_1+(ku+k\theta)v & (i=1,2),\\ r\lambda_1\lambda_1^J\in k. & \end{array}\right\} \tag{4.12}$$

Так как $\lambda_2\in\overline{B}^*$, то $g=\tau_{s\lambda_2^{-1},r\lambda_2\lambda_2^J}$. Поэтому в (4.10)–(4.12) можно заменить λ_i на $\overline{\lambda}_i=\lambda_i\lambda_2^{-1}$ $(1\leqslant i\leqslant 4)$ и r на $\overline{r}=r\lambda_2\lambda_2^J$. Учитывая, что $\overline{r}\in k^*$, получаем

$$\begin{array}{ll} \overline{\lambda}_i\overline{\lambda}_i^J\in k & (i=1,2),\\ \overline{\lambda}_i\overline{\lambda}_j^J\in K+K_1v & (i=1,2,\ j=3,4),\\ \overline{\lambda}_3\overline{\lambda}_4^J\in K+K_1v, & \\ \overline{\lambda}_i\overline{\lambda}_3^Jv^2+\overline{\lambda}_i\overline{\lambda}_4^J\in K_1+k(u\theta)v, & \\ \overline{\lambda}_i\overline{\lambda}_3^Jv^2-\overline{\lambda}_i\overline{\lambda}_4^J\in K_1+(ku+k\theta)v & (i=1,2),\\ \overline{\lambda}_1\overline{\lambda}_2^J+\alpha_3\overline{\lambda}_3\overline{\lambda}_3^J\in K+K_1v, & \end{array}$$

т.е. $e_1\overline{\lambda}_1+e_2\overline{\lambda}_2+e_3\overline{\lambda}_3+e_4\overline{\lambda}_4\in R$. По лемме 14 [4] $g=\tau_{e_1\overline{\lambda}_1+e_2\overline{\lambda}_2+e_3\overline{\lambda}_3+e_4\overline{\lambda}_4,\overline{r}}\in Y$. Лемма доказана. •

Доказательство предложения 4.1. Предложение 4.1 следует из лемм 4.2, 4.3, а также из определений групп Y и $Y^{(0)}$. •

Доказательство теоремы 4.1. Положим $M(\theta)=\Delta$. Пусть J_0 — инволюция поля Δ такая, что $\theta^{J_0}=\theta$, $u_0^{J_0}=-u_0$. Так как $\overline{B}\cong M_2(\Delta)$, то будем рассматривать элементы из $\overline{B}$ как матрицы из $M_2(\Delta)$. Тело A в этом случае является множеством всех матриц из $M_2(\Delta)$, перестановочных с некоторой J_0-полулинейной полуинволюцией d_0 пространства Δ^2. Следовательно, группа $\mathrm{GL}_4(A)$ изоморфна подгруппе группы $\mathrm{GL}_8(\Delta)$, состоящей из матриц, перестановочных с J_0-полулинейной полуинволюцией $d = \mathrm{diag}(d_0, d_0, d_0, d_0)$ пространства Δ^8. Так как $\Delta \cong K_1$, то J_0 отождествляется с инволюцией J поля K_1, а d с J-полулинейной полуинволюцией пространства K_1^8. Тогда по предложению 4.1 в качестве Z можно взять группу $d_1^{-1}Y^{(0)}d_1$, рассматриваемую как подгруппа в $\mathrm{GL}_8(K_1)$, а в качестве q квадратичную форму

$$\xi_1^2 - \xi_2^2 + \xi_3^2 - \xi_4^2 + \xi_5^2 - \xi_6^2 + v_1^2\xi_7^2 - v_1^2\theta^2\xi_8^2.$$

Теорема доказана. •

§5. Вложение в группу Spin_8 индекса 2

В этом параграфе k_1, k, θ, A, K, u, v, J, K_1, σ, E, e_1, e_2, e_3, e_4, Φ, Y обозначают то же, что и в §4. Пусть $C = \{\beta_0 \in k \mid \beta_0^2u^2+v^2(v^2)^\sigma$ не является квадратом в $k_1\}$. Предположим, что $C \neq \varnothing$. Если $\beta_0 \in C$, то k_1-алгебра с базисом $\{1, p\}$ таким, что $p^2 = \beta_0^2u^2 + v^2(v^2)^\sigma$, является полем, которое будем обозначать через $k_1(\sqrt{\beta_0^2u^2 + v^2(v^2)^\sigma})$. Предположим, что в C найдется β_0, для которого поле $k_1\ (\sqrt{\beta_0^2u^2 + v^2(v^2)^\sigma}) = k_2$ не является полем разложения для A. Обозначим через l элемент из k_2 такой, что $l^2 = \beta_0^2u^2 + v^2(v^2)^\sigma$. Поскольку k_2 не является полем разложения для A, то k_2-алгебра $A\otimes k_2 = \overline{A}$ — тело. Положим $\xi = l+\beta_0 u$, и пусть $J \in I(\overline{A})$. Ограничение инволюции J на любое подтело тела $\overline{A}$, инвариантное в целом относительно J, будем обозначать также через J. Тогда $\xi\xi^J = v^2(v^2)^\sigma$, и если $v_1 = (1 + \xi^{-1}(v^2)^\sigma)v$, а $L = k(l)$, то $v_1^2 = 2lv^{-2}(v^{-2})^\sigma \in L$. Поэтому $A_1 = L + Lu + Lv_1 + Luv_1 \in \mathrm{Sfq}(L)$ и $\overline{A} = A_1 \otimes L$. Поле $L(u)$ — максимальное подполе тела A_1, и это поле является квадратичным расширением поля K. Индекс Витта J-косоэрмитовой формы $\Phi_{(L(u))}$ равен 2, и относительно базиса $f_1 = e_1$, $f_2 = e_3 + e_4\xi$, $f_3 = e_3 2^{-1}\alpha_3^{-1} - e_4 2^{-1}\xi\alpha_3^{-1}$, $f_4 = -e_2$ векторного пространства $E_{(L(u))}$ форма $\Phi_{(L(u))}$ имеет матрицу Φ_0. Введем в рассмотрение группу $Y^{(0)}(\overline{A}, L, \theta, u, v_1, f_1, f_2, f_3, f_4)$, которую мы отождествим с ее матричной реализацией $Y^{(0)}$ относительно базиса $\{f_i \mid 1 \leqslant i \leqslant 4\}$. Группа $Y^{(0)}$ изоморфна спинорной группе $\mathrm{Spin}_8(L, q)$ квадратичной формы

$$q = \xi_1^2 - \xi_2^2 + \xi_3^2 - \xi_4^2 + \xi_5^2 - u^2\xi_6^2 + u^2v_1^2\xi_7^2 - v_1^2\theta^2\xi_8^2$$

над полем L, индекс Витта которой равен 2. Пусть d_1 — матрица перехода от базиса $\{f_i \mid 1 \leqslant i \leqslant 4\}$ к базису $\{e_i \mid 1 \leqslant i \leqslant 4\}$ (эта матрица определена равенством (4.1)). В группе $d_1^{-1}Y^{(0)}d_1$ выделим подгруппу, порожденную всеми трансвекциями из $d_1^{-1}Y^{(0)}d_1$, содержащимися в $\mathrm{GL}_4(A)$. Эта подгруппа и будет группой Y. Иными словами, справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.1. *Если имеют место предположения и обозначения данного параграфа, то для группы Y существуют*:

а) *квадратичная форма q от восьми переменных над полем L, индекс Витта которой равен 2*;

б) *группа $Z \leqslant \mathrm{GL}_4(\overline{A})$, изоморфная группе $\mathrm{Spin}_8(L,q)$ — такие, что группа $Y(A,u,v,\theta,e_1,e_2,e_3,e_4,\Phi)$ совпадает с подгруппой группы Z, порожденной всеми трансвекциями из Z, лежащими в $\mathrm{GL}_4(A)$.*

Доказательство теоремы 5.1 содержится в двух нижеследующих леммах 5.1, 5.2.

Лемма 5.1. $R(A,u,v,\theta,e_1,e_2,e_3,e_4,\Phi) = R^{(0)}(\overline{A},L,\theta,u,v_1,f_1,f_2,f_3,f_4) \cap E_{(A)}$.

Лемма 5.2. *Если $g \neq 1$, $g \in T(Y^{(0)})$, и $d_1^{-1} \in \mathrm{GL}_4(A)$, то $g \in Y$.*

Доказательства этих лемм аналогичны доказательствам соответствующих утверждений из §4, и потому здесь опускаются (в действительности эти доказательства даже проще, поскольку при их проведении нет необходимости учитывать наличие ненулевых необратимых элементов).

§6. Примеры

Пример 6.1. Пусть Q — произвольное поле, $\mathrm{char}\, Q \neq 2$, x, y — элементы, алгебраически независимые над Q, $k = Q(x,y)$ — поле всех рациональных функций от x, y над Q, $k_1 = k(\sqrt{y}) = Q(x,\sqrt{y})$, $A = (\frac{-x,-\sqrt{y}}{k_1})$, т.е. $A = k_1 + k_1u + k_1v + k_1w$, где $u^2 = -x, v^2 = -\sqrt{y}, w = uv = -vu$. Ясно, что $A \in \mathrm{Sfq}(k_1)$. Покажем, что A не содержит подтела из $\mathrm{Sfq}(k)$. Для этого достаточно установить, что любой антикоммутирующий с u элемент из A, квадрат которого содержится в k, равен 0. Каждый антикоммутирующий с u элемент из A имеет вид $c_1v + c_2w$, где c_1, $c_2 \in k_1$. Положим $c_1 = d_1 + d_2\sqrt{y}$, $c_2 = d_3 + d_4\sqrt{y}$, где $d_i \in Q(x,y)$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$. Тогда включение $(c_1v + c_2w)^2 \in k$ равносильно равенству $d_1^2 + d_2^2y + d_3^2x + d_4^2xy = 0$, которое, как легко видеть, выполняется лишь тогда, когда $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 0$. Пусть z — элемент из алгебраического замыкания поля k_1, квадрат которого равен $-x-y$. Так как $z \notin k_1$, то $[k_1(z) : k_1] = 2$. Положим $k_2 = k_1(z)$. Пусть c_1, c_2, $c_3 \in k_1$ таковы, что $(c_1u + c_2v + c_3w)^2 = -x - y$, т.е. $c_1^2x + c_2^2\sqrt{y} + c_3^2x\sqrt{y} = x + y$. Это означает, что квадратичная форма $X_1^2x + X_2^2\sqrt{y} + X_3^2x\sqrt{y} - X_4^2(x+y)$ от переменных X_i представляет нуль в поле k_1 нетривиальным образом. Иными словами, существуют c_1, c_2, c_3, $c_4 \in k_1$, не равные нулю одновременно, такие, что

$$c_1^2x + c_2^2\sqrt{y} + c_3^2x\sqrt{y} - c_4^2(x+y) = 0. \tag{6.1}$$

Можно считать, что $c_i \neq 0$ и $c_i \in Q[x, \sqrt{y}]$ при всех $i = 1, 2, 3, 4$. Введем лексикографическую запись многочленов из $Q[x, \sqrt{y}]$, считая, что x выше $\sqrt{y}$. Степенью одночлена $ax^r(\sqrt{y})^s$ ($a \in Q^*$) назовем упорядоченную пару (r, s), где r и s рассматриваются по модулю 2. Так как все $c_i \neq 0$, то степени низших членов многочленов $c_1^2 x$, $c_2^2\sqrt{y}$, $c_3^2 x\sqrt{y}$, $-c_4^2(x+y)$ попарно различны, что противоречит равенству (6.1). Таким образом, A не содержит максимального подполя, изоморфного полю k_2, и, значит, k_2 не является полем разложения для A, т.е. $\overline{A} = A \otimes k_2 \in \mathrm{Sfq}(k_2)$. Но если σ — автоморфизм поля k_1 над k такой, что $(\sqrt{y})^\sigma = -\sqrt{y}$, и $\beta_0 = 1$, то $-x - y = \beta_0^2 u^2 + v^2(v^2)^\sigma$. Пусть $J \in I(A)$, $\Phi \in \mathrm{Fsd}(A^4, J)$, и Φ записывается в некотором базисе пространства $K^4 \subseteq A^4$ в виде

$$\Phi = \zeta_1^J \zeta_2 - \zeta_2^J \zeta_1 + \zeta_3^J u \zeta_3 - \zeta_4^J u y^{-1} \zeta_4.$$

Индекс Витта формы Φ равен 1. Пусть

$$q = \xi_1^2 - \xi_2^2 + \xi_3^2 - \xi_4^2 + \xi_5^2 + x\xi_6^2 - 2xz\xi_7^2 + 2z\xi_8^2$$

— квадратичная форма от восьми переменных над полем k_2, индекс Витта которой равен 2. По теореме 5.1 существует группа $Z \leqslant \mathrm{GL}_4(\overline{A})$, изоморфная группе $\mathrm{Spin}_8(k_2, q)$ такая, что группа $Y(A, \sqrt{y}, u, v, e_1, e_2, e_3, e_4, \Phi)$ изоморфна подгруппе группы Z, порожденной всеми трансвекциями из Z, которые содержатся в $\mathrm{GL}_4(A)$.

Пример 6.2. Пусть Q — вещественно-замкнутое поле, $k = Q((t))$ — поле степенных рядов над Q от переменной t, $k_1 = k(\sqrt{t})$, $A = \left(\frac{-1, -\sqrt{t}}{k_1}\right)$, т.е. $A = k_1 + k_1 u + k_1 v + k_1 w$, где $u^2 = -1$, $v^2 = -\sqrt{t}$, $w = uv = -vu$. Ясно, что $A \in \mathrm{Sfq}(k_1)$. Пусть c_1, $c_2 \in k_1$ таковы, что

$$(c_1 v + c_2 w)^2 \in k. \tag{6.2}$$

Положим $c_1 = d_1 + d_2\sqrt{t}$, $c_2 = d_3 + d_4\sqrt{t}$, $d_i \in k$. Тогда (6.2) равносильно равенству $d_1^2 + d_2^2 t + d_3^2 + d_4^2 t = 0$, которое справедливо лишь при $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 0$. Поэтому A не содержит подтела из $\mathrm{Sfq}(k)$. Если σ — автоморфизм поля k_1 над k, для которого $(\sqrt{t})^\sigma = -\sqrt{t}$, и $\beta_0 \in k$, то $\beta_0^2 u^2 + v^2(v^2)^\sigma$ не является квадратом в поле k_1, и A содержит подполе изоморфное полю k_1 ($\sqrt{\beta_0^2 u^2 + v^2(v^2)^\sigma}$). В этом случае конструкция §5 неприменима и следует воспользоваться общей конструкцией из §4. Пусть $J \in I(A)$, $\Phi \in \mathrm{Fsd}(A^4, J)$, и Φ в некотором базисе $\{e_i \mid 1 \leqslant i \leqslant 4\}$ пространства $(k(u))^4 \subseteq A^4$ записывается в виде

$$\Phi = \zeta_1^J \zeta_2 - \zeta_2^J \zeta_1 + \zeta_3^J u \zeta_3 + \zeta_4^J u t^{-1} \zeta_4.$$

В обозначениях §4 $r_3 = 1$, $r_4 = t^{-1}$, и можно положить $y = 1$. Тогда $\xi = 2^{-1}((t-1)+(t+1)u_1)$ $(u_1^2 = 1)$, $v_1^2 = t - 1$ и

$$q = \xi_1^2 - \xi_2^2 + \xi_3^2 - \xi_4^2 + \xi_5^2 - \xi_6^2 + (t-1)\xi_7^2 - (t-1)t\xi_8^2$$

— квадратичная форма над полем $k(u)$, индекс Витта которой равен 3. По теореме 4.1 существует группа $Z \leqslant \mathrm{GL}_8(k_1(u))$, изоморфная группе $\mathrm{Spin}_8(k(u), q)$ такая, что группа $Y(A, \sqrt{t}, u, v, e_1, e_2, e_3, e_4, \Phi)$ изоморфна подгруппе группы Z, порожденной всеми трансвекциями из Z, перестановочными с J-полулинейной полуинволюцией $d = \mathrm{diag}(d_0, d_0, d_0, d_0)$, где

$$d_0 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{t} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Список литературы

[1] Vavilov N. A., *Intermediate subgroups in Chevalley groups*, Groups of Lie Type and Their Geometries (Como, 1993), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 207, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995, pp. 233–280.

[2] Залесский А. Е., *Линейные группы*, Итоги науки и техн. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 21, ВИНИТИ, М., 1985, сс. 135–182.

[3] Залесский А. Е., *Линейные группы*, Успехи мат. наук **36** (1981), 57–107.

[4] Башкиров Е. Л., *О подгруппах полной линейной группы степени 4 над телом кватернионов, содержащих специальную унитарную группу индекса* 1, Алгебра и анализ **13** (2001), №3.

[5] Вавилов Н. А., *Towards an infinite analogue of quadratic pairs*, Междунар. конф. по алгебре, посвящ. памяти А. И. Ширшова (Барнаул, 20–25 августа 1991 г.): Тез. докл. по теории групп, Ин-т. мат. СО АН СССР и др., Новосибирск, 1991, с. 168.

[6] Dieudonné J., *On the structure of unitary groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **72** (1952), 367–385.

[7] Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И., *Кольца, близкие к ассоциативным*, Наука, М., 1978.

Поступило 10 октября 2000 г.