1940 МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК Т. 8 (50), N. 1
RECUEIL MATHÉMATIQUE

Sur les opérateurs totalement continus linéaires laissant invariant un certain cône

M. A. Rutman (Odessa)

Introduction

Dans le présent article j'établis quelques propriétés spectrales d'une classe spéciale d'opérateurs totalement continus linéaires; ces propriétés s'appliquent dans la théorie des matrices et des équations intégrales.

En 1907 dans le vol. 64 des Mathematische Annalen M. Perron a attiré l'attention sur une propriété remarquable des matrices finies à éléments positifs [voir Math. Ann., **64**, (1907), 1—76]. Complétée ensuite dans les travaux de Frobenius (Sitzungsberichte d. Berl. Akad., 1907, 1908, 1912) cette propriété peut être énoncée de la manière suivante.

Si tous les éléments d'une matrice carrée finie A sont non négatifs et pour une certaine puissance entière de cette matrice ils sont tous positifs, alors la plus grande en valeur absolue valeur caractéristique de la matrice A est positive et de multiplicité égale à 1. Le vecteur caractéristique correspondant a des composantes positives.

Les méthodes développées par Perron et Frobenius dans les travaux cités permettent d'appliquer ces résultats aux noyaux des équations intégrales positifs dans le domaine de leur existence. Ceci a été fait par Jentzsch en 1912 [voir Journal f. Math., **141**, (1914), 235—244]. En tenant compte d'une remarque faite par F. R. Gantmakher [C. R. de l'Acad. des Sciences de l'U. R. S. S., **I (X)**, N. 1 (78)], le théorème de Jentzsch peut être formulé ainsi:

Si le noyau $K(s, t)$ d'une équation intégrale est continu et vérifie les inégalités

$$K(s, t) \geqslant 0 \quad (a \leqslant s, t \leqslant b), \quad K(s, s) > 0 \quad (a < s < b),$$

la plus petite en module valeur caractéristique de ce noyau est positive, de multiplicité 1 et la fonction fondamentale qui lui correspond est positive dans l'intervalle (a, b).

Le but du présent article est d'appliquer les théorèmes de Perron-Frobenius et Jentzsch à une classe d'opérateurs beaucoup plus vaste que celle des matrices finies et des noyaux des équations intégrales, à savoir — les opérateurs linéaires totalement continus dans un espace de type (B).

Nous considérons l'espace E du type (B) et dans cet espace un ensemble „conique" d'éléments, c'est-à-dire un ensemble fermé connexe formé de rayons et situé d'un seul côté d'un certain hyperplan.

Supposons qu'un opérateur A totalement continu et linéaire conserve invariant un certain ensemble conique. Alors, en admettant quelques conditions supplémentaires très naturelles, nous démontrons la proposition suivante.

L'opérateur A possède un vecteur caractéristique appartenant à l'ensemble conique; il lui correspond une valeur caractéristique positive.

Si cet ensemble conique est de telle nature que chaque élément de l'espace est représentable comme la différence de deux éléments de l'ensemble, il existe un vecteur caractéristique appartenant à cet ensemble et sa valeur caractéristique se trouve parmi celles dont le module est maximum.

On peut approfondir ce résultat dans le cas important où l'ensemble conique est un corps, c'est-à-dire quand il contient des points intérieurs.

Quand on suppose que E est un espace euclidien à n dimensions ou bien l'espace $C_{(a,\,b)}$ des fonctions $\varphi(t)$ continues dans l'intervalle $a \leqslant t \leqslant b$, ou arrive aux théorèmes de Perron-Frobenius et de Jentzsch. Pour le voir, il suffit de choisir pour K dans le premier cas l'ensemble des vecteurs à composantes non négatives et dans le second cas — l'ensemble des fonctions non négatives. Il est ainsi évident que même pour les espaces E_n et $C_{(a,\,b)}$ nous pouvons obtenir des résultats plus généraux que ceux de Frobenius et Jentzsch.

Remarquons, en passant, que notre théorème permet d'étendre le théorème de Frobenius au cas des matrices infinies totalement continues. On peut donc appliquer à ces matrices une série de résultats essentiels de la théorie des matrices oscillatoires de F. R. Gantmakher et M. G. Krein [voir F. Gantmakher et M. Krein, Compositio mathematica, **V**, 4(3), (1937), 445—476].

Dans cet article nous avons tâché de n'utiliser, que des méthodes purement topologiques et c'est à dessein que nous avons évité de nous appuyer sur les propriétés de la résolvante de caractère étudié dans la théorie des fonctions (sauf dans le § 5). Il nous semble que cela présente un certain intérêt au point de vue méthodologique.

En rédigeant cet article nous avons supposé que le lecteur connaît les notions fondamentales de l'analyse fonctionnelle ainsi qu'un résultat connu de Schauder [voir J. Schauder, Studia math., **2**, (1930), 176].

Un bref énoncé des résultats que nous publions maintenant complètement a été publié dans les Comptes rendus de l'Acad. des Sciences de l'U. R. S. S. en 1938 (t. XVIII, N. 9).

Tout récemment M. Krein a obtenu par une méthode tout à fait différente une série de résultats dont certains coïncident partiellement avec les nôtres* .

Je profite de l'occasion pour exprimer ma profonde reconnaissance à M. Krein pour plusieurs remarques précieuses qui m'ont aidé à faire ce travail.

§ 1

Définition 1. Un ensemble K d'éléments d'un espace E du type (B) sera nommé cône si les conditions suivantes sont vérifiées:

1°) *si* $x \in K$, $y \in K$, *on a* $x + y \in K$,

2°) *si* $x \in K$ *et* λ *est un nombre non négatif, on a* $\lambda x \in K$,

* Voir aussi sa Note dans les C. R. de l'Acad. des Sciences de l'U. R. S. S., **XXIII**, N. 8, (1939), 749—752.

3°) *l'ensemble K est fermé,*

4°) *il existe une fonctionnelle linéaire $f(x)$ positive pour tous les éléments de K sauf zéro.*

La propriété 4°) signifie que l'ensemble K est entièrement situé d'un seul côté du hyperplan $f(x)=0$.

Les propriétés 1°) et 2°) ont pour conséquence que l'ensemble K est convexe.

Soit x_0 un élément fixé et normé de K, soit ε un petit nombre positif.

Considérons l'ensemble $K_\varepsilon = K_\varepsilon(x_0)$ formé de zéro et des éléments x de K pour lesquels on a

$$x - |x|\varepsilon x_0 \in K.$$

Les lemmes qui suivent énoncent certaines propriétés simples de l'ensemble K_ε.

Lemme 1. *L'ensemble K_ε est lui-même un cône.*

Démonstration. Il faut vérifier les conditions 1°)—4°). Les conditions 2°) et 4°) sont triviales. 3°) suit immédiatement du fait que K est fermé.

Démontrons que la condition 1°) est vérifiée. A cet effet il suffit de prouver que si l'ensemble K_ε contient deux éléments x_1 et x_2 il doit aussi contenir le segment $tx_1+(1-t)x_2$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ qui les joint.

En effet, comme

$$x_1 - |x_1|\varepsilon x_0 \in K, \quad x_2 - |x_2|\varepsilon x_0 \in K,$$

et K est un ensemble convexe, on a

$$tx_1 + (1-t)x_2 - \varepsilon\,\{t|x_1| + (1-t)|x_2|\}\,x_0 \in K.$$

Mais en même temps

$$|tx_1 + (1-t)x_2| \leqslant t|x_1| + (1-t)|x_2|.$$

Donc,

$$tx_1 + (1-t)x_2 - \varepsilon x_0 |tx_1 + (1-t)x_2| \in K,$$

ce qui signifie que $tx_1 + (1-t)x_2 \in K_\varepsilon$.

Lemme 2. *Pour tous les éléments normés K_ε on a l'inégalité*

$$f(x) \geqslant \delta, \quad \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0.$$

Démonstration. Il suit de $x \in K_\varepsilon$, $|x|=1$ que l'on a

$$x - \varepsilon x_0 \in K.$$

Ainsi $f(x) - \varepsilon f(x_0) \geqslant 0$, $f(x) \geqslant \varepsilon f(x_0)$. Nous voyons que tous les éléments unitaires de K_ε sont situés „au-dessus" du hyperplan $f(x) = \varepsilon f(x_0)$.

Lemme 3. *L'ensemble K peut être représenté comme une image univoque et continue de K_ε.*

Démonstration. Supposons que $\varepsilon \leqslant \frac{1}{2}$. La représentation cherchée peut être prise dans la forme suivante:

$$U0 = 0, \quad Ux = |x| \frac{x + 2\varepsilon |x| x_0}{|x + 2\varepsilon |x| x_0|}. \tag{1}$$

Remarquons d'abord que $|Ux| = |x|$. Ensuite $Ux \in K_\varepsilon$ puisque

$$Ux - |Ux|\varepsilon x_0 = Ux - |x|\varepsilon x_0 = |x| \left\{ \frac{x + 2\varepsilon |x| x_0}{|x + 2\varepsilon |x| x_0|} - \varepsilon x_0 \right\} =$$

$$= |x| \left\{ \frac{x}{|x + 2\varepsilon |x| x_0|} + \varepsilon x_0 \frac{2|x| - |x + 2\varepsilon |x| x_0|}{|x + 2\varepsilon |x| x_0|} \right\} \in K,$$

car

$$2|x|-|x+2\varepsilon|x|x_0|\geqslant 2|x|-|x|+2\varepsilon|x|\geqslant 0.$$

La continuité de l'opération Ux se déduit aisément des égalités qui la définissent.

Remarque. On déduit immédiatement des mêmes égalités que l'on a

$$|x-Ux|\leqslant|x|\frac{4\varepsilon}{1-2\varepsilon}. \tag{2}$$

Cela prouve que pour $\varepsilon\to 0$ l'opération Ux diffère aussi peu que l'on veut de la transformation identique.

§ 2

Considérons un opérateur linéaire Ax défini dans l'espace $E(AE\subset E)$.

Définition 2. Un opérateur linéaire A sera dit positif (par rapport au cône K), s'il possède les propriétés suivantes:

a) L'opérateur A laisse invariable le cône K, c'est-à-dire si $x\in K$, on a $Ax\in K$.

b) Il existe un élément $x_0\in K$ et un nombre positif c tels que

$$Ax_0-cx_0\in K. \tag{3}$$

Dans la suite, en considérant une cône $K_\varepsilon=K_\varepsilon(x_0)$, nous supposerons qu'il s'agit de l'élément x_0 indiqué dans cette définition.

Lemme 4. *Si l'opérateur A est positif (par rapport à K), on a pour tous les éléments normés de K_ε l'inégalité*

$$|Ax|\geqslant\delta, \quad \delta=\delta(\varepsilon)>0.$$

Démonstration. Soit $x\in K_\varepsilon$, $|x|=1$. Alors

$$z=x-\varepsilon x_0\in K, \quad x=z+\varepsilon x_0.$$

En appliquant l'opérateur A, on obtient

$$Ax=Az+\varepsilon Ax_0=Az+\varepsilon\zeta+\varepsilon cx_0$$

où $\zeta=Ax_0-cx_0\in K$.

En appliquant aux deux membres de cette dernière égalité la fonctionnelle f, on a

$$f(Ax)=f(Az)+\varepsilon f(\zeta)+\varepsilon cf(x_0)\geqslant\varepsilon cf(x_0),$$

puisque $Az\in K$.

D'autre part, en vertu de la définition de la norme de cette fonctionnelle, on a

$$|f(Ax)|\leqslant|Ax||f|.$$

Donc,

$$|Ax||f|\geqslant\varepsilon cf(x_0),$$

$$|Ax|\geqslant\frac{\varepsilon cf(x_0)}{|f|},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Lemme 5. *Si A est un opérateur positif et si pour un certain élément $x \in K$ on a*

$$Ax = \alpha x - \beta x_0 \quad (\alpha > 0;\ \beta \geqslant 0); \tag{4}$$

alors on a nécessairement

$$\alpha \geqslant c.$$

Démonstration. Choisissons un nombre non négatif a_0 de telle manière que l'élément $x - ax_0$ soit situé dans K pour $a \leqslant a_0$ et hors de K pour $a > a_0$.

Soit

$$x - a_0 x_0 = z \in K, \quad x = z + a_0 x_0.$$

En appliquant l'opérateur A, nous obtenons

$$Ax = Az + a_0 A x_0 = Az + a_0 \zeta + a_0 c x_0 \quad (\zeta = Ax_0 - cx_0)$$

et en particulier

$$Ax - a_0 c x_0 \in K.$$

Mais en vertu de l'égalité (4)

$$\alpha x - \beta x_0 - a_0 c x_0 = \alpha \left(x - x_0 \frac{\beta + a_0 c}{\alpha} \right) \in K,$$

donc

$$\frac{\beta + a_0 c}{\alpha} \leqslant a_0, \quad \beta + a_0 c \leqslant \alpha a_0.$$

Il en résulte que

$$a(a_0 - c) \geqslant \beta > 0,$$
$$\alpha \geqslant c,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Nous pouvons démontrer maintenant la proposition fondamentale suivante:

Théorème 1. *Un opérateur linéaire totalement continu et positif par rapport à un cône K possède dans ce cône un vecteur caractéristique.*

Démonstration. Soit ε un nombre positif, arbitrairement petit, mais fixe. Considérons le cône $K_\varepsilon = K_\varepsilon(x_0)$ où x_0 est l'élément mentionné dans la définition 2.

Tous les éléments normés de K_ε se trouvent „au-dessus" du hyperplan $f(x) = \varepsilon f(x_0)$ (lemme 2).

Désignons par R_ε l'ensemble des éléments $\{x\}$ vérifiant les conditions suivantes:

1) $x \in K_\varepsilon$,

2) $|x| \leqslant 1$,

3) $f(x) \geqslant \varepsilon f(x_0)$.

Cet ensemble est convexe et fermé. Il n'est pas vide parce qu'il contient, par exemple, tous les éléments normés de K_ε.

Soit $\mathfrak{M}$ l'image de R_ε obtenue par l'application de l'opérateur A.

L'ensemble $\mathfrak{M}$ est compact, parce que nous avons supposé A totalement continu. Ensuite il suit du lemme 4 que $\mathfrak{M}$ se trouve à distance finie du point zéro, parce que l'on a partout dans K_ε

$$|Ax| > |x| \frac{\varepsilon c f(x_0)}{|f|}.$$

Introduisons maintenant l'opération

$$L(x) = \frac{x}{|x|}. \tag{5}$$

Elle donne une représentation continue de l'ensemble $\mathfrak{M}$ sur la surface de la sphère unitaire.

Considérons enfin l'opération Ux construite dans le lemme 3. Il est tout à fait évident que

$$UL\{\mathfrak{M}\} \subset R_\varepsilon,$$

donc

$$ULA\{R_\varepsilon\} \subset R_\varepsilon.$$

D'ailleurs, en vertu de la continuité des opérations L et U, l'ensemble $ULA\{R_\varepsilon\}$ sera compact.

En vertu d'un théorème connu de Schauder, l'opération ULA possède un point invariable dans R_ε:

$$ULAx_\varepsilon = x_\varepsilon, \quad x_\varepsilon \in K_\varepsilon, \quad |x_\varepsilon| = 1.$$

En tenant compte des égalités (1) et (5), nous pouvons écrire

$$\frac{\dfrac{Ax_\varepsilon}{|Ax_\varepsilon|} + 2\varepsilon x_0}{\left|\dfrac{Ax_\varepsilon}{|Ax_\varepsilon|} + 2\varepsilon x_0\right|} = x_\varepsilon$$

ou bien

$$\frac{Ax_\varepsilon + 2\varepsilon\,|Ax_\varepsilon|\,x_0}{|Ax_\varepsilon + 2\varepsilon\,|Ax_\varepsilon|\,x_0|} = x_\varepsilon.$$

On en déduit l'égalité

$$Ax_\varepsilon = \alpha x_\varepsilon - \beta x_0.$$

En vertu du lemme 5

$$\alpha \geqslant c$$

et comme

$$\alpha = |Ax_\varepsilon + 2\varepsilon\,|Ax_\varepsilon|\,x_0| \leqslant |Ax_\varepsilon|(1 + 2\varepsilon) \tag{6}$$

on a

$$|Ax_\varepsilon| \geqslant \frac{c}{1+2\varepsilon}.$$

Remarquons enfin qu'il suit de (2)

$$|ULAx_\varepsilon - LAx_\varepsilon| < \frac{4\varepsilon}{1-2\varepsilon}$$

ou bien

$$\left|x_\varepsilon - \frac{Ax_\varepsilon}{|Ax_\varepsilon|}\right| < \frac{4\varepsilon}{1-2\varepsilon}.$$

Supposons maintenant que ε parcourt une suite de nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ tendant vers zéro. Il suit des inégalités

$$|Ax_{\varepsilon_k}| \geqslant \frac{c}{1+2\varepsilon_k}$$

que l'ensemble des éléments $\left\{\dfrac{Ax_{\varepsilon_k}}{|Ax_{\varepsilon_k}|}\right\}$ est compact en même temps que $\{Ax_{\varepsilon_k}\}$.

D'autre part,

$$\left|x_{\varepsilon_k} - \frac{Ax_{\varepsilon_k}}{|Ax_{\varepsilon_k}|}\right| < \frac{4\varepsilon_k}{1-2\varepsilon_k} \to 0.$$

Ainsi $\{x_{\varepsilon_k}\}$ est encore un ensemble compact. Chaque point limite de cet ensemble est un vecteur caractéristique de l'opérateur A:

$$Ax = \lambda x.$$

Il est évident que l'on a ici $\lambda \geqslant c$.

Remarque. On pourrait dans la définition 2 remplacer la condition b) par cette condition que pour une certaine puissance entière de A on a $A^n x_0 - c x_0 \in K$. Le lecteur démontrera sans peine le théorème 1 dans cette hypothèse un peu plus générale.

§ 3

Dans ce paragraphe et dans les paragraphes suivants on établie certaines propriétés intéressantes des valeurs caractéristiques d'un opérateur A linéaire totalement continu qui laisse invariable un cône K.

On sait qu'une valeur caractéristique de l'opérateur A, c'est-à-dire un nombre λ pour lequel l'équation

$$Ax = \lambda x \tag{7}$$

est résoluble par rapport à un élément x non nul, peut être aussi bien réelle que complexe. Dans le dernier cas l'égalité (7) peut être écrire dans la forme

$$A(x_1 + ix_2) = (\lambda_1 + i\lambda_2)(x_1 + ix_2)$$

ou bien

$$A(x_1 + ix_2) = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)(x_1 + ix_2).$$

Cette manière d'écrire doit être comprise comme une abréviation du couple des égalités

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2, \quad Ax_2 = \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1$$

ou bien

$$Ax_1 = \rho(x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi), \quad Ax_2 = \rho(x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi).$$

L'opérateur A ayant un vecteur caractéristique complexe $x_1 + ix_2$ laisse évidemment invariable une multiplicité linéaire à deux dimensions (un „plan"

$$\{\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2\}.$$

Démontrons la proposition suivante:

Lemme 6. *Si x est un vecteur caractéristique réel de l'opérateur linéaire A et $x_1 + ix_2$ est un vecteur complexe (essentiellement complexe, c'est-à-dire correspondant à une valeur caractéristique complexe), alors les vecteurs x, x_1, x_2 sont linéairement indépendants.*

Démonstration. Soit

$$Ax = \lambda x, \quad A(x_1 + ix_2) = (\lambda_1 + i\lambda_2)(x_1 + ix_2), \quad \lambda_2 \neq 0,$$

et soit

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2.$$

Alors

$$A(c_1 x_1 + c_2 x_2) = \lambda(c_1 x_1 + c_2 x_2).$$

D'autre part,

$$A(c_1 x_1 + c_2 x_2) = c_1(\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2) + c_2(\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1),$$

d'où

$$c_1(\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2) + c_2(\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1) = \lambda(c_1 x_1 + c_2 x_2),$$
$$c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 = \lambda c_1,$$
$$c_2 \lambda_1 - c_1 \lambda_2 = \lambda c_2.$$

On obtient de ces équations

$$\lambda_2 (c_1^2 + c_2^2) = 0.$$

Le lemme est donc démontré.

Théorème 2. *Si l'opérateur linéaire A laisse invariable le cône K et si $x_1 + ix_2$ est un vecteur caractéristique complexe de cet opérateur, „le plan" $\{\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2\}$ n'a pas de points communs avec K, sauf le point nul.*

Démonstration. Supposons que le théorème n'est pas vrai. Alors l'ensemble des points communs au cône K et au plan indiqué est lui-même un cône à deux ou à une dimension (si le plan est „tangent" au cône K le long de l'une de ses génératrices). Dans ce cône l'opérateur A possède un vecteur caractéristique * de la forme $c_1 x_1 + c_2 x_2$, ce qui contredit au lemme 6.

On peut faire la remarque suivante concernant les vecteurs caractéristiques situés dans K:

Remarque. Si $x \in K, y \in K$ sont des vecteurs caractéristiques de l'opérateur A:

$$Ax = \lambda x, \quad Ay = \mu y,$$

et si

$$\lambda > \mu,$$

le vecteur $y - ax$ est situé hors de l'ensemble K, quelque petit que soit le nombre positif a.

Cela résulte de ce que

$$A^n (y - ax) = \mu^n y - a\lambda^n x = \mu^n \left(y - a \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n x\right).$$

Si n est assez grand, ce vecteur sortira hors des frontières de K.

Pour les recherches qui suivent nous avons besoin d'imposer au cône K les restrictions suivantes:

Définition 3. Un cône K sera nommé cône reproducteur dans l'espace E si chaque élément de K peut être présenté dans la forme $x - y$ où x et y sont des éléments de K.

Théorème 3. *Si un opérateur A totalement continu laisse invariable un cône reproducteur K et s'il possède au moins une valeur caractéristique (réelle ou complexe), alors parmi les valeurs caractéristiques de l'opérateur A ayant le module maximum il existe une valeur positive et il lui correspond un vecteur caractéristique appartenant à K.*

Il en résulte évidemment que si l'opérateur est positif par rapport au cône reproducteur, il existe dans K un vecteur caractéristique correspondant à l'un des nombres caractéristiques ayant le plus grand module.

Démonstration. Notre théorème se réduit à la démonstration du fait que si l'opérateur A possède hors de K un vecteur caractéristique dont la valeur caractéristique est de module égal à 1, il existe dans K un vecteur caractéristique dont la valeur caractéristique n'est pas inférieure.

Nous allons distinguer trois cas.

1. Le vecteur ξ situé hors de K possède une valeur caractéristique égale à 1:

$$A\xi = \xi, \quad \xi \bar{\in} K, \quad |\xi| = 1.$$

* Dans ce cône $Ax \neq 0$, ce qui suffit pour qu'il existe un vecteur caractéristique.

En vertu des conditions du théorème l'élément ξ peut être présenté dans la forme

$$\xi = x_0 - y_0 \quad (x_0,\ y_0 \in K) \tag{8}$$

ou bien, en supposant $|x_0| = 1$,

$$c\xi = x_0 - y_0, \quad c > 0.$$

Choisissons un nombre positif ε assez petit, par exemple $\varepsilon < \frac{c}{2}$, et construisons le cône $K_\varepsilon = K_\varepsilon(x_0)$. Ce cône vérifie évidemment les lemmes 2 et 3.

Montrons d'ailleurs que le lemme 4 reste encore vrai malgré ce fait que l'élément x_0 ne vérifie pas la condition (3).

En effet, soit $r > 0$ le rayon de la sphère qui a le centre au point $-\xi$ et ne contient aucun élément de l'ensemble K. Considérons l'élément $x \in K_\varepsilon$, $|x| = 1$. Il est évident que

$$x - \varepsilon x_0 = z \in K, \quad x = z + \varepsilon x_0,$$

donc, en vertu de (8),

$$x - \varepsilon c\xi = z + \varepsilon x_0 - \varepsilon c\xi = z + \varepsilon(x_0 - c\xi) \in K.$$

Il en résulte que

$$A(x - \varepsilon c\xi) = Ax - \varepsilon c\xi \in K.$$

D'autre part, en vertu de la définition du nombre r on a

$$-\xi + r\frac{Ax}{|Ax|} \,\overline{\in}\, K, \quad Ax - \frac{1}{r}|Ax|\xi \,\overline{\in}\, K,$$

donc

$$\frac{1}{r}|Ax| > \varepsilon c, \quad |Ax| > \varepsilon cr,$$

ce qu'il fallait démontrer.

En formant maintenant, comme dans la démonstration du théorème 1, un ensemble convexe R_ε et en appliquant à cet ensemble l'opération ULA, nous arrivons à un élément normé x_ε de K_ε pour lequel

$$Ax_\varepsilon = \alpha x_\varepsilon - \beta x_0, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \tag{9}$$

$$\left| x_\varepsilon - \frac{Ax_\varepsilon}{|Ax_\varepsilon|} \right| < \frac{4\varepsilon}{1 - 2\varepsilon}.$$

Démontrons que dans l'égalité (9) on a nécessairement

$$\alpha > 1. \tag{10}$$

Considérons à cet effet une demi-droite $x_\varepsilon - \delta\xi$ $(0 \leq \delta < \infty)$ et sur cette droite un point $x_\varepsilon - \delta_0\xi$ de K tel que pour $\delta > \delta_0$ on a

$$x_\varepsilon - \delta\xi \,\overline{\in}\, K.$$

Il suit de l'égalité (9) que nous avons

$$\alpha x_\varepsilon = Ax_\varepsilon + \beta x_0.$$

En tenant compte de (8) on peut écrire

$$\alpha x_\varepsilon - \delta_0\xi - \beta c\xi = Ax_\varepsilon - \delta_0\xi + \beta(x_0 - c\xi) \in K$$

parce que

$$Ax_\varepsilon - \delta_0\xi = A(x_\varepsilon - \delta_0\xi) \in K$$

Ainsi

$$\alpha x_\varepsilon - (\delta_0 + \beta c)\,\xi \in K,$$
$$x_\varepsilon - \frac{\delta_0 + \beta c}{\alpha}\,\xi \in K.$$

Cela signifie que

$$\frac{\delta_0 + \beta c}{\alpha} \leqslant \delta_0,$$

d'où

$$\delta_0 + \beta c \leqslant \alpha\delta_0, \quad \delta_0(\alpha - 1) \geqslant \beta c.$$

Cela prouve que $\alpha > 1$.

Rappelons maintenant l'inégalité (6) du § 2:

$$\alpha \leqslant |Ax_\varepsilon|(1 + 2\varepsilon).$$

En la joignant à (10) on a

$$Ax_\varepsilon > \frac{1}{1 + 2\varepsilon}.$$

Faisons maintenant ε parcourir une suite $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ tendant vers zéro; en répétant les raisonnements de la fin du § 2, nous arrivons à un vecteur $x \in K$ pour lequel

$$Ax = \lambda x, \quad \lambda \geqslant 1.$$

2. Le vecteur caractéristique ξ situé hors de K a une valeur caractéristique égale à -1. Dans ce cas nous considérons d'abord l'opérateur A^2. Nous aurons

$$A^2\xi = \lambda\xi.$$

Ainsi, en vertu de ce qui a été démontré, il existe un élément $y \in K$ tel que

$$A^2 y = \mu y, \quad \mu \geqslant 1.$$

Soit maintenant

$$x = \lambda y + Ay, \quad \text{où } \lambda = \sqrt{\mu}.$$

Il est évident que $x \in K$, $x \neq 0$, $\lambda \geqslant 1$.

Pour l'élément x on peut écrire

$$Ax = \lambda Ay + A^2 y = \lambda Ay + \lambda^2 y = \lambda(\lambda y + Ay) = \lambda x,$$

ce qu'il fallait démontrer.

3. Le vecteur caractéristique ξ situé hors de K a une valeur caractéristique complexe et de module égal à 1. Dans ce cas certainement

$$\xi = \xi_1 + i\xi_2.$$

L'égalité

$$A(\xi_1 + i\xi_2) = (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\xi_1 + i\xi_2) \tag{11}$$

est une forme abrégée pour inscrire le système

$$A\xi_1 = \xi_1\cos\varphi - \xi_2\sin\varphi,$$
$$A\xi_2 = \xi_1\sin\varphi + \xi_2\cos\varphi.$$

Il suit immédiatement de (11) que l'on a

$$A^n(\xi_1 + i\xi_2) = (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)(\xi_1 + i\xi_2)$$

ou bien

$$A^n\xi_1 = \xi_1 \cos n\varphi - \xi_2 \sin n\varphi,$$
$$A^n\xi_2 = \xi_1 \sin n\varphi + \xi_2 \cos n\varphi.$$

Écrivons la première de ces relations pour deux valeurs consécutives de n:

$$A^p\xi_1 = \xi_1 \cos p\varphi - \xi_2 \sin p\varphi,$$
$$A^{p+1}\xi_1 = \xi_1 \cos (p+1)\varphi - \xi_2 \sin (p+1)\varphi.$$

En excluant maintenant ξ_2, on peut écrire

$$A^p\xi_1 \cdot \sin (p+1)\varphi - A^{p+1}\xi_1 \sin p\varphi = \xi_1 [\cos p\varphi \sin (p+1)\varphi - \cos (p+1)\varphi \sin p\varphi]$$

ou bien

$$A^p\xi_1 \sin (p+1)\varphi - A^{p+1}\xi_1 \sin p\varphi = \xi_1 \sin \varphi.$$

Ainsi

$$\left\{A^p \cdot \frac{\sin (p+1)\varphi}{\sin \varphi} - A^{p+1} \cdot \frac{\sin p\varphi}{\sin \varphi}\right\} \xi_1 = \xi_1.$$

Considérons maintenant les valeurs entières de p pour lesquelles

$$\frac{\sin (p+1)\varphi}{\sin \varphi} \geqslant 0, \quad \frac{\sin p\varphi}{\sin \varphi} < 0.$$

Il est aisé de voir qu'il existe une infinité de nombres de cette nature; numérotons-les dans l'ordre de leur croissance en les désignant par $p_1, p_2, p_3, \ldots$ Pour ces valeurs de p les polynômes opérateurs

$$\varphi_p(A) \equiv A^p \cdot \frac{\sin (p+1)\varphi}{\sin \varphi} - A^{p+1} \cdot \frac{\sin p\varphi}{\sin \varphi}$$

laissent invariable le cône K. Ils possèdent tous le vecteur caractéristique ξ hors de K avec la valeur caractéristique égale à 1.

En vertu de ce qui a été démontré on peut écrire

$$\left\{A^p \cdot \frac{\sin (p+1)\varphi}{\sin \varphi} - A^{p+1} \cdot \frac{\sin p\varphi}{\sin \varphi}\right\} y_p = \mu_p y_p, \tag{*}$$
$$y_p \in K, \quad |y_p| = 1, \quad \mu_p \geqslant 1, \quad p = p_1, p_2, p_3, \ldots$$

Construisons le vecteur

$$x_p = y_p + c_1 A y_p + c_2 A^2 y_p + \ldots + c_p A^p y_p$$

et tâchons de choisir les coefficients $c_1, c_2, \ldots, c_p$ de telle manière que x_p soit un vecteur caractéristique de l'opérateur A:

$$A x_p = \lambda_p x_p. \tag{12}$$

Nous aurons

$$A y_p + c_1 A^2 y_p + c_2 A^3 y_p + \ldots + c_{p-1} A^p y_p + c_p A^{p+1} y_p =$$
$$= \lambda_p y_p + \lambda_p c_1 A y_p + \ldots + \lambda_p c_p A^p y_p.$$

Mais il suit de la formule (*) que

$$A^{p+1} y_p = -\mu_p y_p \frac{\sin \varphi}{\sin p\varphi} + A^p y_p \frac{\sin (p+1)\varphi}{\sin p\varphi},$$

donc

$$-c_p y_p \frac{\sin \varphi}{\sin p\varphi} \mu_p + A y_p + c_1 A^2 y_p + \ldots + c_{p-1} A^p y_p +$$
$$+ c_p A^p y_p \frac{\sin (p+1)\varphi}{\sin p\varphi} = \lambda_p y_p + \lambda_p c_1 A y_p + \ldots + \lambda_p c_p A^p y_p.$$

Cette égalité sera satisfaite si l'on pose

$$\lambda_p = -c_p \mu_p \frac{\sin\varphi}{\sin p\varphi}; \ \lambda_p c_1 = 1, \ \lambda_p c_2 = c_1, \ \ldots, \ \lambda_p c_{p-1} = c_{p-2},$$

$$\lambda_p c_p = c_{p-1} + c_p \frac{\sin(p+1)\varphi}{\sin p\varphi}. \tag{13}$$

Il en résulte

$$c_1 = \frac{1}{\lambda_p}, \ c_2 = \frac{1}{\lambda_p^2}, \ \ldots, \ c_{p-1} = \frac{1}{\lambda_p^{p-1}}, \quad c_p = -\frac{\lambda_p}{\mu_p} \frac{\sin p\varphi}{\sin\varphi}. \tag{14}$$

En substituant les valeurs de c_{p-1} et c_p dans la dernière de ces égalités (13), nous aurons

$$\lambda^p \frac{\sin(p+1)\varphi}{\mu_p \sin\varphi} - \lambda^{p+1} \frac{\sin p\varphi}{\mu_p \sin\varphi} = 1. \tag{15}$$

En tenant compte de la continuité, on voit évidemment que cette équation doit avoir une racine réelle positive; nous la désignerons par λ_p.

Il suit de (14) que l'on a

$$c_1 > 0, \ c_2 > 0, \ \ldots, \ c_p > 0.$$

Donc, le vecteur x_p appartient à K et diffère de zéro. Donnons maintenant à p les valeurs $p_1, p_2, p_3, \ldots$ L'équation (12) donne

$$Ax_{p_i} = \lambda_{p_i} x_{p_i}, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, x_{p_i} \in K.$$

On peut supposer ici que les éléments x_{p_i} sont normés. Il est facile de voir en considérant l'équation (15) que si p_i est assez grand on a

$$\lambda_{p_i} > 1 - \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif aussi petit que l'on veut.

D'autre part, en vertu de la définition de la norme de l'opérateur

$$\lambda_{p_i} \leqslant |A|.$$

En désignant par λ un point limite quelconque de la suite $\{\lambda_{p_i}\}$ et en choisissant dans l'ensemble compact des vecteurs $\{x_{p_i}\}$ une partie convergente, on obtient par un passage à la limite

$$Ax = \lambda x, \ x \in K, \ \lambda \geqslant 1.$$

Le théorème est donc complètement démontré.

§ 4

Les résultats exposés peuvent être encore développés dans le cas important où le cône K est un c o r p s, c'est-à-dire contient des points intérieurs. Dans ce cas on a d'abord la proposition évidente suivante:

L e m m e 7. *Si un opérateur linéaire qui laisse invariable un cône K transforme un point de K en un point intérieur, chaque point intérieur de K est transformé en un point intérieur.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit $x \in K$ et Ax un point intérieur de K. Si y est un point intérieur de K et si $c > 0$ est assez petit, on a $y - cx \in K$. Nous avons

$$z = A(y - cx) = Ay - cAx \in K.$$

Il en résulte

$$Ay = z + cAx.$$

Comme $z \in K$ et Ax est un point intérieur de K, Ay se trouve à l'intérieur de K, ce qu'il fallait démontrer.

Faisons maintenant une hypothèse supplémentaire sur l'opérateur A.

Définition 4. Un opérateur linéaire A positif par rapport au cône K sera dit totalement positif si pour un élément frontière ξ quelconque de K il existe un entier positif $n = n(\xi)$ tel que la n-ième puissance de A transforme ξ en un point intérieur de K.

Lemme 8. *Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ une suite d'opérateurs totalement positifs possédant à l'intérieur de K un vecteur caractéristique commun x_0 à valeur caractéristique λ_0 (la même pour tous les A_n). Soit ensuite x un élément intérieur arbitraire de K. Alors la suite d'éléments $A_1x, A_2x, \ldots, A_nx, \ldots$ se trouve à une distance positive de la frontière de K.*

Démonstration. Supposons que x_0 est situé dans K et qu'une sphère de rayon r et de centre x_0 appartient encore à K. Choisissons $c > 0$ de telle manière que $x - cx_0 \in K$. Comme dans le lemme 7, on a

$$z_n = A_nx - cA_nx_0 = A_nx - cx_0 \in K,$$
$$A_nx = z_n + c\lambda_0x_0.$$

Il est maintenant évident que tous les A_nx et toutes les sphères de rayon $c\lambda_0r$ ayant pour centres les A_nx appartiennent à K. Le lemme est démontré.

Théorème 4. *Un opérateur A totalement continu et totalement positif par rapport au cône K possède dans ce cône un et un seul vecteur caractéristique x_0. La valeur caractéristique λ_0 qui lui correspond est la plus grande en module valeur caractéristique de l'opérateur A.*

Démonstration. Par définition, un opérateur totalement positif ne peut avoir de vecteurs caractéristiques sur la frontière de K. Il suit de la remarque au théorème 2 qu'il existe dans K un seul vecteur caractéristique.

Il reste à démontrer que si

$$Ax = \lambda x, \quad x \in K,$$
$$Ay = \mu y, \quad y \bar{\in} K,$$

on a nécessairement $|\mu| < \lambda$.

Supposons l'opérateur A normé de telle manière que $\lambda = 1$. Il faut distinguer deux cas:

1. μ est un nombre réel. Construisons une droite infinie $x + \alpha y$ $(-\infty < \alpha < +\infty)$. Soit $x + \alpha_0 y$ l'un des points d'intersection de cette droite et de la frontière de K (une telle droite existe parce que $y \bar{\in} K$). Si le théorème n'est pas vrai, on a $\mu = \pm 1$. Alors le vecteur $x + \alpha_0 y$ situé sur la frontière de K est un vecteur caractéristique de l'opérateur A^2; mais ceci est impossible parce que A^2 est totalement positif par rapport à K.

2. μ est un nombre complexe; $y = y_1 + iy_2$. Soit $|\mu| = 1$. Alors

$$A(y_1 + iy_2) = (\cos\varphi + i\sin\varphi)(y_1 + iy_2).$$

Considérons maintenant l'intersection du cône K et d'une multiplicité linéaire à deux dimensions $\{x + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\}$. Cette intersection est un ensemble convexe et borné; désignons-le par S. Considérons un élément arbitraire $x_1+c_1y_1+c_2y_2 \in S$. En appliquant à cet élément toutes les puissances possibles de l'opérateur A, nous aurons

$$A^n(x+c_1y_1+c_2y_2)=x_1+d_1^{(n)}y_1+d_2^{(n)}y_2,$$

où

$$d_1^{(n)}=c_1\cos n\varphi+c_2\sin n\varphi,$$
$$d_2^{(n)}=c_1\sin n\varphi-c_2\cos n\varphi.$$

En remarquant que

$$d_1^{(n)2}+d_2^{(n)2}=c_1^2+c_2^2,$$

nous voyons que la suite des points $z_n=x+d_1^{(n)}y_1+d_2^{(n)}y_2$ se trouve à une distance positive du point x. Considérons un point limite de la suite bornée $\{z_n\}$. Désignons-le par z et soit $z_{n_1}, z_{n_2}, \ldots$ une suite partielle convergente qui lui correspond.

Désignons ensuite A^{n_1} par A_1, A^{n_2} par A_2 etc. Dans ces notations nous aurons

$$A_n(x+c_1y_1+c_2y_2)\to z \quad \text{pour } n\to\infty.$$

Le vecteur z est évidemment de la forme

$$z=x+a_1y_1+a_2y_2, \quad a_1^2+a_2^2>0.$$

Considérons maintenant le vecteur

$$\zeta=x+\beta(a_1y_1+a_2y_2),$$

où le scalaire β est choisi de telle manière que ζ se trouve sur la frontière de K. Il est évident que

$$A_n[x+\beta(c_1y_1+c_2y_2)]\to\zeta \quad \text{pour } n\to\infty. \tag{16}$$

Remarquons, en passant, que les vecteurs $A_n[x+\beta(c_1y_1+c_2y_2)]$ peuvent se trouver en dehors du cône. En vertu des conditions du théorème, il existe un entier positif N tel que $A^N\zeta$ se trouve à l'intérieur de K. En vertu du lemme 8 la suite des éléments $A^N\zeta$, $A^{N+1}\zeta$, $A^{N+2}\zeta$, ... se trouve à distance positive de la frontière de K.

Remarquons encore qu'en vertu des égalités

$$A^ny_1=y_1\cos n\varphi-y_2\sin n\varphi,$$
$$A^ny_2=y_1\sin n\varphi+y_2\cos n\varphi,$$

toute la suite des opérateurs A, A^2, A^3, ... est également continue sur le „plan" (y_1, y_2). C'est pourquoi on peut affirmer qu'un voisinage assez petit de l'élément ζ de la forme $\zeta+\varepsilon_1y_1+\varepsilon_2y_2$ est transformé par les opérateurs A^N, A^{N+1}, A^{N+2}, ... en des ensembles entièrement situés à l'intérieur de K et „uniformément" éloignés de la frontière de K à une distance commune positive.

Cette dernière conclusion est, comme il est facile à voir, en contradiction avec la relation (16).

§ 5

En terminant cet article, nous voulons encore démontrer la proposition suivante:

Théorème 5. *Supposons que l'opérateur A est totalement positif par rapport au cône K ayant un point intérieur; supposons ensuite que*

$$Ax_0 = \lambda_0 x_0, \quad x_0 \in K, \quad |x_0| = 1.$$

Alors $\frac{1}{\lambda_0}$, le plus petit en module nombre caractéristique positif, est un pôle simple de la résolvante de l'opérateur A.

Démonstration. Supposons que $\lambda_0 = 1$. Considérons l'espace $\overline{E}$, c'est-à-dire l'espace de toutes les fonctionnelles linéaires pour E. Soit A^* l'opérateur conjugué à A, c'est-à-dire tel que

$$A^* f(x) = f(Ax),$$

identiquement par rapport à tous les $x \in E$ et $f \in \overline{E}$.

Pour la démonstration nous utiliserons le critère connu suivant pour que le pôle de la résolvante d'un opérateur totalement continu soit simple. Pour que le nombre μ soit un pôle simple de la résolvante de l'opérateur A il est nécessaire et suffisant qu'à chaque vecteur caractéristique x de l'opérateur A correspondant au nombre caractéristique μ on puisse faire correspondre un vecteur caractéristique f de l'opérateur A^* correspondant au même nombre caractéristique et tel que

$$f(x) \neq 0.$$

Considérons l'ensemble $\overline{K}$ des fonctionnelles de $\overline{E}$ non négatifs dans tout le cône K. Il est facile à voir que $\overline{K}$ est un cône dans $\overline{E}$: les conditions 1°), 2°) et 3°) de la définition 1 sont évidemment satisfaites; d'ailleurs

$$x_0(f) = f(x_0) > 0 \quad \text{pour } f \in \overline{K}$$

(x_0 est un élément intérieur de K), car si l'on avait

$$f(x_0) = 0,$$

alors dans chaque voisinage de l'élément x_0 il y aurait des éléments pour lesquels f prend des valeurs négatives. L'opérateur A^* laisse invariant l'ensemble $\overline{K}$. En effet,

$$A^* f(x) = f(Ax) \geqslant 0$$

chaque fois que $x \in K$, $f \in \overline{K}$.

Soit maintenant r_0 le rayon d'une sphère de centre x_0, entièrement située dans K. Considérons le hyperplan de $\overline{E}$ produit par l'élément x_0:

$$x_0(f) = f(x_0) = 0.$$

Pour chaque élément normé de $\overline{K}$ on a

$$\{x_0 + r_0 y\}(f) = f(x_0) + r_0 f(y)$$

où y est un élément arbitraire dont la norme ne surpasse pas 1.

En choisissant y de manière à avoir

$$f(y) = -\frac{1}{2},$$

nous aurons

$$f(x_0) \geqslant \frac{1}{2} r_0.$$

Ainsi tous les éléments normés de $\overline{K}$ sont situés „au-dessus" du hyperplan

$$f(x_0) = \frac{1}{2} r_0.$$

Nous avons ensuite

$$A^* f(x_0) = f(Ax_0) = f(x_0) \geqslant \frac{1}{2} r_0 \quad (f \in \overline{K},\ |f| = 1)$$

et en général

$$A^{*^n} f(x_0) = f(A^n x_0) = f(x_0) \geqslant \frac{1}{2} r_0 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{17}$$

Donc, en particulier

$$|A^{*^n} f| \geqslant \frac{1}{2} r_0 \ (f \in \overline{K},\ \ |f| = 1).$$

Il en résulte que l'opérateur $\overline{A^*}$ possède dans $\overline{K}$ un vecteur caractéristique. On le voit immédiatement si l'on considère l'ensemble $\mathfrak{M}$ des fonctionnelles vérifiant les conditions

$$|f| \leqslant 1,\ x_0(f) \geqslant \frac{1}{2} r_0,\ f \in \overline{K}.$$

L'opérateur A^* lui fait correspondre un certain ensemble compact de $\overline{K}$ n'ayant pas zéro pour point limite. En normant chaque élément de l'image $A^*\ \{\mathfrak{M}\}$ et en tenant compte du théorème de Schauder, on obtient ce qui a été cherché.

Donc, il existe un élément f_0 de $\overline{K}$ tel que

$$A^* f_0 = \lambda_0' f_0, \quad |f_0| = 1.$$

D'ailleurs on a évidemment $\lambda_0' > 0$ et $f_0(x_0) \geqslant \frac{1}{2} r_0$.

Il reste à démontrer que $\lambda_0' = 1$. Il est évident que $\lambda_0' \leqslant 1$ parce que la plus grande valeur caractéristique de l'opérateur A, donc de A^*, est égale à 1.

Ensuite de la relation (17) on trouve

$$|A^{*n} f_0| = \lambda_0'^n \geqslant \frac{1}{2} r_0.$$

Donc, $\lambda_0' \geqslant 1$. Ainsi $\lambda_0' = \lambda_0 = 1$. Le théorème est démontré.

La considération du vecteur caractéristique f_0 de l'opérateur A^* permet de compléter essentiellement le contenu des théorèmes 4 et 5.

Théorème 5a. *Pour que l'opérateur linéaire A totalement continu, qui laisse invariant un cône K ayant un point intérieur, possède à l'intérieur de K un vecteur caractéristique x_0 dont le plus petit en module nombre caractéristique $\frac{1}{\lambda_0}$ est un pôle simple de la résolvante, il faut et il suffit que A soit totalement positif par rapport à K* *.

* Ce complément du théorème appartient à M. G. Krein qui m'a aimablement permit de l'insérer dans cet article.

D é m o n s t r a t i o n. Supposons que $\lambda_0 = 1$ et que tous les autres nombres caractéristiques de A sont en module inférieurs à 1. Soit

$$Ax_0 = x_0, \quad A^* f_0 = f_0, \quad f_0(x_0) = 1.$$

Considérons l'opérateur

$$A_1 x = Ax - f_0(x)\, x_0.$$

Il est aisé de voir que cet opérateur possède les mêmes vecteurs caractéristiques et les mêmes valeurs caractéristiques que A, sauf $\lambda_0 = 1$. En effet, si

$$Ax_1 = \lambda x_1,$$

on a

$$Ax_1 = A_1 x_1 + f_0(x_1)\, x_0 = \lambda x_1 + f_0(x_1)\, x_0 = \lambda x_1,$$

parce que

$$f_0(x_1) = A^* f_0(x_1) = f_0(Ax_1) = \lambda f_0(x_1)$$

donc $f_0(x_1) = 0$.

Au contraire, si

$$A_1 x_1 = \lambda x_1,$$

on a

$$Ax_1 = A_1 x_1 + f_0(x_1)\, x_0 = \lambda x_1 + f_0(x_1)\, x_0 = \lambda x_1,$$

parce que

$$f_0(x_1) = \frac{1}{\lambda} f_0(A_1 x_1) = \frac{1}{\lambda} f_0[Ax_1 - f_0(x_1)\, x_0] = \frac{1}{\lambda} f_0(Ax_1) - \frac{1}{\lambda} f_0(x_1) =$$

$$= \frac{1}{\lambda} A^* f_0(x_1) - \frac{1}{\lambda} f_0(x_1) = 0.$$

Il en résulte que la résolvante de l'opérateur A_1 a un cercle de convergence de rayon > 1, ce qui signifie que pour tous les $x \in E$

$$|A_1^n x| < cq^n, \quad q < 1.$$

Considérons maintenant un élément frontière ξ quelconque du cône K. Introduisons la notation

$$z = \xi - f_0(\xi)\, x_0, \quad \xi = z + f_0(\xi)\, x_0.$$

Il est évident que $f_0(z) = 0$, donc $Az = A_1 z$, $A^n z = A_1^n z$, pour chaque entier positif n. Nous pouvons écrire $A^n \xi = A^n z + f_0(\xi)\, A^n x_0 = A_1^n z + f_0(\xi)\, x_0$, $A^n \xi - f_0(\xi)\, x_0 = A_1^n z$. Mais $A_1^n z \to 0$ pour $n \to \infty$ et x_0 et $f_0(\xi)\, x_0$ sont des points intérieurs de K. Donc, à partir d'un certain n, le point $A^n \xi$ se trouve à l'intérieur de K. Le théorème est démontré.

(Поступило в редакцию 15/XII 1939 г.)

О вполне непрерывных линейных операторах, оставляющих инвариантным некоторый конус

М. А. Рутман (Одесса)

(Резюме)

Настоящая работа посвящена некоторым спектральным свойствам одного класса вполне непрерывных линейных операторов. Эти свойства являются обобщением теорем Perron'a—Frobenius'a о матрицах с положительными элементами [1], а также результатов Jentzsch'a о положительных интегральных ядрах [2].

Мы рассматриваем произвольное пространство E типа (B).

Определение 1. Множество элементов K из E будем называть конусом, если выполняются следующие условия:

1°. Если $x \in K, y \in K$, то $x+y \in K$.

2°. Если $x \in K$, $\lambda \geqslant 0$, то $\lambda x \in K$.

3°. Множество K замкнуто.

4°. Существует линейный функционал $f(x)$, положительный на всех элементах K (кроме нуля).

Определение 2. Линейный оператор A будем называть позитивным (относительно K), если он обладает следующими свойствами:

a) оператор A оставляет инвариантным множество K,

b) существует элемент $x_0 \in K$ и положительный скаляр c такой, что

$$Ax_0 - cx_0 \in K.$$

Имеет место

Теорема 1. *Вполне непрерывный линейный оператор A, позитивный относительно конуса K, имеет в этом конусе собственный вектор.*

Для доказательства этой теоремы мы устанавливаем следующие простые леммы:

1. *Если K — конус, x_0 — фиксированный элемент, то множество $K_\varepsilon = K_\varepsilon(x_0)$ элементов x из K, для которых*

$$x - |x|\varepsilon x_0 \in K,$$

само является конусом.

2. *Для всех элементов из K_ε справедливо неравенство*

$$f(x) \geqslant \delta |x|, \quad \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$$

($f(x)$ — функционал, упомянутый в определении 1).

3. *Существует непрерывное отображение K на K_ε, при котором*

$$U0 = 0, \quad |Ux| = |x|, \quad |x - Ux| \leqslant |x| \frac{4\varepsilon}{1-2\varepsilon}.$$

---

[1] См. Math. Ann., **64**, (1907), 1—76, а также Sitzungsber. d. Berl. Ak. (1907 — 1908—1912).

[2] См. Journal f. Math., **141**, (1912), 235 — 244.

4. *Если A позитивен относительно K, то для всех элементов x из $K_\varepsilon(x_0)$*

$$|Ax| \geqslant \delta |x|, \quad \delta = \delta(\varepsilon) > 0$$

(x_0 — элемент, упомянутый в определении 2).

5. *Если A позитивен относительно K и если*

$$Ax = \alpha x - \beta x_0, \ \alpha > 0, \ \beta \geqslant 0, \ x \in K,$$

то непременно

$$\alpha \geqslant c.$$

Кроме того, доказательство базируется на известном Schauder'овском принципе неподвижной точки[3].

В дальнейшем исследуются собственные значения позитивного оператора A.

Прежде всего мы отмечаем следующую очевидную

Теорему 2. *Если линейный оператор A оставляет конус K инвариантным и если $x_1 + ix_2$ — комплексный собственный вектор оператора, то „плоскость" $\{\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2\}$ не имеет с K общих точек кроме нуля.*

Наложим теперь на K дополнительное ограничение.

Определение 3. Конус K будем называть воспроизводящим в пространстве E, если любой элемент из E является разностью вида $x - y$, где x и y — элементы из K.

Теорема 3. *Если вполне непрерывный линейный оператор A оставляет инвариантным воспроизводящий конус K и если A имеет хотя бы одно вещественное или комплексное собственное значение, то среди наибольших по модулю собственных значений оператора A найдется положительное, которому соответствует собственный вектор из K.*

Приведенные результаты получают дальнейшее развитие в том важном случае, когда конус K является телом. В этом случае, между прочим, имеет место следующая лемма:

Если линейный оператор, оставляющий конус K инвариантным, переводит одну из точек K во внутреннюю, то всякая внутренняя точка K переходит во внутренность.

Определение 4. Линейный оператор A, позитивный относительно конуса K, будем называть вполне позитивным, если для каждого граничного элемента ξ из K найдется натуральное число $n = n(\xi)$ такое, что $A^n \xi$ лежит внутри K.

Теорема 4. *Вполне непрерывный оператор A, вполне позитивный относительно конуса K, имеет в этом конусе один и только один собственный вектор. Соответствующее ему собственное значение является наибольшим по модулю собственным значением оператора A.*

В заключение мы рассматриваем резольвенту вполне позитивного оператора A и доказываем

Теорему 5. *Пусть A вполне позитивен относительно K. Пусть, далее,*

$$Ax_0 = \lambda_0 x_0, \ x_0 \in K.$$

---

[3] См. Studia mathematica, 2, (1930), 176.

Тогда $\frac{1}{\lambda_0}$ — *наименьшее по модулю характеристическое число — является простым полюсом резольвенты оператора* A.

М. Г. Крейн заметил, что имеет место обратное предложение: если линейный вполне непрерывный оператор A, оставляющий инвариантным конус K, имеет внутри K собственный вектор, характеристическое число которого является наименьшим по модулю и простым полюсом резольвенты, то A вполне позитивен относительно K.