В. П. Бурский, О нарушении единственности решения задачи Дирихле для эллиптических систем в круге, *Матем. заметки*, 1990, том 48, выпуск 3, 32–36

Математические заметки

том 48 выпуск 3 сентябрь 1990

О НАРУШЕНИИ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В КРУГЕ

В. П. Бурский

В настоящей работе изучается вопрос о нарушении единственности решения задачи Дирихле

$$u\,|_{\partial K}=0 \tag{1}$$

в единичном круге $K=\{x\in\mathbf{R}^2\mid |x|<1\}$ на плоскости для уравнения

$$L\,(\partial/\partial x)u\equiv au_{x_1x_1}+bu_{x_1x_2}+cu_{x_2x_2}=0, \tag{2}$$

где a, b, c — постоянные комплексные коэффициенты, а функция u принимает комплексные значения $u=v+iw$. Функции v и w удовлетворяют задаче

$$v\,|_{\partial K}=0,\ w\,|_{\partial K}=0, \tag{1'}$$

$$\left.\begin{aligned} &L_1v-L_2w=0,\\ &L_2v+L_1w=0,\end{aligned}\right. \tag{2'}$$

где $L_1=\operatorname{Re}L\,(\partial/\partial x)$, $L_2=\operatorname{Im}L\,(\partial/\partial x)$. Наоборот, каждая система вида (2′), где L_1, L_2 — однородные дифференциальные операторы второго порядка с постоянными вещественными коэффициентами, легко сводится к уравнению вида (2) с оператором $L=L_1+iL_2$. Заметим, что система (2′) эллиптична по Петровскому при любом наборе коэффициентов, кроме случая, когда набор a, b, c коэффициентов ей соответствующего уравнения (2) пропорционален в $\mathbf{C}$ вещественному набору a_0, b_0, c_0 со свойством $b_0^2-4a_0c_0\geqslant 0$, при $b_0^2-4a_0c_0>0$ система (2′) есть пара одинаковых гиперболических уравнений, для которых результаты о единственности решения задачи Дирихле (1) хорошо известны (см. ниже).

Интерес к задаче (1′), (2′) связан в первую очередь с широко известными примерами эллиптических систем, построенных А. В. Бицадзе (см., например, [1]), для которых задача (1′) не нетерова, а именно имеется счетное число линейно независимых полиномиальных решений. Системы Бицадзе имеют вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}-2\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}=0,\\ 2\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}=0;\end{gathered}\qquad(3)$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}-\sqrt{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}=0,\\ \sqrt{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}=0.\end{gathered}\qquad(4)$$

Заметим, что систему (3) можно записать в виде $4\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}\bar{z}^2=0$, где, как обычно, $2\mathrm{d}/\mathrm{d}\bar{z}=\partial/\partial x_1+i\partial/\partial x_2$. Как отмечалось в [1], ни кратность корней, ни сам вид характеристического полинома эллиптической системы свойства задачи (1′) не определяют. Действительно, характеристический полином в смысле [1] системы (4) $(\lambda^2+1)^2$ совпадает с характеристическим полиномом пары уравнений Лапласа, для которой задача (1′) имеет только тривиальное решение в $W_2^1(K)$.

В настоящей статье расширено множество подобных примеров и показано, что других систем вида (2′) с нарушением единственности задачи Дирихле (1′) нет. Рассуждения проводятся для задачи (1), (2). Как следует из доказанной ниже теоремы, причиной нарушения единственности решения задачи (1), (2) является вещественность и π-рациональность угла $\varphi_0=\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{a+c}$ между семействами комплексных характеристик. Заметим, что для гиперболических уравнений ($a, b, c\in\mathbf{R}$, $b^2-4ac>0$) известный критерий неединственности решения задачи (1) (см., например, [2]), который заключается в наличии периодических точек автоморфизма так называемого характеристического биллиарда, легко записать как π-рациональность угла между семействами характеристик. Последнее обстоятельство указывает, например, на близость в смысле свойств задачи Дирихле системы (4) к уравнению $\partial^2u/\partial x_1\partial x_2=0$, поскольку в обоих случаях углы между семействами характеристик совпадают и равны $\pi/2$.

Перейдем к содержательным формулировкам. Введем сначала некоторые обозначения. Будем записывать уравнение (2) также в виде $(\nabla\cdot a^1)(\nabla\cdot a^2)u=0$ с единичными комплексными векторами $a=(a_1^j, a_2^j)$ $(j=1, 2)$. Определим векторы $\tilde{a}^j=(-\bar{a}_1^j, \bar{a}_2^j)/\varkappa_j$, где $\varkappa_j=[(\bar{a}_1^j)^2+(\bar{a}_2^j)^2]^{1/2}$ — любое значение корня, если $\varkappa_j\neq 0$, и $\tilde{a}^j=(1, \pm i)$, если $\lambda_j=\mp i$. Ясно, что $a\cdot\tilde{a}^j=0$ (напомним, что в $\mathbf{C}^2$ $a\cdot b=a_1\bar{b}_1+a_2\bar{b}_2$).

Пусть λ_1, λ_2 — два решения уравнения $a\lambda^2+b\lambda+c=0$ (если $a=0$, будем считать $\lambda_2=\infty$) и пусть φ_1, φ_2 — любые решения уравнений $\operatorname{ctg}\varphi_1=\lambda_1$, $\operatorname{ctg}\varphi_2=\lambda_2$, такие, что $\tilde{a}^j\cdot x=\cos(\tau-\varphi_j)$. Заметим, что в случае гиперболического уравнения (2) угол φ_j есть угол наклона семейства характеристик, направленного вдоль вектора a^j и ортогонального вектору $\tilde{a}^j$. По аналогии с вещественным случаем назовем комплексной характеристикой любую прямую (в $\mathbf{C}^2$) с направлением вектора a^j: $r(t) = r_0 + ta$. Напомним, что решение уравнения $\operatorname{ctg} \varphi_j = \lambda_j$ существует тогда и только тогда, когда $\lambda_j \neq \pm i$. Разность $\varphi_0 = \varphi_1 - \varphi_2$ назовем углом между характеристиками, если углы φ_1, φ_2 существуют. Легко видеть, что

$$\operatorname{tg}^2 \varphi_0 = (b^2 - 4ac)/(a + c)^2.$$

ТЕОРЕМА. *Задача* (1), (2) *имеет в пространстве* $W_2^2(K)$ *только нулевое решение для любых наборов коэффициентов кроме следующих трех случаев*: 1) *уравнение* (2) *есть уравнение Бицадзе* $\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}\bar{z}^2 = 0$; 2) *уравнение* (2) *есть сопряженное уравнение Бицадзе* $\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}z^2 = 0$; 3) *углы* φ_1, φ_2 *существуют, угол* φ_0 *— вещественен и* π*-рационален. Во всех трех случаях существует бесконечно много линейно независимых полиномиальных решений.*

Доказательство. Предъявим сначала решения в перечисленных случаях. В первом случае [1] решениями являются функции $u_k(x) = (z\bar{z} - 1)P_k(z)$, где $z = x_1 + ix_2$, P_k — любой полином, во втором — $u_k(x) = (z\bar{z} - 1)P_k(\bar{z})$, в третьем — $u_k(x) = (T_{2n}(\tilde{a}_1 \cdot x))^k - (T_{2n}(\tilde{a}_2 \cdot x))^k$, где T_{2n} — полином Чебышева, $T_n(\cos\alpha) = \cos n\alpha$, $\varphi_0 = \pi m/n \in \pi\mathbf{Q}$. В случае 3) уравнение $(\nabla \cdot a^1)(\nabla \cdot a^2)u_k = 0$ удовлетворяется тривиально, а для проверки условия (1) рассмотрим разность

$$\begin{gathered}[T_{2n}(\tilde{a}^1 \cdot x) - T_{2n}(\tilde{a}^2 \cdot x)]|_{\partial K} = T_{2n}(\cos(\tau - \varphi_1)) - \\ - T_{2n}(\cos(\tau - \varphi_2)) = \cos 2n(\tau - \varphi_1) - \cos 2n(\tau - \varphi_2) = \\ = -2\sin n\varphi_0 \sin 2n(\tau - (\varphi_1 + \varphi_2)/2) = 0,\end{gathered}$$

$x = (\cos\tau, \sin\tau)$.

Покажем теперь, что в остальных случаях решение тривиально. Пусть $u \in W_2^2(K)$ — решение задачи (1), (2), $\tilde{u} \in W_2^2(\mathbf{R}^2)$ — любое продолжение функции u, $\theta(x) = 1$ в K, $\theta(x) = 0$ вне K. Подставим функцию $v = \tilde{u}\theta$ в левую часть уравнения (2), и, дифференцируя произведение, получим

$$av_{x_1x_1} + bv_{x_1x_2} + cv_{x_2x_2} = -(ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2)u'_\nu \delta_{\partial K},$$

где ν — поле внешней нормали, $\delta_{\partial K}$ — мера, сосредоточенная на ∂K: $\langle \delta_{\partial K}, \varphi \rangle = \int_{\partial K} \bar{\varphi}\,\mathrm{d}s$. Применим к полученному равенству преобразование Фурье, получим

$$l(\xi)\hat{v}(\xi) = -\int_{\partial K} l(x)\tilde{u}'_\nu \mathrm{e}^{-i\xi\cdot x}\mathrm{d}\tau_x, \tag{5}$$

где $l(\xi) = a\xi_1^2 + b\xi_1\xi_2 + c\xi_2^2$ — символ. По теореме Пэли — Винера правая часть в (5) и функция $\hat{v}(\xi)$ — целые, поэтому выполнено условие

$$\int_0^{2\pi} C(\tau)e^{-i\xi\cdot x}d\tau = 0 \quad \forall\xi \in \Lambda = \{\xi \in \mathbf{C}^2 \mid l(\xi) = 0\}, \tag{6}$$

где $C(\tau) = l(x)\tilde{u}'_\nu(x)|_{x=x(\tau)}$, $x(\tau) = (\cos\tau, \sin\tau)$, τ — угловая координата на окружности ∂K. Поскольку $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, $\Lambda_j = \{\lambda\tilde{a}^j \mid \lambda \in \mathbf{C}\}$, $(j = 1, 2)$, подставим в (6) $\xi = \lambda a^j$ и, разлагая экспоненту в ряд, получим условие (6) в виде

$$\int_0^{2\pi} C(\tau)(\tilde{a}^j\cdot x)^n d\tau = 0 \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad (j = 1, 2), \tag{7}$$

откуда следует для всякого полинома Q

$$\int_0^{2\pi} C(\tau)Q(\tilde{a}^j\cdot x)d\tau = 0 \quad (j = 1, 2). \tag{8}$$

Пусть сначала корни λ_j простые и $\varkappa_j \neq 0$, т. е. $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_j \neq \pm i$. Используем следующее очевидное

Предложение. *Пусть φ_* — комплексное число. Система функций $t_0(\tau) = 1$, $t_n(\tau) = \cos n(\tau - \varphi_*)$, $u_n(\tau) = \sin n(\tau - \varphi_*)$, $n \in \mathbf{N}$ ортогональна и полна в $L_2(\partial K)$.*

Разложим функцию $C(\tau)$ в ряд по системе $\{t_n, u_n\}$, построенной по числу $\varphi_* = \varphi_1$,

$$C(\tau) = (1/2)C_0^t + \sum_{n=1}^{\infty} C_n^t t_n(\tau) + C_n^u u_n(\tau)$$

и подставим это разложение в (8), считая, что $Q(z) = T_n(z)$. Получим для $j = 1$ $C_m^t = 0$, для $j = 2$ $C_m^u \sin m\varphi_0 = 0$. Если $\varphi_0 \overline{\in} \pi\mathbf{Q}$, то $C_m^u = 0$, поэтому $C(\tau) = 0$, из (5) $\hat{v} = 0$, значит, $v = 0$, и в рассматриваемом случае утверждение доказано.

Пусть теперь $\lambda_1 \neq \pm i$, $\lambda_2 = -i$. Тогда $\tilde{a}^2 = (1, i)$, $\tilde{a}^2\cdot x = z = x_1 + ix_2 = \exp(i\tau)$. Подставляя в (7) для $j = 2$ разложение $C(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(in\tau)$, получим $C_m = 0$ $\forall m \leqslant 0$. Для коэффициентов C_m^t, C_m^u это условие означает, что $C_m^t = -C_m^u$ $(m \in \mathbf{N})$, и вместе с условием $C_m^t = 0$ для $j = 1$ дает $v = 0$. Для случая $\lambda_1 \neq \pm i$, $\lambda_2 = i$ получаем $C_m^t = C_m^u$ $(m \in \mathbf{N})$, что также дает $v = 0$. Наконец, в случае $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$ (уравнение Лапласа) получаем два условия $C_m = 0$, $m \leqslant 0$; $C_m = 0$, $m \geqslant 0$, так что утверждение доказано для случая простых характеристик.

Рассмотрим теперь случай кратного корня: $l(\xi) = (\xi\cdot a)^2$ с некоторым вектором $a \in \mathbf{C}^2$. Тогда $\Lambda = \{\lambda\tilde{a} \mid \lambda \in \mathbf{C}\}$, где вектор $\tilde{a}$ построен по a так же, как $\tilde{a}^j$ по a^j. Обозначим целую функцию в правой части (5) через $G(\xi)$. Тогда функция $G(\mu a + \lambda\tilde{a})$ имеет нуль второго порядка по μ при $\mu = 0$, поэтому к условию (7) добавится условие

$$\frac{\partial}{\partial\mu} G(\mu a + \lambda\tilde{a})|_{\mu=0}\cdot i = a_1\frac{\partial G}{\partial\xi_1}(\lambda\tilde{a}) + a_2\frac{\partial G}{\partial\xi_2}(\lambda\tilde{a}) = 0,$$

которое легко приводится к виду

$$\int_0^{2\pi} C(\tau)(a\cdot x)\,\mathrm{e}^{-i\lambda\tilde{a}\cdot x}\,\mathrm{d}\tau = 0 \quad \forall\lambda \in \mathbf{C}$$

с той же функцией $C(\tau)$. Обозначив $\tilde{C}(\tau) = (a\cdot x)C(\tau)$, проведем те же вычисления, что и ранее для функции C в условии (5). Получим условие

$$\int_0^{2\pi} \tilde{C}(\tau)Q(\tilde{a}\cdot x)\mathrm{d}\tau = 0 \quad \forall Q \in \mathbf{C}[z]. \tag{9}$$

Пусть опять $\lambda = -\bar{a}_2/\bar{a}_1 \neq \pm i$. Тогда, раскладывая функцию $\tilde{C}$ в ряд по системе $\{t_n, u_n\}$, построенной по углу φ_1: $\operatorname{ctg}\varphi_1 = \lambda$, получим из (9), что $\tilde{C}_m^t = 0$ $(m \geqslant 0)$. Последнее условие вместе с равенствами $C_m^t = 0$, полученными из условия (7) с $\tilde{a}^j = a$, дает $C_{m+1}^u = C_m^u$ $(m \geqslant 0)$, $C_0 = C_{-1} = 0$, поэтому $C_m^u = 0$, $C(\tau) = 0$, $v = 0$.

Следствия условия (9) в случае $\lambda = \pm i$ мы разбирать не будем, так как здесь исходное уравнение — одно из уравнений Бицадзе. Заметим только, что если эти вычисления проделать, то будет заметен широкий произвол в выборе коэффициентов решения. Теорема доказана.

Возвращаясь к примерам Бицадзе (3), (4) заметим, что как следует из доказанной теоремы, единственность решения задачи (2′) для системы

$$\partial^2 v/\partial x_1^2 - \partial^2 v/\partial x_2^2 - \mu\partial^2 w/\partial x_1\partial x_2 = 0,$$
$$\mu\partial^2 v/\partial x_1\partial x_2 + \partial^2 w/\partial x_1^2 - \partial^2 w/\partial x_2^2 = 0$$

нарушается для всех $\mu \in \mathbf{R}$, поскольку в этом случае при $\mu \neq \pm 2$ угол $\varphi_0 = \pi/2$.

Институт прикладной математики
и механики АН УССР

Поступило
24.09.87

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981.
[2] Александрян Р. А. Спектральные свойства операторов, порожденных системами дифференциальных уравнений типа Соболева С. Л.// Тр. ММО. Т. 9. М.: Изд-во МГУ, 1960. С. 455—505.