А. Н. Кормачева, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский, О гиперболическом параметре двумерной решётки сравнений,
Чебышевский сб., 2021, том 22, выпуск 4, 168–182

https://www.mathnet.ru/cheb1099

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 4.

УДК 511.9 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-168-182

О гиперболическом параметре двумерной решётки сравнений[1]

А. Н. Кормачева, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский

Кормачева Антонина Николаевна — аспирант, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: juska789@mail.ru
Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: i_rebrova@mail.ru
Добровольский Николай Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Аннотация

Данная работа посвящена уточнению результатов В. А. Быковского об оценке погрешности приближенного интегрирования на классе Коробова E_s^α для двумерных параллелепипедальных сеток.

Приведены необходимые сведения из теории цепных дробей и скобок Эйлера. С помощью теории наилучших приближений второго рода описано множество Быковского, состоящие из локальных минимумов решётки приближений Дирихле для рационального числа.

В явном виде описано множество Быковского для двумерной решётки решений линейного сравнения. Получена формула, выражающая гиперболический параметр этой решётки через знаменатели подходящих дробей и скобки Эйлера и позволяющая вычислять его за $O(N)$ арифметических операций.

Получены оценки гиперболической дзета-функции двумерной решётки решений линейного сравнения через сумму Быковского, которая является частичной суммой дзета-ряда для гиперболической дзета-функции решётки. Частичная сумма берется по множеству Быковского.

Для суммы Быковского получены оценки сверху и снизу из которых следует, что главный член для этих сумм есть сумма α-ых степеней элементов цепной дроби для $\frac{a}{N}$ делённый на N^α.

В заключении отмечены актуальные направления исследований по этой тематике.

Ключевые слова: квадратичные поля, приближение алгебраических сеток, функция качества, обобщённая параллелепипедальная сетка, множество Быковского, сумма Быковского, локальные минимумы решётки, минимальные решения сравнения.

Библиография: 17 названий.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710004_р_а.

Для цитирования:
А. Н. Кормачева, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. О гиперболическом параметре двумерной решётки сравнений // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 168–182.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 4.

UDC 511.9 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-168-182

On the hyperbolic parameter of a two-dimensional lattice of comparisons[2]

A. N. Kormacheva

Kormacheva Antonina Nikolaevna — postgraduate student, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: juska789@mail.ru
Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Tula State University (Tula).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: i_rebrova@mail.ru
Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Abstract

This paper is devoted to the refinement of the results of V. A. Bykovsky on the estimation of the error of approximate integration on the Korobov class E_s^α for two-dimensional parallelepipedal grids.

The necessary information from the theory of continued fractions and Euler brackets is given. With the help of the theory of best approximations of the second kind, the Bykovsky set consisting of local minima of the lattice of Dirichlet approximations for a rational number is described.

The Bykovsky set for a two-dimensional lattice of linear comparison solutions is explicitly described. A formula is obtained expressing the hyperbolic parameter of this lattice in terms of denominators of suitable fractions and Euler brackets and allowing it to be calculated in $O(N)$ arithmetic operations.

Estimates of the hyperbolic zeta function of a two-dimensional lattice of linear comparison solutions are obtained in terms of the Bykovsky sum, which is a partial sum of the zeta series for the hyperbolic zeta function of the lattice. The partial sum is taken by the Bykovsky set.

For the Bykovsky sum, estimates are obtained from above and from below, from which it follows that the main term for these sums is the sum of the α-th degrees of the elements of the continued fraction for $\frac{a}{N}$ divided by N^α.

In conclusion, the current directions of research on this topic are noted.

Keywords: quadratic fields, approximation of algebraic grids, quality function, generalized parallelepipedal grid, Bykovsky set, Bykovsky sum, local lattice minima, minimal comparison solutions.

Bibliography: 17 titles.

[2]Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710004_r_a.

For citation:

A. N. Kormacheva, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, 2021, "On the hyperbolic parameter of a two-dimensional lattice of comparisons", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 168–182.

1. Введение

В методе оптимальных коэффициентов профессора Н. М. Коробова [12, 13] большую роль играет гиперболический параметр $q(\Lambda)$ решётки решений Λ линейного сравнения

$$m_1 + a_1 m_2 + \ldots + a_{s-1} m_s \equiv 0 \pmod N, \quad (a_j, N) = 1 \quad (j = 1, \ldots, s-1), \tag{1}$$

который задается равенством

$$q(\Lambda) = \min_{\vec{m} \in \Lambda,\, \vec{m} \neq \vec{0}} \overline{m_1} \ldots \overline{m_s}$$

и $\overline{m} = \max(1, |m|)$ для любого вещественного числа m.

В общем случае вычисление гиперболического параметра решётки сравнений требует $O(N \ln^{s-1} N)$ арифметических операций (см. [8, 9]).

В работе [1] дано следующее определение.

Определение 1. *Назовем ненулевое решение сравнения (1) минимальным, если не существует другого ненулевого решения $(m_1', \ldots, m_s')$, для которого*

$$|m_1'| \leqslant |m_1|, \ldots, |m_s'| \leqslant |m_s|; \quad |m_1'| + \ldots + |m_s'| < |m_1| + \ldots + |m_s|.$$

Из теоремы Минковского о выпуклом теле непосредственно следует, что для таких решений справедливо неравенство

$$\overline{m_1} \ldots \overline{m_s} \leqslant N, \tag{2}$$

и они составляют конечное множество. Это множество будем называть минимальным множеством Быковского $B^{(0)}(\Lambda)$ решётки решений сравнения (1). Через $r^{(0)}(\Lambda)$ будем обозначать количество элементов в минимальном множестве Быковского $B^{(0)}(\Lambda)$. Так как множество $B^{(0)}(\Lambda)$ — центрально симметрично относительно нулевой точки, то ровно половина точек из $B^{(0)}(\Lambda)$ имеют первую ненулевую координату положительную. Следовательно, $r^{(0)}(\Lambda)$ — четное натуральное число.

Цель данной работы — построить в случае двумерной решётки $\Lambda(a, N)$ решений простейшего линейного сравнения $m_1 + am_2 \equiv 0 \pmod N$ от двух переменных алгоритм вычисления гиперболического параметра $q(\Lambda(a, N))$ за $O(\ln N)$ арифметических операций и описать множество Быковского для этого случая.

Решётка $\Lambda(a, N)$ имеет простой вид:

$$\Lambda(a, N) = \{(m_1, m_2) = (xN - ay, y) | x, y \in \mathbb{Z}\}$$

и задается базисом $\vec{\lambda}_1 = (-a, 1)$, $\vec{\lambda}_2 = (N, 0)$. Детерминант решётки $\Lambda(a, N)$ равен N: $\det \Lambda(a, N) = N$.

2. Сведения из теории цепных дробей и о скобках Эйлера

В этой работе нас будет интересовать цепная дробь для рационального числа $\frac{a}{N}$, $(a,N)=1$, которая в сокращённом виде имеет вид

$$\frac{a}{N}=\{q_0;q_1,\ldots,q_n\}=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{q_{n-1}+\cfrac{1}{q_n}}}}. \tag{3}$$

Отсюда следует, что произвольная подходящая дробь $\frac{P_m}{Q_m}$ к числу $\frac{a}{N}$ имеет вид

$$\frac{P_m}{Q_m}=\frac{[q_0,\ldots,q_m]_{(m+1)}}{[q_1,\ldots,q_m]_{(m)}},\quad (0\leqslant m\leqslant n),$$

где скобки Эйлера $[b_1,\ldots,b_n]_{(n)}$ порядка n, определены рекуррентно

$$[]_{(-1)}=0,\quad []_{(0)}=1,\quad [b_1,\ldots,b_n]_{(n)}=b_n[b_1,\ldots,b_{n-1}]_{(n-1)}+[b_1,\ldots,b_{n-2}]_{(n-2)}\quad (n\geqslant 1).$$

Известно (см. [10]), что $[b_1,\ldots,b_n]_{(n)}=[b_n,\ldots,b_1]_{(n)}$, и, следовательно,

$$[b_1,\ldots,b_n]_{(n)}=b_1[b_2,\ldots,b_n]_{(n-1)}+[b_3,\ldots,b_n]_{(n-2)}.$$

Нам потребуется следующее равенство для скобок Эйлера.

Лемма 1. *При $0\leqslant m\leqslant n$ справедливо равенство*

$$[q_0,\ldots,q_n]_{(n+1)}[q_1,\ldots,q_m]_{(m)}-[q_0,\ldots,q_m]_{(m+1)}[q_1,\ldots,q_n]_{(n)}=(-1)^m[q_{m+2},\ldots,q_n]_{(n-m-1)}.$$

Доказательство. Действительно, при $m=0$ утверждение верно в силу определения:

$$[q_0,\ldots,q_n]_{(n+1)}[]_{(0)}-[q_0]_{(1)}[q_1,\ldots,q_n]_{(n)}=[q_2,\ldots,q_n]_{(n)}.$$

Пусть утверждение справедливо для всех порядков непревосходящих m. Тогда

$$\begin{gathered}[q_0,\ldots,q_n]_{(n+1)}[q_1,\ldots,q_{m+1}]_{(m+1)}-[q_0,\ldots,q_{m+1}]_{(m+2)}[q_1,\ldots,q_n]_{(n)}=\\ =[q_0,\ldots,q_n]_{(n+1)}q_{m+1}[q_1,\ldots,q_m]_{(m)}+[q_0,\ldots,q_n]_{(n+1)}[q_1,\ldots,q_{m-1}]_{(m-1)}-\\ -[q_0,\ldots,q_m]_{(m+1)}q_{m+1}[q_1,\ldots,q_n]_{(n)}-[q_0,\ldots,q_{m-1}]_{(m)}[q_1,\ldots,q_n]_{(n)}=\\ =q_{m+1}(-1)^m[q_{m+2},\ldots,q_n]_{(n-m-1)}+(-1)^{m-1}[q_{m+1},\ldots,q_n]_{(n-m)}=(-1)^{m+1}[q_{m+3},\ldots,q_n]_{(n-m)}\end{gathered}$$

и тем самым утверждение леммы доказано. □

Хорошо известно (см. [16]) следующее тождество

$$[q_1,\ldots,q_n]_{(n)}=[q_1,\ldots,q_m]_{(m)}[q_{m+1},\ldots,q_n]_{(n-m)}+[q_1,\ldots,q_{m-1}]_{(m-1)}[q_{m+2},\ldots,q_n]_{(n-m-1)}. \tag{4}$$

3. Наилучшие приближения второго рода

Пусть β — произвольное действительное число отличное от нуля ($\beta\in\mathbb{R}$, $\beta\neq 0$). Через $\|\beta\|$ будем обозначать расстояние до ближайшего целого

$$\|\beta\|=\begin{cases}\{\beta\}, & \text{если } 0\leqslant\{\beta\}\leqslant\frac{1}{2},\\ 1-\{\beta\}, & \text{если } \frac{1}{2}<\{\beta\}<1,\end{cases}$$

$$\{\beta\} = \beta - [\beta] \text{— дробная часть } \beta, \quad [\beta] = n, \text{где } n \in \mathbb{N}, n \leqslant \beta < n+1, \text{— целая часть } \beta.$$

Будем через $\Lambda(\beta)$ обозначать решётку приближений Дирихле

$$\Lambda(\beta) = \{(q, q\beta - p) | q, p \in \mathbb{Z}\} = \{(q, \{q\beta\} - p) | q, p \in \mathbb{Z}\}.$$

Заметим, что если β — рациональное число, то решётка $\Lambda(\beta)$ — декартова, для любого иррационального β решётка $\Lambda(\beta)$ не является декартовой.

В 1842 году П. Г. Лежён-Дирихле доказал знаменитую теорему.

Теорема 1. *Для любого $\beta \in \mathbb{R}$ и $Q > 1$, $Q \in \mathbb{N}$ найдется натуральное $q \leqslant Q$ такое, что*

$$\|q\beta\| < \frac{1}{Q}.$$

Решётка $\Lambda(\beta)$ имеет базис $\vec{\lambda_1} = (1, \beta)$, $\vec{\lambda_2} = (0, -1)$ и базисную матрицу $M(\beta)$:

$$M(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(\beta) = \mathbb{Z}^2 \cdot M(\beta), \quad \det \Lambda(\beta) = 1.$$

Таким образом, всякая решётка приближений Дирихле $\Lambda(\beta)$ является унимодулярной решёткой.

Рассмотрим разложение рационального числа $\beta = \frac{a}{N}$ в цепную дробь (3).

Пусть $\frac{P_m}{Q_m}$ — m-ая подходящая дробь к рациональному числу β $(m = 0, 1, \ldots, n)$. Рассмотрим точки решётки $\vec{\lambda}_m = (Q_m, Q_m\beta - P_m)$ $(m = 0, 1, \ldots, n)$. Так как $P_m = q_m P_{m-1} + P_{m-2}$, $Q_m = q_m Q_{m-1} + Q_{m-2}$ $(m = 0, 1, \ldots, n)$, если положить $Q_{-2} = 1$, $Q_{-1} = 0$, $P_{-2} = 0$, $P_{-1} = 1$, то справедливо рекуррентное соотношение для векторов $\vec{\lambda}_m$: $\vec{\lambda}_m = q_m\vec{\lambda}_{m-1} + \vec{\lambda}_{m-2}$. Рассмотрим матрицы $M_m(\beta)$, заданные равенствами

$$M_m(\beta) = \begin{pmatrix} \vec{\lambda}_m \\ \vec{\lambda}_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_m & Q_m\beta - P_m \\ Q_{m-1} & Q_{m-1}\beta - P_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_m & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_{m-1} & Q_{m-1}\beta - P_{m-1} \\ Q_{m-2} & Q_{m-2}\beta - P_{m-2} \end{pmatrix},$$

$$M_m(\beta) = m_m(\beta) \cdot M_{m-1}(\beta) \quad (m = 0, 1, \ldots, n), \quad m_m(\beta) = \begin{pmatrix} q_m & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_0 = \begin{pmatrix} Q_0 & Q_0\beta - P_0 \\ Q_{-1} & Q_{-1}\beta - P_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \{\beta\} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = M(\{\beta\}), \quad M_{-1} = \begin{pmatrix} Q_{-1} & Q_{-1}\beta - P_{-1} \\ Q_{-2} & Q_{-2}\beta - P_{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что все матрицы $M_m(\beta)$ являются базисными.

Напомним известное определение наилучшего приближения второго рода (См. [17], стр. 34).

Определение 2. *Рациональная дробь $\frac{a}{b}$ $(b > 0)$ называется наилучшим приближением второго рода числа β, если из $\frac{c}{d} \neq \frac{a}{b}$, $0 < d \leqslant b$ необходимо следует*

$$|d\beta - c| > |b\beta - a|.$$

Согласно теоремам 16 и 17 из [17] справедлива теорема

Теорема 2. *Всякое наилучшие приближение второго рода есть подходящая дробь. Всякая подходящая дробь есть наилучшее приближение второго рода; единственное (тривиальное) исключение представляет*

$$\beta = q_0 + \frac{1}{2}, \quad \frac{P_0}{Q_0} = \frac{q_0}{1}.$$

Следуя за Г. Ф. Вороным [2], [5], [6] и работами [1] и [4], дадим следующее определение локального минимума для решётки $\Lambda(\beta)$.

Определение 3. *Точка $(q, q\beta - p)$ называется локальным минимумом решётки $\Lambda(\beta)$, если параллелепипед $\Pi(q, q\beta - p) = [-q, q] \times [-q\beta + p, q\beta - p]$ не содержит ненулевых точек решётки $\Lambda(\beta)$ кроме своих вершин.*

Согласно данному определению рассматриваются только локальные минимумы в правой полуплоскости. Очевидно, что каждому локальному минимуму $(q, q\beta - p)$ из правой полуплоскости соответствует в точности один симметричный локальный минимум $(-q, -q\beta + p)$ из левой полуплоскости.

Нетрудно видеть, что каждому наилучшему приближению второго рода $\frac{p}{q}$ для числа β соответствует локальный минимум $(q, q\beta - p)$ из решётки приближений Дирихле $\Lambda(\beta)$ и наоборот, каждому локальному минимуму $(q, q\beta - p)$ из решётки приближений Дирихле $\Lambda(\beta)$ соответствует наилучшее приближение второго рода $\frac{p}{q}$ для числа β.

Если ограничиться случаем только рациональных $\beta > 0$, то из теоремы 2 следует, что множество всех локальных минимумов решётки приближений Дирихле $\Lambda(\beta)$ состоит в точности из точек $\vec{\lambda}_m = (Q_m, Q_m\beta - P_m)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

Зададим точки $\vec{\lambda}_{-1} = (0, -1)$, $\vec{\lambda}_{-2} = (1, \beta)$, которые образуют базис решётки приближений Дирихле $\Lambda(\beta)$.

Теорема 3. *Последовательность всех локальных минимумов $\{\vec{\lambda}_0, \vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_n\}$ задается рекуррентным равенством*

$$\vec{\lambda}_m = q_m\vec{\lambda}_{m-1} + \vec{\lambda}_{m-2} \quad (0 \leqslant m \leqslant n), \tag{5}$$

где целое число q_m определяется равенством

$$q_m = \left[\frac{|\lambda_{m-2,2}|}{|\lambda_{m-1,2}|}\right], \quad \vec{\lambda}_m = (\lambda_{m,1}, \lambda_{m,2}). \tag{6}$$

Доказательство. Проведем доказательство по индукции и покажем, что для точек $\vec{\lambda}_n$, заданных равенствами (5) и (6), выполняется соотношение $\vec{\lambda}_m = (Q_m, Q_m\beta - P_m)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

Действительно, для $m = -2, -1$ это выполняется по определению. При этом $\lambda_{-2,2}\lambda_{-1,2} < 0$.

Далее, получим $q_0 = [\beta]$, $\vec{\lambda}_0 = q_0(0, -1) + (1, \beta) = (1, \{\beta\}) = (Q_0, Q_0\beta - P_0)$, $\lambda_{-1,2}\lambda_{0,2} < 0$ и утверждение справедливо при $m = 0$.

Пусть $m \geqslant 0$ и для любого k с $0 \leqslant k \leqslant m$ справедливо равенство $\vec{\lambda}_k = (Q_k, Q_k\beta - P_k)$. Так как по свойствам подходящих дробей имеем:

$$\lambda_{m-2,2}\lambda_{m-1,2} = (Q_{m-2}\beta - P_{m-2})(Q_{m-1}\beta - P_{m-1}) < 0,$$

то для $\lambda_{m,2} = \left[\frac{|\lambda_{m-2,2}|}{|\lambda_{m-1,2}|}\right]\lambda_{m-1,2} + \lambda_{m-2,2}$ будут выполнены неравенства $\lambda_{m,2}\lambda_{m-2,2} > 0$ и, следовательно, $\lambda_{m,2}\lambda_{m-1,2} < 0$, $|\lambda_{m,2}| < |\lambda_{m-1,2}|$.

Положим $\beta = q_0 + \frac{1}{\beta_1}$, $\beta_m = q_m + \frac{1}{\beta_{m+1}}$ $(m \geqslant 1)$, $q_m = [\beta_m]$. Тогда, как известно (см. [17]), справедливо равенство

$$\beta = \frac{P_{m-1}\beta_m + P_{m-2}}{Q_{m-1}\beta_m + Q_{m-2}} \quad (m \geqslant 1).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\lambda_{m-2,2}}{\lambda_{m-1,2}} = \frac{Q_{m-2}\frac{P_{m-1}\beta_m + P_{m-2}}{Q_{m-1}\beta_m + Q_{m-2}} - P_{m-2}}{Q_{m-1}\frac{P_{m-1}\beta_m + P_{m-2}}{Q_{m-1}\beta_m + Q_{m-2}} - P_{m-1}} = \frac{(Q_{m-2}P_{m-1} - P_{m-2}Q_{m-1})\beta_m}{Q_{m-1}P_{m-2} - P_{m-1}Q_{m-2}} = -\beta_m, \ \left[\frac{|\lambda_{m-2,2}|}{|\lambda_{m-1,2}|}\right] = q_m.$$

Поэтому по индукции получаем, что утверждение относительно $\vec{\lambda}_m$ справедливо для любого m, что и доказывает утверждение теоремы. □

4. Множество Быковского для двумерной решётки линейного сравнения

Прежде всего установим взаимно-однозначное соответствие между точками решёток $\Lambda(a,N)$ и $\Lambda\left(\frac{a}{N}\right)$:

$$\psi : \Lambda(a,N) \longleftrightarrow \Lambda\left(\frac{a}{N}\right)$$

с помощью равенства

$$\psi((xN-ay,y)) = \left(y, y\cdot\frac{a}{N}-x\right), \quad \psi^{-1}\left(q, q\cdot\frac{a}{N}-p\right) = (pN-aq,q).$$

Таким образом, взаимно-однозначное соответствие ψ задаётся линейным преобразованием с матрицей Ψ:

$$\Psi = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{N} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} N & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{N} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \frac{a}{N} \end{pmatrix},$$

$$(xN-ay,y)\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{N} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \left(y, y\cdot\frac{a}{N}-x\right).$$

Для решётки $\Lambda(a,N)$ определение локального минимума несколько отличается от определения 3.

Определение 4. *Точка $(xN-ay,y)$ называется локальным минимумом решётки $\Lambda(a,N)$, если параллелепипед $\Pi^*(xN-ay,y) = [-\overline{xN-ay}, \overline{xN-ay}] \times [-\overline{y}, \overline{y}]$ не содержит ненулевых точек решётки $\Lambda(a,N)$ кроме своих вершин.*

Заметим, что определение 1 содержит на два элемента больше минимальных решений чем определение 4 локальных минимумов. Действительно, точки $(0,N)$ и $(0,-N)$ являются минимальными решениями согласно определения 1, но не являются локальными минимумами согласно определению 4, так как если $ab \equiv 1 \pmod N$ и $|b| \leqslant \frac{N}{2}$, то решение $(-1,b) \in \Pi^*(0,N)$ и, значит, $(0,N)$ не является локальным минимумом решётки $\Lambda(a,N)$.

Будем множество локальных минимумов решётки $\Lambda(a,N)$ называть просто множеством Быковского и обозначать через $B(a,N)$, а количество элементов — через $r(a,N)$. Ясно, что $B(a,N) = B^{(0)}(\Lambda) \setminus \{(0,N),(0,-N)\}$ и $r(a,N) = r^{(0)}(\Lambda) - 2$.

Нетрудно видеть, что взаимно-однозначное соответствие ψ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множеством Быковского $B(a,N)$ и всеми локальными минимумами решётки Дирихле $\Lambda\left(\frac{a}{N}\right)$, кроме точки $(N,0)$, которая является локальным минимумом в решётке $\Lambda\left(\frac{a}{N}\right)$, а соответствующая ей точка $(0,N)$ не является локальным минимумом в решётке $\Lambda(a,N)$. Если через $B^*(a,N)$ обозначим множество всех локальных минимумов решётки $\Lambda(a,N)$ вида $(xN-ay,y)$ с $0<y<N$, то будем иметь $B(a,N) = B^*(a,N) \cup -B^*(a,N)$. И из теории наилучших приближений второго рода следует следующая теорема.

Теорема 4. *Для множества Быковского $B(a,N)$ справедливо равенство*

$$B^*(a,N) = \{((-1)^m[q_{m+2},\ldots,q_n]_{(n-m-1)}, Q_m) | m=0,\ldots,n-1\}, \quad B(a,N) = B^*(a,N) \cup -B^*(a,N).$$

Кроме этого, $r(a,N) = 2n$.

Следствие 1. *Для гиперболического параметра $q(\Lambda(a,N))$ двумерной решётки $\Lambda(a,N)$ решений линейного сравнения справедливо равенство*

$$q(\Lambda(a,N)) = \min_{0\leqslant m\leqslant n-1} [q_{m+2},\ldots,q_n]_{(n-m-1)} \cdot Q_m.$$

Кроме этого, всегда $q(\Lambda(a,N)) \leqslant a$ для $1 \leqslant a < N$, $(a,N)=1$.

Доказательство. Действительно, очевидно, что

$$q(\Lambda(a,N)) = \min_{(x,y)\in B^*(a,N)} |x|\cdot y.$$

Отсюда и из теоремы 4 следует первое утверждение следствия.

Второе утверждение следствия очевидно. □

Следствие 2. *Равенство $q(\Lambda(a,N)) = a$ для $1 \leqslant a < N$, $(a,N)=1$ выполняется тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий*

1. $q_1 \geqslant \max\limits_{2\leqslant\nu\leqslant n-1} q_\nu + 2$;
2. $q_1 = \max\limits_{2\leqslant\nu\leqslant n-1} q_\nu + 1, \quad 1+\frac{1}{q_2+1} > \frac{1}{q_{\nu+2}} + \frac{1}{q_\nu}$ *при* $q_\nu = q_1 - 1, \quad 2\leqslant \nu \leqslant n-1$;
3.

$$q_1 = \max_{2\leqslant\nu\leqslant n-1} q_\nu + 1,$$

$$1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{q_{n-1}+\cfrac{1}{q_n}}}} \geqslant \cfrac{1}{q_{\nu+2}+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{q_{n-1}+\cfrac{1}{q_n}}}} + \cfrac{1}{q_\nu+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_1}}}}$$

$$\text{при } q_\nu = q_1 - 1, \quad 2\leqslant\nu\leqslant n-1.$$

4.

$$q_1 = \max_{2\leqslant\nu\leqslant n-1} q_\nu,$$

$$\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{q_{n-1}+\cfrac{1}{q_n}}}} \geqslant \cfrac{1}{q_{\nu+2}+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{q_{n-1}+\cfrac{1}{q_n}}}} + \cfrac{1}{q_\nu+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_1}}}}$$

$$\text{при } q_{\nu+1} = q_1, \quad 1\leqslant\nu\leqslant n-1.$$

Доказательство. Действительно, равенство $q(\Lambda(a,N)) = a$ означает, что выполняется неравенство

$$a \leqslant [q_{m+2},\ldots,q_n]_{(n-m-1)}\cdot Q_m \quad (1\leqslant m\leqslant n-1),$$

которое эквивалентно неравенству

$$\frac{N}{a} = \frac{Q_n}{a} \geqslant \frac{Q_n}{[q_{m+2},\ldots,q_n]_{(n-m-1)}\cdot Q_m} \quad (1\leqslant m\leqslant n-1).$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{Q_n}{a} = \frac{[q_1,\ldots,q_n]_{(n)}}{[q_2,\ldots,q_n]_{(n-1)}} = q_1 + \cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{q_{n-1}+\cfrac{1}{q_n}}}}.$$

С другой стороны, воспользуемся тождеством (4), получим

$$\frac{Q_n}{[q_{m+2},\ldots,q_n]_{(n-m-1)}\cdot Q_m}=$$
$$=\frac{[q_1,\ldots,q_m]_{(m)}[q_{m+1},\ldots,q_n]_{(n-m)}+[q_1,\ldots,q_{m-1}]_{(m-1)}[q_{m+2},\ldots,q_n]_{(n-m-1)}}{[q_{m+2},\ldots,q_n]_{(n-m-1)}\cdot Q_m}=$$
$$=q_{m+1}+\cfrac{1}{q_{m+2}+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{q_{n-1}+\cfrac{1}{q_n}}}}+\cfrac{1}{q_m+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_1}}}}\quad(1\leqslant m\leqslant n-1).$$

Учитывая неравенства

$$\frac{1}{q_\nu+1}\leqslant\cfrac{1}{q_\nu+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{q_{n-1}+\cfrac{1}{q_n}}}}\leqslant\frac{1}{q_\nu},$$

получим утверждение следствия. □

5. Оценка гиперболической дзета-функции двумерной решётки сравнений

Как известно (см. [1, 4]), гиперболическая дзета-функция решётки $\Lambda(a,N)$ задаётся равенством

$$\zeta_H(\Lambda(a,N)|\alpha)=\sideset{}{'}\sum_{m_1,m_2=-\infty}^{\infty}\frac{\delta_N(m_1+am_2)}{(\overline{m}_1\overline{m}_2)^\alpha},\tag{7}$$

где

$$\delta_m(a)=\begin{cases}1, & \text{если } a\equiv 0 \pmod m,\\ 0, & \text{если } a\not\equiv 0 \pmod m,\end{cases}$$

— символ Коробова и $\overline{x}=\max(1,|x|)$ для любого вещественного x. С ней тесно связана функция $H(a;N)$, заданная формулой

$$H(a;N)=\frac{9}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(1-2\frac{k}{N}\right)^2\left(1-2\left\{\frac{ak}{N}\right\}\right)^2.$$

Функция $H(a;N)$, предложенная Н. М. Коробовым в работе [13], используется для определения качества оптимальных коэффициентов и для построения алгоритмов их вычисления (см. например, [14, 15]). В работе [7] дается конечная формула для $H(a;N)$, которая позволяет её точно вычислять за $O(\ln N)$ арифметических операций.

Так как периодическая функция $h(x)=3(1-2\{x\})^2$ имеет разложение в ряд Фурье

$$h(x)=3(1-2\{x\})^2=1+\frac{6}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\left(e^{2\pi imx}+e^{-2\pi imx}\right),$$

то справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Справедливы равенства*

$$\zeta_H(\Lambda(a,N)|\alpha) = \frac{4\zeta(\alpha)}{N^\alpha} + \zeta_H^*(\Lambda(a,N)|\alpha),$$
$$H(a;N) = 1 + \frac{4}{N^2} + \frac{36}{\pi^4}\zeta_H^*(\Lambda(a,N)|2),$$

где $\zeta(\alpha)$ — дзета-функция Римана, а

$$\zeta_H^*(\Lambda(a,N)|\alpha) = \sum_{m_1,m_2=1}^{\infty} \frac{2(\delta_N(m_1+am_2)+\delta_N(m_1-am_2))}{m_1^\alpha m_2^\alpha}.$$

Доказательство. Так как

$$\zeta_H(\Lambda(a,N)|\alpha) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta_N(m)+\delta_N(-m)+\delta_N(am)+\delta_N(-am)}{m^\alpha} +$$
$$+ \sum_{m_1,m_2=1}^{\infty} \frac{\delta_N(m_1+am_2)+\delta_N(-m_1+am_2)+\delta_N(m_1-am_2)+\delta_N(-m_1-am_2)}{m_1^\alpha m_2^\alpha} =$$
$$= \frac{4\zeta(\alpha)}{N^\alpha} + \zeta_H^*(\Lambda(a,N)|\alpha)$$

и первое утверждение леммы доказано.

Аналогично доказывается второе утверждение с учетом, что $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. □

Положим, как обычно, $N_1 = \left[\frac{N}{2}\right]$, $N_2 = \left[\frac{N-1}{2}\right]$, тогда множество чисел

$$M(N) = \{-N_2, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, N_1\}$$

образуют абсолютно наименьшую полную систему вычетов по модулю N. Очевидно, что для множества Быковского $B(a,N)$ выполняется включение $B(a,N) \subset M(N)^2$.

Определим величины

$$\zeta_H^{**}(\Lambda(a,N)|\alpha) = \sum_{m_1,m_2=1}^{N_1} \frac{2(\delta_N(m_1+am_2)+\delta_N(m_1-am_2))}{m_1^\alpha m_2^\alpha},$$
$$\zeta_H^{***}(\Lambda(a,N)|\alpha) = \sum_{\max(m_1,m_2)>N_1} \frac{2(\delta_N(m_1+am_2)+\delta_N(m_1-am_2))}{m_1^\alpha m_2^\alpha}.$$

Ясно, что $\zeta_H^*(\Lambda(a,N)|\alpha) = \zeta_H^{**}(\Lambda(a,N)|\alpha) + \zeta_H^{***}(\Lambda(a,N)|\alpha)$.

Лемма 3. *Справедливо неравенство*

$$\zeta_H^{***}(\Lambda(a,N)|\alpha) \leqslant \frac{2^{\alpha+3}\zeta^2(\alpha)}{N^\alpha}\left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right).$$

Доказательство. Действительно, имеем:

$$\zeta_H^{***}(\Lambda(a,N)|\alpha) = \sum_{m_1=1}^{\infty} \frac{2}{m_1^\alpha} \sum_{m_2 \geqslant \frac{N}{2}}^{\infty} \frac{\delta_N(m_1+am_2)+\delta_N(m_1-am_2)}{m_2^\alpha} +$$
$$+ \sum_{m_2=1}^{\infty} \frac{2}{m_2^\alpha} \sum_{m_1 \geqslant \frac{N}{2}}^{\infty} \frac{\delta_N(m_1+am_2)+\delta_N(m_1-am_2)}{m_1^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m_1=1}^{\infty}\frac{2}{m_1^\alpha}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{N}{2}+mN\right)^\alpha}\sum_{m_2=\frac{N}{2}+mN}^{\frac{N}{2}+mN+N-1}(\delta_N(m_1+am_2)+\delta_N(m_1-am_2))+$$

$$+\sum_{m_2=1}^{\infty}\frac{2}{m_2^\alpha}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{N}{2}+mN\right)^\alpha}\sum_{m_1=\frac{N}{2}+mN}^{\frac{N}{2}+mN+N-1}(\delta_N(m_1+am_2)+\delta_N(m_1-am_2))\leqslant$$

$$\leqslant 8\zeta(\alpha)\frac{2^\alpha}{N^\alpha}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(1+2m)^\alpha}=\frac{2^{\alpha+3}\zeta^2(\alpha)}{N^\alpha}\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right).$$

□

Так как $\zeta^{**}_H(\Lambda(a,N)|\alpha)=\zeta^{**}_H(\Lambda(N-a,N)|\alpha)$, то, без ограничения общности, считаем $1\leqslant a<\frac{N}{2}$.

Лемма 4. *Справедливо неравенство*

$$\zeta^{**}_H(\Lambda(a,N)|\alpha)\leqslant 4\zeta^2(\alpha)\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{1}{Q_\nu^\alpha[q_{\nu+2},\ldots,q_n]^\alpha_{(n-\nu-1)}}.$$

Доказательство. Действительно, положим $b_\nu=[q_{\nu+2},\ldots,q_n]_{(n-\nu-1)}$, $c_\nu=\left[\frac{N}{2b_\nu}\right]$ ($\nu=0,\ldots,n-1$), тогда

$$\zeta^{**}_H(\Lambda(a,N)|\alpha)\leqslant\sum_{\nu=0}^{n-1}\sum_{m_2=Q_\nu}^{\min(Q_{\nu+1}-1,N_1)}\frac{2}{m_2^\alpha}\sum_{a=1}^{c_\nu}\sum_{m_1=ab_\nu}^{ab_\nu+b_\nu-1}\frac{\delta_N(m_1+am_2)+\delta_N(m_1-am_2)}{m_1^\alpha}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\nu=0}^{n-1}\sum_{b=1}^{q_{\nu+1}}\sum_{m_2=bQ_\nu}^{\min(bQ_\nu+Q_\nu-1,Q_{\nu+1}-1,N_1)}\frac{2}{m_2^\alpha}\sum_{a=1}^{c_\nu}\sum_{m_1=ab_\nu}^{ab_\nu+b_\nu-1}\frac{\delta_N(m_1+am_2)+\delta_N(m_1-am_2)}{m_1^\alpha}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{2}{Q_\nu^\alpha b_\nu^\alpha}\sum_{b=1}^{q_{\nu+1}}\frac{1}{b^\alpha}\sum_{a=1}^{c_\nu}\frac{1}{a^\alpha}S_\nu(a,b),$$

где

$$S_\nu(a,b)=\sum_{m_2=bQ_\nu}^{\min(bQ_\nu+Q_\nu-1,Q_{\nu+1}-1,N_1)}\sum_{m_1=ab_\nu}^{ab_\nu+b_\nu-1}\delta_N(m_1+am_2)+$$

$$+\sum_{m_2=bQ_\nu}^{\min(bQ_\nu+Q_\nu-1,Q_{\nu+1}-1,N_1)}\sum_{m_1=ab_\nu}^{ab_\nu+b_\nu-1}\delta_N(m_1-am_2).$$

Покажем,что

$$\sum_{m_2=bQ_\nu}^{\min(bQ_\nu+Q_\nu-1,Q_{\nu+1}-1,N_1)}\sum_{m_1=ab_\nu}^{ab_\nu+b_\nu-1}\delta_N(m_1+am_2)\leqslant 1.$$

Предположим противное, тогда найдутся две точки (m_1,m_2) и (m_1',m_2') из области суммирования такие, что

$$\delta_N(m_1+am_2)=\delta_N(m_1'+am_2')=1.$$

Но тогда $\delta_N((m_1-m_1')+a(m_2-m_2'))=1$ и $|m_1-m_1'|<Q_\nu$, $|m_2-m_2'|<b_\nu$, что противоречит определению множества Быковского и теореме 4. Аналогично доказывается, что

$$\sum_{m_2=bQ_\nu}^{\min(bQ_\nu+Q_\nu-1,Q_{\nu+1}-1,N_1)}\sum_{m_1=ab_\nu}^{ab_\nu+b_\nu-1}\delta_N(m_1-am_2)\leqslant 1.$$

Отсюда следует, что $0 \leqslant S_\nu(a,b) \leqslant 2$ и

$$\zeta_H^{**}(\Lambda(a,N)|\alpha) \leqslant 4\zeta^2(\alpha)\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{1}{Q_\nu^\alpha b_\nu^\alpha}.$$

□

Выражение

$$SB(\Lambda|\alpha) = \sum_{\vec{x}\in B(\Lambda)}\frac{1}{(\overline{x}_1\ldots\overline{x}_s)^\alpha}$$

будем называть суммой Быковского.

Теорема 5. *Для гиперболической дзета-функции решётки $\Lambda(a,N)$ справедливы неравенства*

$$SB(\Lambda(a,N)|\alpha) \leqslant \zeta_H(\Lambda(a,N)|\alpha) \leqslant \frac{4\zeta(\alpha)}{N^\alpha} + \frac{2^{\alpha+3}\zeta^2(\alpha)}{N^\alpha}\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right) + 2\zeta^2(\alpha)SB(\Lambda(a,N)|\alpha).$$

Доказательство. Левое неравенство очевидно. Правое неравенство следует из лемм 2–4.
□

Для суммы Быковского решётки $\Lambda(a,N)$ решений линейного сравнения несложно получить двусторонние оценки.

Теорема 6. *Для суммы Быковского справедливы неравенства*

$$\frac{c_1(\Lambda(a,N)|\alpha)}{N^\alpha} \leqslant SB(\Lambda(a,N)|\alpha) \leqslant \frac{c_2(\Lambda(a,N)|\alpha)}{N^\alpha},$$

где

$$c_1(\Lambda(a,N)|\alpha) = \sum_{\nu=0}^{n-1}(q_{\nu+1})^\alpha, \quad c_2(\Lambda(a,N)|\alpha) = \sum_{\nu=0}^{n-1}\left(q_{\nu+1}+\frac{1}{q_{\nu+2}}+\frac{1}{q_\nu}\right)^\alpha.$$

Доказательство. Повторяя рассуждения доказательства следствия 2, получим утверждение теоремы. □

Из доказанной теоремы следует, что главный член для этих сумм есть сумма α-ых степеней элементов цепной дроби для $\frac{a}{N}$ делённый на N^α.

6. Заключение

Пусть α — произвольная вещественная иррациональность и решётка $\Lambda(\alpha)$ задана равенством

$$\Lambda(\alpha) = \{(n+k\alpha, n-k\alpha)|n,k\in\mathbb{Z}\}.$$

Пусть $\frac{P_m}{Q_m}$ обозначает m-ю подходящая дробь к α. По аналогии с квадратичным случаем можно рассмотреть решётку $\Lambda_m(Q_m,P_m) = \{(Q_m n + kP_m, Q_m n - kP_m)|n,k\in\mathbb{Z}\}$ и сетку

$$M(\Lambda_m(\alpha)) = \left\{\left(\frac{n}{2Q_m}+\frac{k}{2P_m}, \frac{n}{2Q_m}-\frac{k}{2P_m}\right)\middle| k\in B(n), 0\leqslant n\leqslant 2Q_m-1\right\},$$

$$B(n) = \left\{k\,\middle|\,\begin{array}{ll} k=0, & \text{при } n=0,\\ -\frac{P_m n}{Q_m}\leqslant k\leqslant\frac{P_m n}{Q_m}, & \text{при } n=1,\ldots Q_m-1,\\ -2P_m+\frac{P_m n}{Q_m}<k<2P_m-\frac{P_m n}{Q_m}, & \text{при } n=Q_m,\ldots 2Q_m-1;\end{array}\right\}$$

Из результатов А. В. Михляевой [15] следует, что это всегда будет параллелепипедальная сетка. Качество этой сетки можно рассчитать с помощью быстрого алгоритма из работы [3].

Возникают следующие естественные вопросы:

1. Как множество Быковского для решётки $\Lambda_m(Q_m, P_m)$ связано с локальными минимумами решётки $\Lambda_m(\alpha)$?

2. Как суммы Быковского для решётки $\Lambda_m(Q_m, P_m)$ связаны с суммами Быковского для решётки $\Lambda_m(\alpha)$?

3. Можно ли получить для аналога функции H для решётки $\Lambda_m(\alpha)$ конечную формулу аналогичную результатам из работы [4]?

4. Можно ли результаты для размерности 2 перенести на размерность 3 или на любую размерность $s > 2$?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Быковский В. А. О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул // Чебышевский сборник, 2002, т. 3, вып. 2(4), С. 27–33.

2. Г. Ф. Вороной Об одном обобщении алгоритма непрерывных дробей // В книге Г. Ф. Вороной. Собрание сочинений в трех томах. Т. 1, С. 197–391.

3. Вронская Г. Т., Добровольский Н. Н. Отклонения плоских сеток. монография / под редакцией Н. М. Добровольского. Тула, 2012.

4. О. А. Горкуша, Н. М. Добровольский. Об оценках гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сборник, 2005, т. 6, вып. 2(14), С. 130–138.

5. Б. Н. Делоне. Петербургская школа теории чисел. — М.–Л. Издательство Академии наук СССР. 1947 г., 422 с.

6. Б. Н. Делоне, Д. К. Фаддеев. Теория иррациональностей третьей степени // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 11, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1940, С. 3–340.

7. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Пихтильков С. А., Родионова О. В., Устян А. Е. Об одном алгоритме поиска оптимальных коэффициентов // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 5, вып. 1. Тула, 1999. С. 51–71.

8. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Реброва И. Ю. Об одном рекурсивном алгоритме для решёток // Теория приближений и гармонический анализ: Тез. докл. Междунар. конф. Тула, 1998.

9. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Реброва И. Ю. Об одном рекурсивном алгоритме для решёток // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 5, вып. 3. Тула, 1999. С. 38–51.

10. Дэвенпорт Г. Высшая арифметика. — М.: Наука. 1965 г. — 176 с.

11. Касселс Д. Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965. 422 с.

12. Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19–25.

13. Коробов Н. М. Свойства и вычисление оптимальных коэффициентов // ДАН СССР 132. 1960. № 5. С. 1009–1012.

14. Михляева А. В. Приближение квадратичных алгебраических решёток и сеток целочисленными решётками и рациональными сетками // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 3. С. 241–256.

15. Михляева А. В. Функция качества для приближения квадратичных алгебраических сеток // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1. С. 307–312.

16. Сушкевич А. К. Теория чисел.– Харьков: Из-во Харьковского гос. ун-та им. А. М. Горького. 1956. 204 с.

17. А. Я. Хинчин. Цепные дроби. — М.: Физматлит, 1960 — 112 с.

REFERENCES

1. Bykovskij, V.A 2002, “On the error of number-theoretic quadrature formulas”, Chebyshevskij sbornik, vol. 3, no. 2(4), pp. 27–33.

2. Voronoi, GF 1896, On Generalization of the Algorithm of Continued Fraction, Warsawa Ünіversity.

3. Vronskaya, G. T., Dobrovol’skii, N. N. 2012, "Deviations of flat grids. monograph", edited by N. M. Dobrovol’skii. Tula.

4. O. A. Gorkusha, N. M. Dobrovolsky, 2005, "On estimates of hyperbolic zeta function of lattices" // Chebyshevsky Collection, vol. 6, issue 2(14), pp. 130-138.

5. B. N. Delone., 1947, "St. Petersburg School of Number Theory" — *M.–L. Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR.* 422 p.

6. B. N. Delone, D. K. Faddeev., 1940, "The theory of irrationalities of the third degree" // *Tr. Math. V. A. Steklov Institute, 11, Publishing House of the USSR Academy of Sciences, M.-L.*, pp. 3-340.

7. Dobrovol’skii, N. M., Esayan, A.R., Pikhtil’kov, S.A., Rodionova, O.V. & Ustyan, A.E. 1999, “On a single algorithm for finding optimal coefficients”, Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 5, no. 1, pp. 51–71.

8. Dobrovol’skii, N. M., Esayan, A.R. & Rebrova, I. YU. 1998, “On a recursive algorithm for lattices”, Teoriya priblizhenij i garmonicheskij analiz: Tezisy doklada Mezhdunarodnoj konferentsii (Approximation theory and harmonic analysis: proceedings of the International conference), Tula, Russia.

9. Dobrovol’skii, N. M., Esayan, A.R. & Rebrova, I. YU. 1998, “On a recursive algorithm for lattices”, Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 5, no. 3, pp. 38–51.

10. Davenport, H., 1965, "The higher arithmetic", *Moscow, Nauka* — pp. 176.

11. Kassels, D. 1965, Vvedenie v geometriyu chisel, [Introduction to the geometry of numbers], Mir, Moscow, Russia.

12. Korobov, N.M. 1959, “The evaluation of multiple integrals by method of optimal coefficients”, Vestnik Moskovskogo universiteta, no. 4, pp. 19–25.

13. Korobov, N.M. 1960, “Properties and calculation of optimal coefficients”, Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 132, no. 5, pp. 1009–1012.

14. Mikhlyaeva, A. V., 2018, "Approximation of quadratic algebraic lattices and nets by integer lattices and rational nets" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 241–256.

15. Mikhlyaeva, A. V., 2019, "Quality function for the approximation of quadratic algebraic nets" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 307–312.

16. Sushkevich A. K., 1956, "Number theory" – *Kharkiv: From the Kharkiv State University named after A.M. Gorky.* 204 p.

17. A. Y. Khinchin, 1960, "Chain fractions" — *M.: Fizmatlit*, — 112 p.

Получено 18.07.2021 г.
Принято в печать 6.12.2021 г.