Г. В. Гренкин, Н. В. Маркова, Г. Ш. Цициашвили, Свойства компонент связности параллельно-последовательных соединений,
Дальневост. матем. журн., 2012, том 12, номер 1, 12–19

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2012. Том 12. № 1. С. 12–19

УДК 519.248:62-192+519.176
MSC2010 60K10+94Cxx

© Г. В. Гренкин, Н. В. Маркова, Г. Ш. Цициашвили[1]

Свойства компонент связности параллельно-последовательных соединений

В настоящей работе выводятся рекурсивные формулы для вычисления производящих функций, распределений и моментов случайного числа компонент связности в параллельно-последовательных соединениях, а также вероятностей их связности. Для соединений с большим числом ребер доказываются варианты закона больших чисел и центральной предельной теоремы.

Ключевые слова: *параллельно-последовательное соединение, компоненты связности.*

Введение

Задача вычисления надежности параллельно-последовательных соединений является классической в теории надежности [1], [2]. Эта задача решается путем рекурсивных определений параллельно-последовательных соединений и вывода формул для их надежности (вероятности связности конечных вершин соединения). Однако интенсивное развитие компьютерных наук ставит новые задачи: вычисление распределения и моментов числа компонент связности, вычисление вероятности связности параллельно-последовательных соединений.

В первом параграфе доказываются рекурсивные формулы вычисления производящих функций, а также первого и второго моментов числа компонент связности в параллельно-последовательных соединениях с ребрами, имеющими различные вероятности работоспособности. Это доказательство основано на введении двумерного описания случайной реализации соединения, состоящего из индикатора связности конечных вершин и числа компонент связности. Указанные две характеристики образуют двумерный случайный вектор, для которого вводятся условные распределения второй компоненты при заданной первой компоненте. Далее строятся рекурсивные формулы для вычисления безусловного распределения первой компоненты, условного распределения второй компоненты и затем безусловного распределения второй компоненты.

Во втором параграфе выводятся предельные теоремы для числа компонент связности в параллельно-последовательных соединениях с ребрами, имеющими одинаковую вероятность работоспособности. Эти выводы основаны на неравенствах, которым подчиняется число компонент связности параллельных и последовательных соединений, а также на усиленном законе больших чисел и центральной предельной теореме в форме Муавра – Лапласа.

[1]Дальневосточный федеральный университет, 690600, г. Владивосток, ул. Суханова 8, Тихоокеанский государственный университет, 680035, г. Хабаровск, ул. Тихоокеанская 136, Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: `glebgrenkin@gmail.com, nata_mark@mail.ru, guram@iam.dvo.ru`

1. Соединения с различными ребрами

Класс параллельно-последовательных соединений.
Определим рекурсивно класс $\mathcal{A}$ параллельно-последовательных соединений двухполюсников G. Под двухполюсником понимается связный граф с начальной и конечной вершинами. Пусть $\mathcal{A}_1$ – счетное множество ребер w (множество образующих) и $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$. Если двухполюсники $G_1, G_2 \in \mathcal{A}$ с множествами ребер W_1, W_2 соответственно и $W_1 \cap W_2 = \emptyset$, то их последовательное $G_1 \to G_2$ и параллельное $G_1 \parallel G_2$ соединения принадлежат классу $\mathcal{A}$, а множество ребер в этих соединениях равно $W_1 \cup W_2$. Начальная вершина двухполюсника $G_1 \to G_2$ ($G_1 \parallel G_2$) совпадает с начальной вершиной двухполюсника G_1 (со склейкой начальных вершин двухполюсников G_1, G_2), а конечная вершина – с конечной вершиной G_2 (со склейкой конечных вершин G_1, G_2).

Обозначим $\alpha(G)$ случайную величину, равную единице, если в случайной реализации начальная и конечная вершины двухполюсника G связны, и равной нулю, если они несвязны. Обозначим

$$p_w = P(\alpha(w) = 1),\ q_w = 1 - p_w, \tag{1}$$

здесь ребро w понимается как элементарный связный граф. Пусть $\eta(G)$ совпадает со случайной величиной, равной числу компонент связности случайной реализации (при отказе ребра графа концевые вершины этого ребра в графе сохраняются). Нетрудно получить

$$P((\alpha(w), \eta(w)) = (1, 1)) = p_w,\ P((\alpha(w), \eta(w)) = (0, 2)) = q_w,\ w \in \mathcal{A}_1, \tag{2}$$

а для $G_1,\ G_2 \in \mathcal{A},\ W_1 \cap W_2 = \emptyset$,

$$\alpha(G_1 \to G_2) = \alpha(G_1) \wedge \alpha(G_2),\ \eta(G_1 \to G_2) = \eta(G_1) + \eta(G_2) - 1, \tag{3}$$

$$\alpha(G_1 \parallel G_2) = \alpha(G_1) \vee \alpha(G_2),\ \eta(G_1 \parallel G_2) = \eta(G_1) + \eta(G_2) - 2 + \alpha(G_1) \wedge \alpha(G_2). \tag{4}$$

Условная производящая функция числа компонент связности.
В работе изучаются условные вероятности типа $P(\eta(G) = n|\alpha(G) = a)$, где $a = 0, 1$, вместо аргумента G могут быть $G_1 \to G_2$, $G_1 \parallel G_2$ или какое-нибудь ребро w. Аналогично (2) получаем равенство

$$M\left(z^{\eta(w)}|\alpha(w) = a\right) = z^{2-a}. \tag{5}$$

Пусть $G_1, G_2 \in \mathcal{A},\ W_1 \bigcap W_2 = \emptyset$, случайные векторы $(\alpha(G_1), \eta(G_1))$ и $(\alpha(G_2), \eta(G_2))$ независимы и заданы условные производящие функции $M(z^{\eta(G_i)}|\alpha(G_i) = a_i),\ a_i = 0, 1,\ i = 1, 2$. Тогда в силу формул (3), (4) справедливы следующие равенства:

$$M\left(z^{\eta(G_1 \to G_2)}|\alpha(G_1 \to G_2) = a\right) = \sum_{a_1, a_2:\ a_1 \wedge a_2 = a} \frac{P(\alpha(G_1) = a_1)P(\alpha(G_2) = a_2)}{P(\alpha(G_1 \to G_2) = a)} \times$$

$$\times M\left(z^{\eta(G_1)}|\alpha(G_1) = a_1\right) M\left(z^{\eta(G_2)}|\alpha(G_2) = a_2\right) z^{-1}, \tag{6}$$

$$M\left(z^{\eta(G_1 \parallel G_2)}|\alpha(G_1 \parallel G_2) = a\right) = \sum_{a_1, a_2:\ a_1 \vee a_2 = a} \frac{P(\alpha(G_1) = a_1)P(\alpha(G_2) = a_2)}{P(\alpha(G_1 \parallel G_2) = a)} \times$$

$$\times M\left(z^{\eta(G_1)}|\alpha(G_1) = a_1\right) M\left(z^{\eta(G_2)}|\alpha(G_2) = a_2\right) z^{-2 + a_1 \wedge a_2}, \tag{7}$$

в которых вероятности $P(\alpha(G_1 \to G_2) = a),\ P(\alpha(G_1 \parallel G_2) = a)$ вычисляются с помощью очевидных формул

$$P(\alpha(G_1 \to G_2) = 1) = P(\alpha(G_1) = 1)P(\alpha(G_2) = 1),$$

$$P(\alpha(G_1 \parallel G_2) = 0) = P(\alpha(G_1) = 0) P(\alpha(G_2) = 0). \tag{8}$$

Остановимся на доказательстве формулы (6). Заметим сначала, что для независимых двумерных дискретных случайных векторов (определенных на одном вероятностном пространстве) (X_1, Y_1) и (X_2, Y_2), принимающих значения (x_{1i}, y_{1i}) и (x_{2i}, y_{2i}) соответственно $(i = 1, 2, \ldots, I)$, справедлива формула

$$\begin{gathered} P\left(Y_1 = y_{1i},\ Y_2 = y_{2k} | X_1 = x_{1i},\ X_2 = x_{2k}\right) = \\ = P\left(Y_1 = y_{1i} | X_1 = x_{1i}\right) P\left(Y_2 = y_{2k} | X_2 = x_{2k}\right). \end{gathered} \tag{9}$$

Введем в рассмотрение событие $A = \{f(X_1, X_2) = b\}$, где f – функция двух переменных, а b – некоторое число. Тогда в силу (9) по формуле полной вероятности

$$P\left(Y_1 = y_1,\ Y_2 = y_2,\ A\right) =$$

$$= \sum_{x_{1j}, x_{2m}\colon f(x_{1j}, x_{2m}) = b} P\left(X_1 = x_{1j}\right) P\left(Y_1 = y_1 | X_1 = x_{1j}\right) P\left(X_2 = x_{1m}\right) P\left(Y_2 = y_2 | X_2 = x_{2m}\right).$$

Отсюда следует

$$M\left(Y_1 Y_2 | A\right) = \frac{1}{P(A)} \sum_{y_{1i}, y_{2k}} y_{1i} y_{2k} P\left(Y_1 = y_{1i},\ Y_2 = y_{2k}, A\right) = \frac{1}{P(A)} \sum_{y_{1i}, y_{2k}} y_{1i} y_{2k} \times$$

$$\times \sum_{x_{1j}, x_{2m}\colon f(x_{1j}, x_{2m}) = b} P\left(X_1 = x_{1j}\right) P\left(Y_1 = y_1 | X_1 = x_{1j}\right) P\left(X_2 = x_{1m}\right) P\left(Y_2 = y_2 | X_2 = x_{2m}\right) =$$

$$= \frac{1}{P(A)} \sum_{x_{1j}, x_{2m}\colon f(x_{1j}, x_{2m}) = b} P\left(X_1 = x_{1j}\right) P\left(X_2 = x_{1m}\right) M\left(Y_1 | X_1 = x_{1j}\right) M\left(Y_2 | X_2 = x_{2m}\right).$$

Из этого равенства с учетом (3) следует формула (6). Аналогично с помощью формулы (4) доказывается равенство (7).

Очевидно, производящая функция числа компонент связности $\eta(G)$ в случайной реализации графа G равна

$$M z^{\eta(G)} = \sum_{a=0,1} P(\alpha(G) = a) M\left(z^{\eta(G)} | \alpha(G) = a\right).$$

При этом, если $G = G_1 \to G_2$, то для условного математического ожидания справедливо равенство (6), а если $G = G_1 \parallel G_2$, то равенство (7).

Условное распределение числа компонент связности.

Из равенств (1), (2) нетрудно получить

$$P(\eta(w) = 1 | \alpha(w) = 1) = 1,\ P(\eta(w) = 2 | \alpha(w) = 0) = 1,\ w \in \mathcal{A}_1. \tag{10}$$

Пусть $G_1, G_2 \in \mathcal{A},\ W_1 \bigcap W_2 = \emptyset$ и заданы вероятности $P(\eta(G_i) = t | \alpha(G_i) = a_i),\ 1 \le t \le k + 1 - a_i,\ a_i = 0, 1,\ i = 1, 2$. Тогда, используя равенства (6), (7) и соотношения

$$P(\eta(G) = 0 | \alpha(G) = a) \equiv 0,\ M\left(z^{\eta(G)} | \alpha(G) = a\right) = \sum_{k \ge 1} z^k P(\eta(G) = k | \alpha(G) = a),$$

получим

$$P(\eta(G_1 \to G_2) = k | \alpha(G_1 \to G_2) = a) = \sum_{a_1, a_2\colon a_1 \wedge a_2 = a} \sum_{j=1}^{k} \frac{P(\alpha(G_1) = a_1) P(\alpha(G_2) = a_2)}{P(\alpha(G_1 \to G_2) = a)} \times$$

$$P(\eta(G_1)=j|\alpha(G_1)=a_1)P(\eta(G_2)=k-j+1|\alpha(G_2)=a_2), \quad (11)$$

$$P(\eta(G_1\parallel G_2)=k|\alpha(G_1\parallel G_2)=a)=\sum_{a_1,a_2:\,a_1\vee a_2=a}\ \sum_{j=1}^{k+1-a_1\wedge a_2}\frac{P(\alpha(G_1)=a_1)P(\alpha(G_2)=a_2)}{P(\alpha(G_1\parallel G_2)=a)}\times$$

$$P(\eta(G_1)=j|\alpha(G_1)=a_1)P(\eta(G_2)=k-j+2-a_1|\alpha(G_2)=a_2\wedge a_2). \quad (12)$$

В свою очередь, из формулы полной вероятности следует равенство

$$P(\eta(G)=k)=\sum_{a=0,1}P(\alpha(G)=a)P(\eta(G)=k|\alpha(G)=a).$$

Прямым следствием формул (10)–(12) являются рекурсивные соотношения

$$P(\eta(G_1\to G_2)=1|\alpha(G_1\to G_2)=1)=P(\eta(G_1)=1|\alpha(G_1)=1)P(\eta(G_2)=1|\alpha(G_2)=1),$$

$$P(\eta(G_1\parallel G_2)=2|\alpha(G_1\parallel G_2)=0)=P(\eta(G_1)=2|\alpha(G_1)=0)P(\eta(G_2)=2|\alpha(G_2)=0),$$

$$P(\eta(G_1\to G_2)=2|\alpha(G_1\to G_2)=0)=\frac{1}{P(\alpha(G_1\to G_2)=0)}\times$$

$$[P(\alpha(G_1)=1)P(\eta(G_1)=1|\alpha(G_1)=1)P(\alpha(G_2)=0)P(\eta(G_2)=2|\alpha(G_2)=0)+$$

$$+P(\alpha(G_1)=0)P(\eta(G_1)=2|\alpha(G_1)=0)P(\alpha(G_2)=1)P(\eta(G_2)=1|\alpha(G_2)=1],$$

$$P(\eta(G_1\parallel G_2)=1|\alpha(G_1\parallel G_2)=1)=\frac{1}{P(\alpha(G_1\parallel G_2)=1)}\times$$

$$\times[P(\alpha(G_1)=1)P(\eta(G_1)=1|\alpha(G_1)=1)P(\alpha(G_2)=0)P(\eta(G_2)=2|\alpha(G_2)=0)+$$

$$+P(\alpha(G_1)=0)P(\eta(G_1)=2|\alpha(G_1)=0)P(\alpha(G_2)=1)P(\eta(G_2)=1|\alpha(G_2)=1)+$$

$$+P(\alpha(G_1)=1)P(\eta(G_1)=1|\alpha(G_1)=1)P(\alpha(G_2)=1)P(\eta(G_2)=1|\alpha(G_2)=1)].$$

Введем в рассмотрение $Q(G)=P(\eta(G)=1,\alpha(G)=1)$ – вероятность связности графа G и вспомогательную характеристику $S(G)=P(\eta(G)=2,\ \alpha(G)=0)$. Тогда из приведенных выше формул и равенств (8) получаем соотношения, позволяющие рекурсивно вычислять вероятности связности сетей из класса $\mathcal{A}:\ Q(w)=p_w,\ \ S(w)=1-p_w,\ \ w\in\mathcal{A}_1$, при $G_1,G_2\in\mathcal{A},\ W_1\bigcap W_2=\emptyset$,

$$Q(G_1\to G_2)=Q(G_1)Q(G_2),\ S(G_1\parallel G_2)=S(G_1)S(G_2),$$

$$S(G_1\to G_2)=Q(G_1)S(G_2)+S(G_1)Q(G_2),$$

$$Q(G_1\parallel G_2)=Q(G_1)S(G_2)+S(G_1)Q(G_2)+Q(G_1)Q(G_2).$$

Условные моменты числа компонент связности.

Наряду с рекурсивными формулами для определения производящих функций случайных величин $\eta(G)$ при условии $\alpha(G)=a,\ \ a=0,1$, можно аналогичным образом выписать рекурсивные формулы для вычисления условных моментов k-го порядка этих случайных величин:

$$M\left(\eta(G_1\to G_2)|\alpha(G_1\to G_2)=a\right)=\sum_{a_1,a_2:\,a_1\wedge a_2=a}\frac{P(\alpha(G_1)=a_1)P(\alpha(G_2)=a_2)}{P(\alpha(G_1\to G_2)=a)}\times$$

$$\times(A_1(a_1)+A_2(a_2)-1),$$

$$M\left(\eta(G_1\parallel G_2)|\alpha(G_1\parallel G_2)=a\right)=\sum_{a_1,a_2:\,a_1\vee a_2=a}\frac{P(\alpha(G_1)=a_1)P(\alpha(G_2)=a_2)}{P(\alpha(G_1\parallel G_2)=a)}\times$$

$$\times(A_1(a_1) + A_2(a_2) - 2 + a_1 \wedge a_2),$$

$$M\left(\eta^2(G_1 \to G_2)|\alpha(G_1 \to G_2) = a\right) = \sum_{a_1,a_2\colon\, a_1\wedge a_2 = a} \frac{P(\alpha(G_1) = a_1)P(\alpha(G_2) = a_2)}{P(\alpha(G_1 \to G_2) = a)} \times$$

$$\times(B_1(a_1) + B_2(a_2) + 1 + 2A_1(a_1)A_2(a_2) - 2A_1(a_1) - 2A_2(a_2)),$$

$$M\left(\eta^2(G_1 \parallel G_2)|\alpha(G_1 \parallel G_2) = a\right) = \sum_{a_1,a_2\colon\, a_1\vee a_2 = a} \frac{P(\alpha(G_1) = a_1)P(\alpha(G_2) = a_2)}{P(\alpha(G_1 \parallel G_2) = a)} \times$$

$$\times[B_1(a_1) + B_2(a_2) + 4 + 2A_1(a_1)A_2(a_2) - 4A_1(a_1) - 4A_2(a_2) + (2A_1(a_1) + 2A_2(a_2) - 3)a_1 \wedge a_2],$$

где

$$A_i(a_i) = M(\eta(G_i)|\alpha(G_i) = a_i),\ B_i(a_i) = M(\eta^2(G_i)|\alpha(G_i) = a_i).$$

В свою очередь, моменты k-го порядка случайной величины $\eta(G)$ вычисляются по формулам

$$M\eta^k(G) = \sum_{a=0,1} P(\alpha(G) = a)M(\eta^k(G)|\alpha(G) = a).$$

Замечание 1. *На основе выведенных в данном разделе рекурсивных формул была составлена компьютерная программа, позволяющая вычислять производящую функцию, моменты и распределение случайного числа компонент связности в параллельно-последовательных соединениях. Причем сложность этих вычислений является линейной по числу ребер параллельно-последовательного соединения.*

2. Соединения с идентичными ребрами

При большом числе ребер в соединении полученные в предыдущем параграфе результаты становятся громоздкими и поэтому возникает вопрос о предельных теоремах для параллельно-последовательных соединений. В этом случае естественно предположить, что все ребра имеют одинаковую вероятность работоспособности.

Предельные теоремы для числа компонент связности.

Введем в рассмотрение величину $m(G)$, равную числу параллельных соединений в графе G, тогда

$$m(w) = 0,\ w \in \mathcal{A}_1, \tag{13}$$

а для $G_1, G_2 \in \mathcal{A},\ W_1 \cap W_2 = \emptyset$,

$$m(G_1 \to G_2) = m(G_1) + m(G_2),\ m(G_1 \parallel G_2) = m(G_1) + m(G_2) + 1. \tag{14}$$

Предположим, что ребра графа $G \in \mathcal{A}$ работоспособны с одинаковыми вероятностями p, $0 < p < 1$, и определим $l(G)$ – случайное число отказавших ребер в случайной реализации графа G. Нетрудно получить

$$l(G_1 \to G_2) = l(G_1 \parallel G_2) = l(G_1) + l(G_2),\ G_1, G_2 \in \mathcal{A},\ W_1 \cap W_2 = \emptyset. \tag{15}$$

Лемма 1. *Для любой случайной реализации графа $G \in \mathcal{A}$ выполняются неравенства*

$$l(G) - 2m(G) + 1 \le \eta(G) \le l(G) + 1. \tag{16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из равенства (13) автоматически следует соотношение (16) для реализации ребра $w \in \mathcal{A}_1$. Предположим, что это соотношение выполняется для случайных реализаций графов $G_1, G_2 \in \mathcal{A},\ W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Тогда из равенств (3), (4), (14), (15)

$$\eta(G_1 \to G_2) = \eta(G_1) + \eta(G_2) - 1 \le l(G_1) + 1 + l(G_2) + 1 - 1 = l(G_1 \to G_2) + 1,$$

$$\eta(G_1 \parallel G_2) \le \eta(G_1) + \eta(G_2) - 1 \le l(G_1) + 1 + l(G_2) + 1 - 1 \le l(G_1 \parallel G_2) + 1,$$

$$\eta(G_1 \to G_2) = \eta(G_1) + \eta(G_2) - 1 \ge l(G_1) - 2m(G_1) + 1 + l(G_2) - 2m(G_2) + 1 - 1 \ge$$
$$\ge l(G_1 \to G_2) - 2m(G_1 \to G_2) + 1,$$

$$\eta(G_1 \parallel G_2) \ge \eta(G_1) + \eta(G_2) - 2 \ge l(G_1) - 2m(G_1) + 1 + l(G_2) - 2m(G_2) + 1 - 2 \ge$$
$$\ge l(G_1 \parallel G_2) - 2m(G_1 \parallel G_2) + 1.$$

Лемма доказана.

Случайную величину $l(G)$ можно представить в виде суммы $\sum_{i=1}^{n(G)} \eta_i$ независимых случайных величин $\eta_i,\ P(\eta_i = 1) = q,\ P(\eta_i = 0) = p,\ i = 1, ..., n(G)$, где $n(G)$ – число ребер в графе G.

Теорема 1. *Пусть $m(G)/n(G) \to 0,\ n(G) \to \infty$. Тогда справедлива сходимость по вероятности*

$$\frac{\eta(G)}{qn(G)} \xrightarrow{P} 1,\ n(G) \to \infty. \tag{17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Перепишем неравенство (16) в виде

$$\frac{l(G)}{n(G)} + \frac{1 - 2m(G)}{n(G)} \le \frac{\eta(G)}{n(G)} \le \frac{l(G)}{n(G)} + \frac{1}{n(G)}. \tag{18}$$

Из неравенств (18) и закона больших чисел [7, глава IV, § 3] следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Теорема 2. *При $m(G)/\sqrt{n(G)} \to 0$ и $n(G) \to \infty$ для любого вещественного t*

$$P\left(\frac{\eta(G) - qn(G)}{\sqrt{pqn(G)}} < t\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-x^2/2} dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Перепишем неравенство (16) в виде

$$\frac{l(G) - qn(G)}{\sqrt{pqn(G)}} + \frac{1 - 2m(G)}{\sqrt{pqn(G)}} \le \frac{\eta(G) - qn(G)}{\sqrt{pqn(G)}} \le \frac{l(G) - qn(G)}{\sqrt{pqn(G)}} + \frac{1}{\sqrt{pqn(G)}}. \tag{19}$$

Утверждение теоремы следует из неравенств (19) и интегральной теоремы Муавра – Лапласа [7, глава I, § 6]. Теорема доказана.

Графы с различной долей параллельных и последовательных соединений. Рассмотрим последовательность $A_n,\ n \ge 1$, двухполюсников, определенных рекуррентно с помощью параллельного или последовательного соединения нового ребра b_{n+1} к двухполюснику A_n. Пусть последовательности случайных величин $\{\omega_n,\ n = 1, \ldots\}$, $\{\beta_n,\ n = 1, \ldots\}$ независимы и каждая из них состоит из независимых и одинаково распределенных случайных величин. Случайные величины ω_n принимают значения " $\to$ ", "$||$" с вероятностями $\psi_{\to},\ \psi_{||},\ \psi_{\to} + \psi_{||} = 1$ соответственно и характеризуют способ присоединения к двухполюснику A_n нового ребра b_{n+1}, а случайные величины β_n определяют работоспособность ребра b_{n+1} и принимают значения 1 с вероятностью p (ребро b_{n+1} работоспособно) и значение 0 (ребро b_{n+1} неработоспособно) – с вероятностью $q,\ p + q = 1$.

Двухполюсники со случайными ребрами $A_n,\ n \ge 1$, характеризуются случайными величинами α_n, η_n, где α_n является индикатором связности концов A_n, а η_n – числом компонент связности в A_n. При этом случайная величина $\eta(A_1) = \eta_1$ не зависит от последовательностей $\{\omega_n,\ n = 1, \ldots\}$, $\{\beta_n,\ n = 1, \ldots\}$ и удовлетворяет равенствам $P(\eta_1 = 1) = p,\ P(\eta_1 = 2) = q$. В соответствии с формулами (3), (4) введем вспомогательные случайные величины

$$\eta(A_n \to a_{n+1}) = \overrightarrow{\eta}_{n+1} = \eta_n + (2 - \beta_n) - 1 = \eta_n + 1 - \beta_n,$$

$$\eta(A_n \parallel a_{n+1}) = \overline{\overline{\eta}}_{n+1} = \eta_n + (2-\beta_n) - 2 + \alpha_n\beta_n,$$

тогда $\eta_{n+1} = I(\omega_n =\rightarrow)\overrightarrow{\eta}_{n+1} + I(\omega_n =\|)\overline{\overline{\eta}}_{n+1} = \eta_n + (2-\beta_n) + I(\omega_n = ||)(-1+\alpha_n\beta_n)$. Обозначим $\Delta_{n+1} = \eta_{n+1} - \eta_n = 2 - \beta_n - 1 + I(\omega_n = ||)(-1+\alpha_n\beta_n)$ и рассмотрим эргодическую марковскую цепочку $\{(\alpha_n, \Delta_n),\ n > 1\}$ с конечным множеством состояний, удовлетворяющую рекуррентным соотношениям

$$\alpha_{n+1} = I(\omega_n =\rightarrow)(\alpha_n \wedge \beta_n) + I(\omega_n = ||)(\alpha_n \vee \beta_n),$$

$$\Delta_{n+1} = 1 - \beta_n + I(\omega_n = ||)(-1 + \alpha_n \wedge \beta_n);\ n \geq 1,$$

с заданным начальным условием $\alpha_1 = 2 - \eta_1$. Пусть

$$P = \lim_{n\to\infty} P(\alpha_n = 1) = \frac{\psi_{||}p}{\psi_{||}p + \psi_{\rightarrow}q},\ Q = 1 - P = \frac{\psi_{\rightarrow}q}{\psi_{||}p + \psi_{\rightarrow}q},$$

$$A = \lim_{n\to\infty} M\Delta_n = (2-p) - 1 + \psi_{||}(-1+pP) = q - \psi_{||} + \psi_{||}Pp =$$

$$= q + \psi_{||}\frac{\psi_{||}p^2 - \psi_{||}p - \psi_{\rightarrow}q}{\psi_{||}p + \psi_{\rightarrow}q} = \frac{\psi_{\rightarrow}^2 q^2}{\pi_{||}p + \psi_{\rightarrow}q} > 0.$$

Используя закон больших чисел для марковских цепей [3], [4, гл. 12, §4, Теорема 10], приходим к соотношению

$$\frac{\eta_{n+1}}{n} = \frac{\eta_1 + \sum_{k=2}^{n+1}\Delta_k}{n} \xrightarrow{P} A,\ n \to \infty. \tag{20}$$

Замечание 2. *Величина A характеризует зависимость числа компонент связности в последовательности графов A_n, $n \geq 1$, от параметров $\pi_{\rightarrow}, q$, где величина $\pi_{\rightarrow}$ определяет среднюю долю последовательных соединений.*

Замечание 3. *Центральная предельная теорема для марковской цепочки $\{(\alpha_n, \Delta_n),\ n > 1\}$ может быть получена, например, с помощью работ [4, гл. 12, §4, Теорема 10], [5], [6], а ее возможные обобщения – с использованием центральной предельной теоремы для мартингалов [7, гл. VII, §8, Теорема 1].*

Авторы благодарят рецензента за ценные замечания и предложения.

Список литературы

[1] R. E. Barlow, F. Proschan, *Mathematical Theory of Reliability*, Wiley, London and New York, 1965.

[2] Ю. К. Беляев, В. А. Богатырев, В. В. Болотин и др., *Надежность технических систем: Справочник*, ред. И. А. Ушаков, Радио и связь, Москва, 1985.

[3] М. Г. Шур О законах больших чисел для процессов Маркова, “Теория вероятностей и ее применения”, **VIII**:2, (1963), 224–228.

[4] А. А. Боровков, *Теория вероятностей*, Наука, Москва, 1986.

[5] С. В. Нагаев, “Некоторые предельные теоремы для однородных цепей Маркова”, *Теория вероятностей и ее применения*, **II**:4, (1957), 389–416.

[6] С. В. Нагаев, “Ивз. АН Уз ССР, серия физ.-мат.”, 1962, № 2, 12–20.

[7] А. Н. Ширяев, *Вероятность*, Наука, Москва, 1989.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 4 октября 2011 г.

Работа выполнена при поддержке грантов ДВО РАН № 09-III-А-01-010, № 09-I-П2-07.

Grenkin G.V., Markova N.V., Tsitsiashvili G.Sh. Properties of connectivity components in parallel-sequantial connections. Far Eastern Mathematical Journal. 2012. V. 12. № 1. P. 12–19.

ABSTRACT

In this paper recursive formulas for a calculation of generating functions, distributions and moments of random number of connectivity components in parallel-sequential graphs and their connectivity probabilities are obtained. For graphs with large number of arcs variants of the law of large numbers and the central limit theorem are formulated and proved.

Key words: *parallel-sequential connection, connectivity component.*