А. Л. Гладков, Н. Л. Слепченков, О правильных и целых решениях обобщенного уравнения Эмдена–Фаулера,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 2, 167–176

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 2, с. 167–176

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.5

О ПРАВИЛЬНЫХ И ЦЕЛЫХ РЕШЕНИЯХ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ЭМДЕНА–ФАУЛЕРА

© 2005 г. А. Л. Гладков, Н. Л. Слепченков

1. Введение. Будем рассматривать уравнение

$$u^{(n)}(r) = k(r)f(u), \quad n \geq 2, \tag{1.1}$$

где $r > 0$, $k(r)$ – неотрицательная локально интегрируемая по Лебегу функция, отличная от нуля на множестве положительной меры, $f(u)$ – положительная непрерывная функция, с областью определения $\operatorname{dom} f = \mathbf{R}_+$ или $\operatorname{dom} f = \mathbf{R}$. Здесь $\mathbf{R}_+ = (0, \infty)$. Под правильными решениями уравнения (1.1) будем понимать решения, бесконечно продолжимые вправо.

Для уравнения (1.1) изучается задача существования правильных решений, начальные данные которых удовлетворяют неравенствам

$$u^{(i)}(0) \geq 0, \quad 0 \leq i \leq n-1, \quad \sum_{i=0}^{n-1} u^{(i)}(0) > 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{dom} f = \mathbf{R}_+, \tag{1.2}$$

$$u^{(n-1)}(0) \geq 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{dom} f = \mathbf{R}. \tag{1.3}$$

В работе [1] показано, что для определенного класса функций $f(u)$ одним из основных условий существования правильных решений уравнения (1.1) является выполнение неравенства

$$\int\limits_0^\infty k(s) f(cs^{n-1})\, ds < \infty, \tag{1.4}$$

где c – некоторая положительная константа.

Уравнение (1.1) является обобщением известного уравнения Эмдена–Фаулера

$$u^{(n)} = p(t)|u|^\lambda \operatorname{sign} u, \quad t \geq 0, \quad \lambda > 1, \quad n \geq 2. \tag{1.5}$$

Уравнение (1.5) изучалось в ряде работ (см., например, обзорную статью [2] и приведенную в ней библиографию). В частности, в [3, теорема 16.9] доказано существование правильных решений уравнения (1.5) с локально интегрируемой по Лебегу функцией $p(t)$, удовлетворяющей неравенству

$$\int\limits_a^{+\infty} t^{\lambda(n-1)} |p(t)|\, dt < +\infty,$$

где a – некоторая положительная постоянная. В [4] получены некоторые достаточные условия отсутствия правильных решений уравнения (1.5) с кусочно-непрерывной функцией $p(t)$. В работе [5] для уравнения (1.5) с $n = 2$ установлено более общее, чем в [4], утверждение об отсутствии неограниченных правильных решений. В частности, из этого утверждения следует отсутствие неограниченных правильных решений уравнения (1.5) с функцией $p(t) = ct^{-\lambda-1} \ln^\gamma t$, $\gamma > -1$, $c > 0$.

В работе [6] для уравнения (1.5), где $p(t)$ – неотрицательная локально интегрируемая по Лебегу функция, отличная от нуля на множестве положительной меры в любой окрестности $+\infty$, изучалась проблема существования быстрорастущих решений, т.е. решений уравнения (1.5) с условиями

$$u^{(i)}(t) > 0 \quad (\text{или} \quad u^{(i)}(t) < 0), \quad 0 \leq i \leq n-1, \quad t \geq a, \quad \lim_{t\to+\infty} |u^{(n-1)}(t)| = +\infty. \tag{1.6}$$

В работе [6] получен ряд признаков отсутствия решений задачи (1.5), (1.6). В частности, доказано, что если коэффициент $p(t)$ удовлетворяет соотношениям

$$p(t) < ct^{-(n-1)\lambda-1}, \quad t > a, \quad \int\limits_a^{+\infty} p(\tau)\tau^{(n-1)\lambda}\, d\tau = +\infty \tag{1.7}$$

для некоторых $c > 0$ и $a > 0$, то задача (1.5), (1.6) не имеет решений.

Основной целью настоящей работы является вывод достаточных условий отсутствия правильных решений уравнения (1.1) с начальными данными (1.2) в случае $\operatorname{dom} f = \mathbf{R}_+$ и с начальными данными (1.3) в случае $\operatorname{dom} f = \mathbf{R}$.

2. Условия отсутствия правильных решений. Введем вспомогательную функцию

$$J_h(\beta) = \int\limits_\beta^{+\infty} \left(\int\limits_\beta^{v} (v-u)^{n-2} h(u)\, du \right)^{-1/n} dv, \quad \beta > 0.$$

Лемма 2.1. *Пусть для положительной непрерывной функции $h(u)$ выполняются условия*

$$h(u) \quad \textit{не убывает при} \quad u \geq u_0 \quad \textit{для достаточно большого} \quad u_0, \tag{2.1}$$

$$J_h(1) < +\infty. \tag{2.2}$$

Тогда функция $J_h(\beta)$ не возрастает при $\beta \geq \beta_0$ для достаточно большого $\beta_0 > 0$ и $\lim\limits_{\beta\to+\infty} J_h(\beta) = 0$.

Доказательство. Из условий (2.1), (2.2) следует, что

$$\lim_{u\to+\infty} h(u) = +\infty. \tag{2.3}$$

После преобразования $J_h(\beta)$ с помощью замены переменных интегрирования $u = y + \beta$ и $v = z + \beta$ получаем

$$J_h(\beta) = \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^{z} (z-y)^{n-2} h(y+\beta)\, dy \right)^{-1/n} dz.$$

Из этого представления и из (2.1) вытекает, что для достаточно большого β_0 функция $J_h(\beta)$ не возрастает при $\beta \geq \beta_0$.

Используя теорему Лебега и соотношение (2.3), получаем

$$\lim_{\beta\to\infty} J_h(\beta) = \int\limits_0^{\infty} \lim_{\beta\to\infty} \left(\int\limits_0^{z} (z-y)^{n-2} h(y+\beta)\, dy \right)^{-1/n} dz = 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Пусть $u(r)$ – решение уравнения (1.1) с начальными условиями (1.2) в случае $\operatorname{dom} f = \mathbf{R}_+$ или с начальными условиями (1.3) в случае $\operatorname{dom} f = \mathbf{R}$. Тогда найдется такая положительная константа a, что $u^{(i)}(r) > 0$, $0 \leq i \leq n-1$, $r > a$.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{dom} f = \mathbf{R}_+$. В силу условий (1.2) в некоторой правой полуокрестности нуля $u(r) > 0$. Покажем, что $u(r) > 0$ при любом $r > 0$.

Пусть это утверждение неверно, т.е. существует r_* такое, что $u(r) > 0$ при $0 < r < r_*$, а $u(r_*) = 0$. Проинтегрируем уравнение (1.1) последовательно n раз на отрезке $[0, r_*]$. Учитывая начальные данные (1.2), находим, что

$$u(r_*) = \sum_{p=0}^{n-1} u^{(p)}(0) \frac{r_*^p}{p!} + \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_0^{r_*} (r_* - s)^{n-1} k(s)\, f(u(s))\, ds > 0.$$

Полученное противоречие показывает, что $u(r) > 0$ при $r > 0$. Исходя из представления

$$u^{(i)}(r) = \sum_{p=0}^{n-1-i} u^{(p+i)}(0)\frac{r^p}{p!} + \frac{1}{(n-1-i)!}\int_0^r (r-s)^{n-i-1}k(s)\,f(u(s))\,ds, \quad 0 \le i \le n,$$

выводим, что $u^{(i)}(r) > 0$, $0 \le i \le n-1$, $r > a$ для некоторого значения a.

Пусть $\operatorname{dom} f = \mathbf{R}$. Проинтегрируем (1.1) по отрезку $[0, r]$, учитывая неравенство (1.3):

$$u^{(n-1)}(r) \ge \int_0^r k(s)f(u(s))\,ds.$$

Из этого соотношения вытекает существование положительных u_0 и R таких, что $u^{(n-1)}(r) > u_0$ при $r \ge R$. Повторяя процесс интегрирования по отрезку $[R, r]$, нетрудно убедиться в том, что выполнены неравенства

$$u^{(i)}(r) \ge \sum_{p=0}^{n-2-i} \frac{u^{(p+i)}(R)}{p!}(r-R)^p + \frac{u_0}{(n-1-i)!}(r-R)^{n-1-i}, \quad 0 \le i \le n-2.$$

Таким образом, найдется такое значение a, что $u^{(i)}(r) > 0$, $0 \le i \le n-1$, $r > a$. Лемма доказана.

В следующих двух утверждениях используются некоторые идеи из работы [7].

Теорема 2.1. *Пусть функции $k(r)$ и $f(u)$ удовлетворяют условиям*

$$f(uv) \ge C_f\bar f(u)\bar f(v) \quad \text{для всех достаточно больших} \quad u > 0 \quad \text{и} \quad v > 0, \tag{2.4}$$

$$\int_0^{+\infty} k(s)\,\bar f(cs^{n-1})\,ds = +\infty \quad \text{для всех} \quad c > 0, \tag{2.5}$$

$$k(r) \quad \text{не возрастает при} \quad r > R_0 \quad \text{для некоторого} \quad R_0, \tag{2.6}$$

$$\limsup_{r\to+\infty} k(r)r\bar f(b_0r^{n-1}) > 0 \tag{2.7}$$

с некоторыми положительными постоянными C_f, b_0 и с некоторой положительной непрерывной функцией $\bar f(u)$, удовлетворяющей условиям (2.1), (2.2). Тогда уравнение (1.1) не имеет правильных решений с начальными данными (1.2) в случае $\operatorname{dom} f = \mathbf{R}_+$ *и с начальными данными (1.3) в случае* $\operatorname{dom} f = \mathbf{R}$.

Доказательство. Из леммы 2.2 вытекает существование $c_1 > 0$ и $R_1^* > 0$ таких, что $u^{(n-1)}(R_1^*) > 2c_1$. Применяя процесс интегрирования и выбирая подходящее $R_1 > R_1^*$, нетрудно убедиться в том, что для $r > R_1$ выполнены неравенства

$$u^{(i)}(r) \ge \frac{c_1}{(n-1-i)!}r^{n-1-i} + \frac{1}{(n-1-i)!}\int_{R_1}^r (r-s)^{n-1-i}k(s)f(u(s))\,ds, \tag{2.8}$$

где $0 \le i \le n-1$. Отсюда следует, в частности, что $u(r) \to \infty$ при $r \to \infty$.

Покажем, что для достаточно больших r

$$u(r) \ge C_1r^{n-1}\int_{R_2}^{r/2} k(s)\bar f(C_2s^{n-1})\,ds, \tag{2.9}$$

где C_1, C_2 и R_2 – некоторые положительные константы. В силу выполнения для функции $f(u)$ условия (2.4) можно выбрать C_3 и $R_2 > R_1$ так, чтобы функция $f(u(r)) \ge$ $\ge C_f\bar f(C_3)\bar f(u(r)/C_3)$ и функция $\bar f(u(r)/C_3)$ не убывала по u при $u(r) > c_1R_2^{n-1}/(n-1)!$. Тогда из неравенств (2.8) при $r > 2R_2$ имеем

$$((n-1)!)u(r) \geq \int\limits_{R_2}^{r} (r-s)^{n-1} k(s) f(u(s))\, ds \geq \int\limits_{R_2}^{r/2} (r - r/2)^{n-1} k(s) f(u(s))\, ds \geq$$

$$\geq \frac{C_f \bar{f}(C_3)}{2^{n-1}} r^{n-1} \int\limits_{R_2}^{r/2} k(s) \bar{f}\left(\frac{c_1 s^{n-1}}{(n-1)! C_3}\right) ds.$$

Таким образом, при подходящем выборе C_1 и C_2 получаем неравенство (2.9).

Далее, возьмем $R > \max\{R_0, 2R_2\}$ и $r > R$. Проинтегрируем уравнение (1.1) по отрезку $[R, r]$, предварительно умножив его на $u'(r)$:

$$\int\limits_{R}^{r} u^{(n)}(s) u'(s)\, ds = \int\limits_{R}^{r} k(s) f(u(s)) u'(s)\, ds. \tag{2.10}$$

Преобразуем (2.10), воспользовавшись формулой интегрирования по частям, леммой 2.2 и свойством (2.6) функции $k(r)$:

$$u^{(n-1)}(r) u'(r) \geq k(r) \int\limits_{u(R)}^{u(r)} f(u)\, du.$$

После умножения последнего неравенства на $u'(r)$ и интегрирования по отрезку $[R, r]$ находим, что

$$u^{(n-2)}(r)(u'(r))^2 \geq k(r) \int\limits_{u(R)}^{u(r)} (u(r) - v) f(v)\, dv.$$

Повторяя этот процесс требуемое количество раз, получаем

$$\left(\int\limits_{u(R)}^{u(r)} (u(r) - v)^{n-2} f(v)\, dv \right)^{-1/n} u'(r) \geq ((n-2)!)^{-1/n} (k(r))^{1/n}.$$

Проинтегрируем последнее неравенство по отрезку $[R, r]$:

$$\int\limits_{u(R)}^{u(r)} \left(\int\limits_{u(R)}^{v} (v-u)^{n-2} f(u)\, du \right)^{-1/n} dv \geq ((n-2)!)^{-1/n} \int\limits_{R}^{r} (k(s))^{1/n}\, ds. \tag{2.11}$$

Положим $\gamma(R) \equiv u(R)/(b_0(2R)^{n-1})$. Из неравенства (2.9) и условия (2.5) следует, что $\gamma(R) \to \infty$ при $R \to +\infty$.

Для оценки сверху левой части неравенства (2.11) последовательно используем замену переменной $u = b_0(2R)^{n-1} y$, неравенство (2.4) и затем еще одну замену переменной $v = b_0(2R)^{n-1} z$. В результате приходим к неравенству

$$\int\limits_{u(R)}^{u(r)} \left(\int\limits_{u(R)}^{v} (v-u)^{n-2} f(u)\, du \right)^{-1/n} dv \leq$$

$$\leq \left(\frac{b_0(2R)^{n-1}}{C_f \bar{f}(b_0(2R)^{n-1})} \right)^{1/n} \int\limits_{\gamma(R)}^{+\infty} \left(\int\limits_{\gamma(R)}^{z} (z-y)^{n-2} \bar{f}(y)\, dy \right)^{-1/n} dz. \tag{2.12}$$

Полагая $r = 2R$, из неравенств (2.11), (2.12) с использованием свойства (2.6) получаем

$$J_{\bar{f}}(\gamma(R)) \geq C_4 (2R\, k(2R)\, \bar{f}(b_0(2R)^{n-1}))^{1/n},$$

где C_4 – некоторая положительная постоянная. Применяя неравенство (2.7), отсюда при подходящем выборе $R = R_j$, $R_j \to \infty$ при $j \to \infty$, выводим оценку $J_{\bar f}(\gamma(R)) \geq C_5 > 0$. Но из леммы 2.1 следует, что $J_{\bar f}(\gamma(R)) \to 0$ при $\gamma(R) \to \infty$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема 2.2. *Пусть функции $k(r)$ и $f(u)$ удовлетворяют условиям (2.4), (2.5) и соотношению*

$$k(r) \leq \frac{C_0}{r\bar f(c_0 r^{n-1})}, \quad r \geq R_0, \tag{2.13}$$

с некоторыми положительными постоянными C_0, c_0 и R_0 и с некоторой положительной непрерывной функцией $\bar f(u)$, удовлетворяющей условиям (2.1), (2.2). Тогда уравнение (1.1) не имеет правильных решений с начальными данными (1.2) в случае $\operatorname{dom} f = \mathbf{R}_+$ *и с начальными данными (1.3) в случае* $\operatorname{dom} f = \mathbf{R}$.

Доказательство. Пусть задача (1.1) имеет правильное решение с начальными условиями (1.2) в случае $\operatorname{dom} f = \mathbf{R}_+$ или с начальными условиями (1.3) в случае $\operatorname{dom} f = \mathbf{R}$. Из (2.5), (2.8) и (2.9) следует, что

$$u(r) \geq \bar c r^{n-1} + \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{R_1}^{r} (r-s)^{n-1} k(s) f(u(s))\,ds, \quad r \geq R_1, \quad \frac{u(r)}{r^{n-1}} \to +\infty \quad \text{при} \quad r \to +\infty,$$

где $\bar c = c_1/(n-1)!$. Далее, обозначим $v(r) = u(r)/(c_0 r^{n-1})$. Тогда с помощью (2.1), (2.4) получим

$$v(r) \geq c_2 + \frac{C_f}{c_0(n-1)!}\int\limits_{R_2}^{r} \left(1 - \frac{s}{r}\right)^{n-1} k(s)\bar f(c_0 s^{n-1})\bar f(v(s))\,ds, \tag{2.14}$$

где $c_2 = \bar c/c_0$, $r \geq R_2$, $R_2 \geq \max\{R_0, R_1\}$.

Построим при $r \geq R_0$ неотрицательную кусочно-непрерывную локально ограниченную функцию $k^*(r)$, непрерывную на любом интервале $(iR_0, (i+1)R_0)$, $i \in \mathbf{N}$. Кроме этого, функция $k^*(r)$ должна удовлетворять условиям

$$\int\limits_{R_0}^{\infty} k^*(s)\bar f(c_0 s^{n-1})\,ds = \infty, \tag{2.15}$$

$$\frac{C_f}{c_0(n-1)!}\int\limits_{R_0}^{r} \left(1 - \frac{s}{r}\right)^{n-1} |k^*(s) - k(s)|\bar f(c_0 s^{n-1})\bar f(v(s))\,ds < \frac{c_2}{2} \tag{2.16}$$

для всех $r > R_0$. Для удобства обозначим $f^*(r) \equiv \bar f(c_0 r^{n-1})\bar f(v(r))$.

Возьмем произвольные положительные δ и ε. Построим $k^*(s)$ сначала на $(R_0, 2R_0)$. По теореме Лузина для любого положительного $\delta_1 < \delta$ найдется непрерывная на $(R_0, 2R_0)$ функция $k^*(r)$, для которой выполняются неравенства (2.13) и $\mu(\{r \in (R_0, 2R_0) : k^*(r) \neq k(r)\}) < \delta_1$. Здесь и далее через $\mu(\Omega)$ обозначается лебегова мера множества Ω. Очевидно, что

$$\int\limits_{R_0}^{2R_0} |k^*(s) - k(s)| f^*(s)ds \leq C_0\delta_1 \max_{r\in[R_0,2R_0]} \bar f(v(r)) < \varepsilon$$

при подходящем выборе δ_1.

При аналогичном построении $k^*(r)$ на $(iR_0, (i+1)R_0)$, $i \in \mathbf{N}$, $i \geq 2$, добиваемся выполнения неравенств

$$\int\limits_{(iR_0,(i+1)R_0)} |k^*(s) - k(s)| f^*(s)\,ds < \varepsilon^i, \quad \mu(\{r \in (iR_0, (i+1)R_0) : \ k^*(r) \neq k(r)\}) < \delta^i,$$

из которых следует, что

$$\int_{R_0}^{\infty} |k^*(s) - k(s)| f^*(s)\, ds < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}, \quad \mu(\{r \geq R_0 : \ k^*(r) \neq k(r)\}) < \frac{\delta}{1-\delta}. \tag{2.17}$$

Таким образом, при подходящем значении ε выполняется неравенство (2.16). Так как функция $v(r) \geq c_2$ при $r \geq R_2$, то $\bar{f}(v(r)) \geq c_3 > 0$ при $r \geq R_2$. Из (2.17) получаем

$$\int_{R_2}^{\infty} |k^*(s) - k(s)| \bar{f}(c_0 s^{n-1})\, ds < \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)c_3},$$

и, следовательно, выполняется равенство (2.15).

Очевидно, что по $k^*(r)$ можно построить неотрицательную непрерывную при $r \geq R_2$ функцию $\bar{k}(r)$ с сохранением свойств (2.13), (2.15) и (2.16). Поэтому из (2.14) следует неравенство

$$v(r) \geq c_* + \frac{C_f}{c_0(n-1)!} \int_{R_2}^{r} \left(1 - \frac{s}{r}\right)^{n-1} \bar{k}(s) \bar{f}(c_0 s^{n-1}) \bar{f}(v(s))\, ds, \tag{2.18}$$

где $c_* = c_2/2$.

Так как $\bar{k}(r)$ является непрерывной функцией, то $\mathbf{A}(R,r) \equiv \{s \in (R,r) : \ \bar{k}(s) > 0\}$ и $\mathbf{A}(R,\infty) \equiv \{s \in (R,\infty) : \ \bar{k}(s) > 0\}$ суть множества, состоящие из объединения конечного или счетного числа непересекающихся интервалов. По множествам $\mathbf{A}(R,r) = \bigcup_i (a_i, b_i)$ и $\mathbf{A}(R,\infty) = \bigcup_i (\bar{a}_i, \bar{b}_i)$ определим вспомогательные множества $\mathbf{A}[R,r) = \bigcup_i [a_i, b_i)$ и $\mathbf{A}[R,\infty) = \bigcup_i [\bar{a}_i, \bar{b}_i)$.

Для $r \in \mathbf{A}[R_0,\infty)$ положим

$$h(r) = \int_{\mathbf{A}[R_0,r)} \bar{k}(s) \bar{f}(c_0 s^{n-1})\, ds. \tag{2.19}$$

Очевидно, что $h : \mathbf{A}[R_0,\infty) \to [0,\infty)$ является взаимно-однозначным отображением. Следовательно, существует обратная h функция g. Пусть $t = h(r)$, $\tau = h(s)$, $v(g(t)) = w(t)$. Тогда из (2.18) и (2.19) получим

$$w(t) \geq c_* + \frac{C_f}{c_0(n-1)!} \int_{\mathbf{A}[R_2,g(t))} \left(1 - \frac{s}{g(t)}\right)^{n-1} \bar{k}(s) \bar{f}(c_0 s^{n-1}) \bar{f}(v(s))\, ds =$$

$$= c_* + \frac{C_f}{c_0(n-1)!} \int_{h(R_2)}^{t} \left(1 - \frac{g(\tau)}{g(t)}\right)^{n-1} \bar{f}(w(\tau))\, d\tau. \tag{2.20}$$

Функция $h(r)/r$ является монотонно убывающей на множестве $\mathbf{A}[R_3,\infty)$ при достаточно большом значении $R_3 > R_2$. Действительно, определим вспомогательную функцию $h^*(r)$ следующим образом: $h^*(r) = \int_{R_0}^{r} \bar{k}(s) \bar{f}(c_0 s^{n-1})\, ds$. В силу (2.13), (2.15) и определения функции $h^*(r)$ имеем

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{h^*(r)}{r}\right) = \frac{1}{r^2}\left(r\bar{k}(r)\bar{f}(c_0 r^{n-1}) - \int_{R_0}^{r} \bar{k}(s)\bar{f}(c_0 s^{n-1})\, ds\right) < 0$$

для достаточно больших значений $r \geq R_3$, $R_3 \geq R_2$. Так как функция $h^*(r)/r$ убывает на множестве $[R_3,\infty)$, то и функция $h(r)/r$ убывает на множестве $\mathbf{A}[R_3,\infty)$.

Таким образом, для функции $g(t)$ справедливо неравенство $g(\tau)/g(t) \le \tau/t,\ \ t \ge \tau \ge h(R_3)$, в силу которого неравенство (2.20) примет вид

$$w(t) \ge c_* + \frac{C_f}{c_0(n-1)!} \int\limits_{h(R_3)}^{t} \left(1 - \frac{\tau}{t}\right)^{n-1} \bar{f}(w(\tau))\, d\tau. \tag{2.21}$$

Несложно видеть, что $w(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$.

Будем рассматривать неравенство (2.21) на отрезке $T \le t \le 2T,\ \ T > h(R_3)$. Тогда из (2.21) получим

$$w(t) \ge \beta + \frac{1}{c_0(2T)^{n-1}} \frac{C_f}{(n-1)!} \int\limits_{T}^{t} \Bigl(t - \tau\Bigr)^{n-1} \bar{f}(w(\tau))\, d\tau. \tag{2.22}$$

Здесь

$$\beta = c_* + \frac{1}{c_0(2T)^{n-1}} \frac{C_f}{(n-1)!} \int\limits_{h(R_3)}^{T} (t-\tau)^{n-1} \bar{f}(w(\tau))\, d\tau.$$

Очевидно, что $\beta \to \infty$ при $T \to \infty$.

Для того чтобы перейти к дифференциальному уравнению, введем функцию $z(t)$, которая удовлетворяет уравнению

$$z(t) = \frac{\beta}{2} + \frac{1}{c_0(2T)^{n-1}} \frac{C_f}{(n-1)!} \int\limits_{T}^{t} (t-\tau)^{n-1} \bar{f}(z(\tau))\, d\tau. \tag{2.23}$$

Покажем, что $w(t) > z(t)$ для всех $T \le t \le 2T$. Действительно, так как $w(T) \ge \beta > \beta/2 = z(T)$, то существует правая полуокрестность точки T такая, что в ней $w > z$. Пусть существует точка T_0 такая, что $w(t) > z(t),\ \ T \le t < T_0$,

$$w(T_0) = z(T_0). \tag{2.24}$$

Однако из соотношений (2.22) и (2.23) при достаточно больших значениях T имеем

$$w(T_0) - z(T_0) \ge \frac{\beta}{2} + \frac{1}{c_0(2T)^{n-1}} \frac{C_f}{(n-1)!} \int\limits_{T}^{T_0} (T_0 - \tau)^{n-1} (\bar{f}(w(\tau)) - \bar{f}(z(\tau)))\, d\tau \ge \frac{\beta}{2} > 0,$$

что противоречит равенству (2.24).

Из уравнения (2.23) для $z(t)$ находим

$$z^{(n)}(t) = \frac{C_f}{c_0(2T)^{n-1}} \bar{f}(z(t)), \quad z(T) = \frac{\beta}{2}, \quad z^{(i)}(T) = 0, \quad 1 \le i \le n-1.$$

Применяя рассуждения, подобные тем, которые использовались в теореме 2.1, получаем

$$J_{\bar{f}}(z(T)) \ge \left[\frac{C_f}{c_0(2T)^{n-1}(n-2)!}\right]^{1/n} \int\limits_{T}^{t} d\tau.$$

Полагая здесь $t = 2T$, приходим к неравенству $J_{\bar{f}}(z(T)) \ge C_6 T^{1/n}$, где положительная константа C_6 не зависит от T. Это противоречит произвольности T. Следовательно, начиная с некоторого T, функция $z(t)$ непродолжима, а значит, и $w(t)$ непродолжима. Полученное противоречие доказывает теорему.

Замечание 2.1. Отметим, что в случае $\bar{f}(u) = f(u) = u^\lambda$, $\lambda > 1$, из (2.13) получается неравенство (1.7). Следует отметить также, что при доказательстве теоремы 2.2 был использован метод, отличный от метода доказательства работы [6].

Следствие 2.1. *Пусть функции $k(r)$ и $f(u)$ удовлетворяют условиям (2.4)–(2.6) с некоторой положительной непрерывной функцией $\bar{f}(u)$, удовлетворяющей условиям (2.1), (2.2). Тогда уравнение (1.1) не имеет правильных решений с начальными данными (1.2) в случае* $\operatorname{dom} f = \mathbf{R}_+$ *и с начальными данными (1.3) в случае* $\operatorname{dom} f = \mathbf{R}$.

Доказательство. Следствие очевидно, так как выполнены условия теоремы 2.1 или теоремы 2.2.

Замечание 2.2. Для частного вида функции $f(u)$ можно очевидным образом получить широкий класс функций $k(r)$, при которых отсутствуют правильные решения уравнения (1.1) с соответствующими начальными данными. Пусть $g(u)$ – произвольная непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству $g(u) \geq b > 0$. Тогда, например, для $f(u) = u^\lambda g(u)$, $\lambda > 1$, при $k(r) \geq C_7/\{r^{\lambda(n-1)+1}(\ln r)(\ln\ln r)\ldots(\ln\ldots\ln r)\}$, $C_7 > 0$, $r \geq r_1 > 0$, уравнение (1.1) не имеет правильных решений с начальными данными (1.2) (см. также [2, 6]), а для $f(u) = g(u)\exp(\alpha u)$, $\alpha > 0$, при $k(r) \geq C_8/\exp(\beta r^\gamma)$, $C_8 > 0$, $\beta > 0$, $\gamma < n-1$, $r \geq r_2 > 0$, уравнение (1.1) не имеет правильных решений с начальными данными (1.3). Отметим также, что условия (2.1), (2.2), (2.4) выполнены для $f(u) = g(u)u\ln^{2\sigma}(u+1)$, $\sigma > n$, с $\bar{f}(u) = u\ln^\sigma(u+1)$.

3. Контрпример к необходимости условия (1.4). Условие (1.4) теоремы существования является достаточным, но без дополнительных ограничений не является необходимым для существования правильных решений задач (1.1), (1.2) и (1.1), (1.3). В работе [4] для $f(u) = u^\lambda$, $\lambda > 1$, приведен пример функции $k(r)$, обладающей свойством (2.5) и такой, что уравнение (1.1) имеет бесконечно много правильных решений с начальными данными (1.2). Аналогичный пример указан в [8] для случая $n = 2$.

Модифицировав метод работы [8], построим для некоторого класса функций $f(u)$ гладкую функцию $k(r)$, удовлетворяющую условию (2.5), с которой уравнение (1.1) будет иметь бесконечно много правильных решений с начальными данными (1.2). Кроме того, построенное нами решение будет также демонстрировать оптимальность дополнительного к (2.5) условия отсутствия правильных решений (2.13).

В этом пункте будем предполагать, что функция $f(u)$ удовлетворяет условиям

$$f(u) \quad \text{не убывает для достаточно больших значений} \quad u, \tag{3.1}$$

$$f(cu) \leq \varphi(c)f(u) \quad \text{для всех достаточно больших} \quad u > 0 \quad \text{и} \quad c > 0, \tag{3.2}$$

где $\varphi(c)$ – положительная непрерывная функция.

Будем считать, что $g(r)$ – произвольная положительная неубывающая непрерывная функция такая, что $g(r) \to \infty$ и $g(r)/r \to 0$ при $r \to \infty$.

Пусть $\{a_i\}_{i=1}^\infty$ и $\{r_i\}_{i=1}^\infty$ – последовательности, обладающие следующими свойствами:

$$a_1 = 2\alpha, \quad a_{i+1} = a_i + 2\varphi(a_i), \tag{3.3}$$

$$r_1 > \beta, \quad \left(1 - \frac{r_i}{\bar{r}_i}\right)^{n-1} \leq \frac{1}{2}\,\frac{a_i}{\varphi(a_i)}, \tag{3.4}$$

$$g(r_i) \geq 4(n-1)!, \quad \bar{r}_i < r_{i+1}, \tag{3.5}$$

где α и β – некоторые достаточно большие положительные постоянные, а $\bar{r}_i \equiv r_i + 4(n-1)!r_i[g(r_i)]^{-1}$, и через $k(r)$ обозначим гладкую функцию, удовлетворяющую соотношениям

$$0 \leq k(r) \leq \frac{g(r)}{rf(c_0 r^{n-1})} \quad \text{при} \quad r_i \leq r < \bar{r}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{3.6}$$

$$k(r) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq r < r_i \quad \text{и} \quad \bar{r}_i \leq r < r_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{3.7}$$

$$\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{r_i}^{r_{i+1}} k(s)f(c_0 s^{n-1})\,ds = 1, \quad i = 1,2,\ldots, \tag{3.8}$$

где c_0 – произвольная положительная постоянная.

Пусть $w(r)$ – кусочно-непрерывная функция, определяемая явной формулой

$$w(r) = \begin{cases} (1/2)a_1 & \text{при } 0 \le r < r_1, \\ a_i c_0 r^{n-1} & \text{при } r_i \le r < \bar r_i, \quad i = 1,2,\ldots, \\ (1/2)a_{i+1}c_0 r^{n-1} & \text{при } \bar r_i \le r < r_{i+1}, \quad i = 1,2,\ldots \end{cases} \tag{3.9}$$

Введем обозначение

$$Tu = \alpha + \frac{r^{n-1}}{(n-1)!}\int\limits_0^r \left(1 - \frac{s}{r}\right)^{n-1} k(s)f(u(s))\,ds. \tag{3.10}$$

Лемма 3.1. *Пусть функция $f(u)$ обладает свойствами (3.1), (3.2) и функция $u(r)$ удовлетворяет неравенствам*

$$\alpha \le u(r) \le w(r). \tag{3.11}$$

Тогда $Tu(r) \le w(r)$.

Доказательство. Пусть сначала $0 \le r \le r_1$. Вследствие (3.7), (3.9) и (3.10) $Tu(r) = \alpha \le w(r)$.

Предположим теперь, что $r_i \le r < \bar r_i$. Используя (3.1)–(3.10), находим

$$Tu = \frac{1}{2}a_1 + \frac{r^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{j=1}^{i-1}\int\limits_{r_j}^{\bar r_j}\left(1 - \frac{s}{r}\right)^{n-1} k(s)f(u(s))\,ds + \frac{r^{n-1}}{(n-1)!}\int\limits_{r_i}^{r}\left(1 - \frac{s}{r}\right)^{n-1} k(s)f(u(s))\,ds \le$$

$$\le \frac{1}{2}a_1 + r^{n-1}\sum_{j=1}^{i-1}\varphi(a_j) + \varphi(a_i)\frac{r^{n-1}}{(n-1)!}\left(1 - \frac{r_i}{\bar r_i}\right)^{n-1}\int\limits_{r_i}^{\bar r_i} k(s)f(c_0 s^{n-1})\,ds \le$$

$$\le \frac{1}{2}a_i r^{n-1} + \varphi(a_i)\left(1 - \frac{r_i}{\bar r_i}\right)^{n-1} r^{n-1} \le \frac{1}{2}a_i r^{n-1} + \varphi(a_i)\frac{1}{2}\frac{a_i}{\varphi(a_i)}r^{n-1} = a_i r^{n-1} = w(r).$$

При $\bar r_i \le r < r_{i+1}$ получим

$$Tu = \frac{1}{2}a_1 + \frac{r^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{j=1}^{i}\int\limits_{r_j}^{\bar r_j}\left(1 - \frac{s}{r}\right)^{n-1} k(s)f(u(s))\,ds \le \frac{1}{2}a_1 + r^{n-1}\sum_{j=1}^{i}\varphi(a_j) = \frac{1}{2}a_{i+1}r^{n-1} = w(r).$$

Лемма доказана.

С помощью теоремы Шаудера–Тихонова о неподвижной точке аналогично тому, как это сделано в работе [8], теперь несложно завершить доказательство следующей теоремы.

Теорема 3.1. *Пусть функция $f(u)$ удовлетворяет условиям (3.1), (3.2), $k(r)$ – гладкая функция, удовлетворяющая соотношениям (3.6)–(3.8). Тогда для функции $k(r)$ выполняется условие (2.5) и уравнение (1.1) имеет бесконечно много правильных положительных решений, удовлетворяющих неравенствам (1.2) и (3.11).*

Замечание 3.1. Построенный пример показывает оптимальность условия (2.13) для определенного класса функций $f(u)$. В частности, несложно проверить, что неравенства (3.1), (3.2) справедливы для $f(u) = u^\lambda$, $\lambda > 1$, например с $\varphi(c) = c^\lambda$. Таким образом, как следует из (3.6), условие (1.7) является оптимальным для отсутствия правильных решений задачи (1.5), (1.2).

4. Условия отсутствия целых решений. В этом пункте будем рассматривать целые решения уравнения (1.1) при $n = 2m$, $m \in \mathbf{N}$. Под целыми решениями уравнения (1.1) будем понимать функции, удовлетворяющие уравнению (1.1) в $\mathbf{R}$. Относительно функций $k(r)$, $r \in \mathbf{R}$, и $f(u)$ делаются те же предположения, что и во введении.

Определим среднюю для $u(r)$ функцию $\bar{u}(r) = (u(r)+u(-r))/2$, $r \geq 0$, и вспомогательную функцию $\bar{k}(r) = \min\{k(r), k(-r)\}$, $r \geq 0$.

С помощью определений средней и вогнутой функций несложно доказывается

Лемма 4.1. *Пусть*

$$f(u) \quad \textit{вогнута в области определения.} \tag{4.1}$$

Тогда если $u(x)$ *– целое решение уравнения (1.1), то его средняя функция* $\bar{u}(r)$ *удовлетворяет следующим соотношениям:* $\bar{u}^{(2m)}(r) \geq \bar{k}(r)f(\bar{u}(r))$, $\bar{u}^{(2i)}(0) = u^{(2i)}(0)$, $\bar{u}^{(2i+1)}(0) = 0$, $0 \leq i \leq m-1$.

С помощью лемм 2.1, 4.1 аналогично тому, как это сделано в теоремах 2.1, 2.2 и в следствии 2.1, выводим следующие результаты.

Теорема 4.1. *Пусть в уравнении (1.1)* $n = 2m$, $m \in \mathbf{N}$, *выполнены условия (2.4), (4.1) и*

$$\int\limits_0^{+\infty} \bar{k}(s)\bar{f}(cs^{n-1})\,ds = +\infty \quad \textit{для всех} \quad c > 0, \tag{4.2}$$

$\bar{k}(r) \leq C_0/(r\bar{f}(c_0 r^{n-1}))$, $r \geq R_0$, *с некоторыми положительными постоянными* C_0, c_0 *и* R_0 *и с некоторой положительной непрерывной функцией* $\bar{f}(u)$, *удовлетворяющей условиям (2.1), (2.2). Тогда уравнение (1.1) не имеет целых решений в случае* $\operatorname{dom} f = \mathbf{R}$ *и целых положительных решений в случае* $\operatorname{dom} f = \mathbf{R}_+$.

Теорема 4.2. *Пусть в уравнении (1.1)* $n = 2m$, $m \in \mathbf{N}$, $f(u)$ *обладает свойством (4.1),* $\bar{k}(r)$ *не возрастает при* $r > R_0$ *для некоторого* R_0, *и выполнены условия (2.4), (4.2) с некоторой положительной непрерывной функцией* $\bar{f}(u)$, *удовлетворяющей (2.1), (2.2). Тогда уравнение (1.1) не имеет целых решений в случае* $\operatorname{dom} f = \mathbf{R}$ *и целых положительных решений в случае* $\operatorname{dom} f = \mathbf{R}_+$.

Замечание 4.1. В работе [7] для уравнения (1.1) с $f(u) = \exp(2u)$ и $n = 2$ установлено отсутствие целых решений с функцией $\bar{k}(r)$, удовлетворяющей неравенству $\bar{k}(r) \geq C_9/r^\alpha$ при $r \geq r_3 > 0$ и некоторых положительных C_9 и α. Из теоремы 4.2, в частности, следует отсутствие целых решений для этого же уравнения с функцией $\bar{k}(r)$, удовлетворяющей неравенству $\bar{k}(r) \geq C_{10}/\exp(\beta r^\gamma)$, где $C_{10} > 0$, $\beta > 0$, $\gamma < 1$, $r \geq r_4 > 0$.

Замечание 4.2. Все результаты об отсутствии правильных и целых решений, полученные в теоремах 2.1, 2.2, 4.1, 4.2 и следствии 2.1, будут верны и для неравенства $u^{(n)}(r) \geq k(r)f(u)$, $n \geq 2$, где функции $k(r)$ и $f(u)$ обладают свойствами, требуемыми соответствующими утверждениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kiguradze I.T., Kvinikadze G.G.* // Ann. Mat. Pura Appl. 1982. V. 130. P. 67–87.
2. *Изобов Н.А., Рабцевич В.А.* // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 1999. Т. 2. С. 73–91.
3. *Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1990.
4. *Изобов Н.А.* // Мат. заметки. 1984. Т. 35. Вып. 6. С. 829–839.
5. *Изобов Н.А.* // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 3. С. 311–316.
6. *Рабцевич В.А.* // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 5. С. 678–683.
7. *Cheng K.-S., Lin J.-T.* // Trans. Amer. Math. Soc. 1987. V. 304. № 2. P. 639–668.
8. *Lin J.-T., Cheng K.-S.* // Chinese J. Math. 1987. V. 15. № 1. P. 43–59.

Витебский государственный университет

Поступила в редакцию
12.05.2004 г.