Н. Н. Субботина, Универсальные оптимальные стратегии в позиционных дифференциальных играх, *Дифференц. уравнения*, 1983, том 19, номер 11, 1890–1896

УДК 517.977

Н. Н. СУББОТИНА

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ОПТИМАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ В ПОЗИЦИОННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ

В теории позиционных дифференциальных игр известно, что для фиксированной начальной позиции существуют оптимальные стратегии игроков, образующие седловую точку. Этот факт имеет место, если принять систему определений дифференциальной игры из [1]. Чтобы построить универсальные стратегии, оптимальные для целой области начальных позиций, была предложена новая формализация [2]. Однако оставался открытым вопрос о существовании универсальных оптимальных стратегий в рамках формализации, предложенной в [1]. В настоящей работе построен пример, который дает отрицательный ответ на этот вопрос. В заключение статьи дано краткое обсуждение некоторых определений универсальных оптимальных стратегий.

1. Прежде чем перейти к рассмотрению упомянутого примера, приведем постановку исследуемого вопроса. Пусть динамика конфликтно-управляемой системы описывается уравнением

$$\dot{x}=f(t,\ x,\ u,\ v), \tag{1}$$

где $f(\cdot):(-\infty,\ \vartheta]\times R^n\times P\times Q\mapsto R^n$ — функция, удовлетворяющая стандартным требованиям, обеспечивающим существование, единственность и продолжимость вплоть до фиксированного момента окончания игры ϑ любого решения $x(\cdot)$ уравнения (1) с начальными данными $(t_0,\ x_0)\in(-\infty,\ \vartheta]\times R^n$. Множества P и Q — геометрические ограничения на управления первого и второго игроков — компакты в конечномерных пространствах R^p и R^q соответственно.

Плата в данной игре определяется соотношением

$$\gamma(x(\cdot))=\sigma(x(\vartheta)), \tag{2}$$

где $\sigma(\cdot):R^n\mapsto R$ — локально-липшицева функция. Первый игрок, выбирающий управление u, заинтересован в минимальном значении платы; второй игрок, выбирающий управление v, стремится максимизировать плату γ.

Предполагается также, что для любых $s\in R^n$, $x\in R^n$, $t\in(-\infty,\ \vartheta]$ выполняется условие седловой точки в маленькой игре:

$$\max_{v\in Q}\min_{u\in P}s^{\mathrm{T}}f(t,\ x,\ u,\ v)=\min_{u\in P}\max_{v\in Q}s^{\mathrm{T}}f(t,\ x,\ u,\ v). \tag{3}$$

Символ т означает транспонирование.

Согласно формализации из [1], позиционные стратегии U и V первого и второго игроков соответственно отождествляются с произвольными функциями $U:(-\infty,\ \vartheta]\times R^n\mapsto P$ и $V:(-\infty,\ \vartheta]\times R^n\mapsto Q$. Стратегии U и V порождают пучки движений $X(t_0,\ x_0,\ U)$ и $X(t_0,\ x_0,\ V)$, выходящих из начальной позиции $(t_0,\ x_0)$. Пучок $X(t_0,\ x_0,\ U)$ определяется как совокупность равномерных на $[t_0,\ \vartheta]$ пределов последовательностей аппроксимационных движений $x(\cdot,\ t_0,\ x_0^{(k)},\ U,\ v_k(\cdot),\ \Gamma_k)$. Здесь $\Gamma_k=\{\tau_0^{(k)}=t_0<\tau_1^{(k)}<\cdots<\tau_{m(k)+1}^{(k)}=\vartheta\}$, $\max\limits_i(\tau_{i+1}^{(k)}-\tau_i^{(k)})\to0$, $x_0^{(k)}\to x_0$, при $k\to\infty$; $v_k(\cdot):[t_0,\ \vartheta]\to Q$ — измеримые функции. Аппроксимационное движение $x(\cdot,\ t_0,\ x_*,\ U,\ v(\cdot),\ \Gamma)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{x}(t)=f(t,\ x(t),\ U(\tau_i,\ x(\tau_i)),\ v(t)),$$
$$\tau_i\leqslant t<\tau_{i+1},\quad i=0,\ 1,\ \ldots,\ m,\quad x(t_0)=x_*. \tag{4}$$

Аналогично определяется пучок движений $x(t_0,\ x_0,\ V)$.

Для дифференциальной игры (1)—(3) в рамках указанной формализации показано, что для каждой начальной позиции $(t_0, x_0) \in (-\infty, \vartheta] \times R^n$ существует пара оптимальных позиционных стратегий $U^0 = U^0_{(t_0, x_0)}$, $V^0 = V^0_{(t_0, x_0)}$, доставляющая ситуацию равновесия, т. е. пара стратегий U^0, V^0 обеспечивает выполнение равенства

$$\max_{x(\cdot) \in X(t_0, x_0, U^0)} \sigma(x(\vartheta)) = c^0(t_0, x_0) = \min_{x(\cdot) \in X(t_0, x_0, V^0)} \sigma(x(\vartheta)), \tag{5}$$

где число $c^0(t_0, x_0)$ есть значение цены игры в позиции (t_0, x_0).

Подчеркнем, что здесь утверждается существование для каждой начальной позиции $(t_0, x_0) \in (-\infty, \vartheta] \times R^n$, вообще говоря, своей оптимальной позиционной стратегии $U^0_{(t_0, x_0)} : (-\infty, \vartheta] \times R^n \mapsto P$.

Пусть G — некоторое множество в $(-\infty, \vartheta] \times R^n$. Введем определение стратегии, оптимальной для всех позиций из G.

Определение 1. Функцию $U^0 : (-\infty, \vartheta] \times R^n \mapsto P$ назовем универсальной оптимальной в G стратегией первого игрока, если для любой начальной позиции $(t_0, x_0) \in G$ и соответствующего пучка движений $X(t_0, x_0, U^0)$ выполняется (5).

Известны примеры дифференциальных игр (1), (2), для которых можно построить универсальную в $(-\infty, \vartheta] \times R^n$ оптимальную стратегию $U^0(t, x)$ первого игрока. Например, в тех случаях, когда функция цены игры $(t, x) \to c^0(t, x)$ является непрерывно-дифференцируемой всюду, позиционная стратегия $U^0(t, x)$, удовлетворяющая условию: $\min\limits_{u \in P} \max\limits_{v \in Q} r(t, x)^{\mathrm{T}} f(t, x, u, v) = \max\limits_{v \in Q} r(t, x)^{\mathrm{T}} f(t, x, U^0(t, x), v)$, где $r(t, x) = \operatorname{grad}_x c^0(t, x) = (\partial c^0(t, x)/\partial x_1, \ldots, \partial c^0(t, x)/\partial x_n)$, является универсальной оптимальной в $(-\infty, \vartheta] \times R^n$ стратегией первого игрока.

Оставался невыясненным вопрос: во всякой ли дифференциальной игре можно построить универсальную оптимальную в заданном множестве G позиционную стратегию первого игрока? Пример, приведенный ниже, дает отрицательный ответ на этот вопрос. Построение такого контрпримера базируется на следующем простом свойстве универсальной стратегии.

Утверждение 1. *Пусть G и D — некоторые открытые области из $(-\infty, \vartheta] \times R^n$, $G \supset D$, и пусть в дифференциальной игре (1)—(3) существует универсальная оптимальная в G позиционная стратегия $U^0(t, x)$. Пусть функция цены игры $(t, x) \mapsto c^0(t, x)$ непрерывно-дифференцируема в D. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует всюду плотное в D множество E_ε, в точках которого выполняется соотношение*

$$\max_{v \in Q} r(t, x)^{\mathrm{T}} f(t, x, U^0(t, x) v) - \min_{u \in P} \max_{v \in Q} r(t, x)^{\mathrm{T}} f(t, x, u, v) \leqslant \varepsilon, \tag{6}$$

где $r(t, x) = \operatorname{grad}_x c^0(t, x)$.

Доказательство проводится от противного. Предположим, что существуют точка $(t_*, x_*) \in D$, замкнутый евклидов шар $O_\eta(t_*, x_*)$ радиуса $\eta > 0$ с центром в точке (t_*, x_*) и число $\varepsilon_* > 0$ такие, что во всех точках $(t, x) \in O_\eta(t_*, x_*)$ имеет место

$$\max_{v \in Q} r(t; x)^{\mathrm{T}} f(t, x, U^0(t, x), v) > \min_{u \in P} \max_{v \in Q} r(t, x)^{\mathrm{T}} f(t, x, u, v) + \varepsilon_*, \tag{7}$$

т. е. $O_\eta(t_*, x_*) \cap E_{\varepsilon_*} = \varnothing$. Из условия $O_\eta(t_*, x_*) \subset D$ следует, что во всех точках $(t, x) \in O_\eta(t_*, x_*)$ выполняется уравнение Беллмана

$$\min_{u \in P} \max_{v \in Q} \left[\frac{\partial c^0(t, x)}{\partial t} + \operatorname{grad}_x c^0(t, x)^{\mathrm{T}} f(t, x, u, v) \right] = 0. \tag{8}$$

Из (7) и (8) выводим, что во всех точках $(t, x) \in O_\eta(t_*, x_*)$ справедливо

$$\max_{v \in Q} \left[\frac{\partial c^0(t, x)}{\partial t} + r(t, x)^{\mathrm{T}} f(t, x, U^0(t, x), v) \right] \geqslant \varepsilon_*. \tag{9}$$

Свойство (9) и гладкость функции $c^0(t, x)$ в $D\supset O_\eta(t_*, x_*)$ позволяют построить движение $x_*(\cdot)\in X(t_*, x_*, U^0)$ и указать момент $t^*\in(t_*, t_*+\eta)$ такие, что $(t, x_*(t))\in O_\eta(t_*, x_*)$ при всех $t\in[t_*, t^*]$ и справедлива оценка

$$c^0(t^*, x_*(t^*))>c^0(t_*, x_*). \tag{10}$$

Далее, используя оптимальность стратегии $U^0(t, x)$ для начальной позиции $(t^*, x^*=x_*(t^*))\in O_\eta(t_*, x_*)\subset G$, можно показать, что в пучке $X(t_*, x_*, U^0)$ существует такое движение $x_{**}(t) : x_{**}(t)=x_*(t)$ при $t_*\leqslant t\leqslant t^*$, $x_{**}(\cdot)\in X(t^*, x^*, U^0)$, для которого имеют место соотношения $\sigma(x_{**}(\vartheta))=c^0(t^*, x_*(t^*))>c^0(t_*, x_*)$, что противоречит оптимальности (5) стратегии $U^0(t, x)$ в точке $(t_*, x_*)\in G$. Тем самым утверждение 1 доказано.

2. Пример. Рассмотрим дифференциальную игру с «простыми движениями»

$$\dot{x}_1=u_1+v_1,\quad \dot{x}_2=u_2+v_2,\quad u=(u_1, u_2)^\mathrm{T}\in P,\quad v=(v_1, v_2)^\mathrm{T}\in Q, \tag{11}$$

где

$$P=Q=\{y=(y_1, y_2)^\mathrm{T}\in R^2 : (y_1^2+y_2^2)^{1/2}\leqslant 1\}, \tag{12}$$

а плата $\gamma(x(\cdot))=\sigma(x(\vartheta))$ имеет вид

$$\sigma(x)=x_2+|x_1|. \tag{13}$$

Очевидно, данная игра является игрой типа (1)—(3), и здесь можно установить следующее соотношение для цены игры $c^0(t, x)$:

$$c^0(t, x)=\sigma(x),\quad (t, x)\in(-\infty, \vartheta]\times R^2. \tag{14}$$

Определим открытую ограниченную область

$$G=\{(t, x) : t_{00}<t<\vartheta,\quad \|x\|<1+2(t-t_{00})\}, \tag{15}$$

где t_{00} — некоторое число из промежутка $(-\infty, \vartheta)$.

Утверждение 2. *В дифференциальной игре (11)—(13) не существует универсальной оптимальной в G позиционной стратегии первого игрока $U^0(t, x)$.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть существует универсальная оптимальная в G стратегия $U^0(t, x)$. В открытой области

$$D=G\setminus\{(t, x_1, x_2)\in(t_{00}, \vartheta)\times R^2 : x_1=0\} \tag{16}$$

функция $c^0(t, x)=x_2+|x_1|$ непрерывно дифференцируема. Согласно утверждению 1, для любого $\varepsilon>0$ существует всюду плотное в D множество E_ε, в точках которого будет выполнено соотношение

$$\begin{gathered} U^0(t, x)=-\operatorname{grad}_x\sigma(x)\,\|\operatorname{grad}_x\sigma(x)\|^{-1}+h(t, x),\\ \|h(t, x)\|\leqslant\xi(\varepsilon)\quad \xi(\varepsilon)\to 0 \text{ при } \varepsilon\to 0. \end{gathered} \tag{17}$$

Здесь

$$\frac{\operatorname{grad}_x\sigma(x)}{\|\operatorname{grad}_x\sigma(x)\|}=\begin{cases}(\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2)^\mathrm{T} & \text{при } x_1>0,\\ (-\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2)^\mathrm{T} & \text{при } x_1<0.\end{cases} \tag{18}$$

Заметим, что множество E_ε всюду плотно и в G.

Покажем, что для любой начальной позиции $(t^0, x^0)\in G$, удовлетворяющей неравенству

$$|x_1^0|<(1-\sqrt{2}/2)(\vartheta-t^0), \tag{19}$$

можно построить разбиение

$$\Gamma=\{\tau_0=t^0<\tau_1<\ldots<\tau_N<\tau_{N+1}=\vartheta\},\quad \Delta/2\leqslant\tau_{i+1}-\tau_i\leqslant\Delta,\quad i\in\overline{0, N}, \tag{20}$$

и кусочно-постоянное управление

$$v(t)=v(\tau_i)\in Q,\quad \tau_i\leqslant t<\tau_{i+1},\quad i\in\overline{0, N}, \tag{21}$$

такие, что для аппроксимационного движения $x(\cdot, t^0, x^0, U^0, v(\cdot), \Gamma)$ будет выполнено соотношение

$$\sigma(x(\vartheta)) \geqslant x_2^0 + (\vartheta - t^0)(1 - \sqrt{2}/2) - \alpha(\Delta), \tag{22}$$

где $\alpha(\Delta) \to 0$ при $\Delta \to 0$. Из (22) следует, что можно построить последовательность аппроксимационных движений $x_k(\cdot)$ $(k=1, 2, \dots)$, отвечающую последовательности чисел $\Delta_k \to +0$ при $k \to \infty$ так, чтобы, согласно (22), для предельного движения $x^*(\cdot)$ было выполнено неравенство

$$\sigma(x^*(\vartheta)) \geqslant x_2^0 + (\vartheta - t^0)(1 - \sqrt{2}/2). \tag{23}$$

Поскольку в рассматриваемом примере $c^0(t^0, x^0) = x_2^0 + |x_1^0|$, то из (19) и (23) будет следовать неравенство

$$\sigma(x^*(\vartheta)) > c^0(t^0, x^0), \tag{24}$$

которое противоречит, однако, оптимальности (5) стратегии U^0 в позиции (t^0, x^0). Таким образом, чтобы доказать утверждение 2, достаточно построить разбиение Γ и управление $v(\cdot)$, для которых соответствующее аппроксимационное движение удовлетворяет оценке (22).

Докажем сначала следующее положение, которым будем пользоваться в дальнейшем.

Пусть $\Delta \in (0, 1)$, $(t_*, x_*) \in G$, $t_* \leqslant \vartheta - \Delta$, $\|u_*\| \leqslant 1$, $v_\Delta = (0, 1-\Delta)^{\mathrm{T}}$. Полагаем

$$x(t, v^*) = x_* + (t - t_*)(u_* + v_\Delta + v^*),$$

$$S(t_*, x_*, u_*, \Delta) = \{(t, x(t, v^*)) : t_* + \Delta/2 \leqslant t \leqslant t_* + \Delta,\ \|v^*\| \leqslant \Delta\}. \tag{25}$$

Отметим, что $\|v_\Delta + v^*\| \leqslant 1$ при $\|v^*\| \leqslant \Delta$. Поскольку $(t_*, x_*) \in G$, то из (15) следует вложение $S(t_*, x_*, u_*, \Delta) \subset G$. Множество $S(t_*, x_*, u_*, \Delta)$ содержит внутренние точки, а множество E_ε всюду плотно в G, следовательно,

$$S(t_*, x_*, u_*, \Delta) \cap E_\varepsilon \neq \varnothing \tag{26}$$

при любом $\varepsilon > 0$, в частности, при $\varepsilon = \Delta$.

Итак, для любых $\Delta \in (0, 1)$, $(t_*, x_*) \in G$, $t_* \leqslant \vartheta - \Delta$, $u_* \in P$ существуют постоянное управление $v = v_\Delta + v^* \in Q$ и момент $t^* \in [t_* + \Delta/2, t_* + \Delta]$ такие, что движение системы $\dot{x}(t) = u_* + v_\Delta + v^*$ $(x(t_*) = x_*)$ будет удовлетворять условию $(t^*, x(t^*)) \in E_\Delta$.

Обратимся к построению разбиения Γ и управления $v(\cdot)$, для которых будет справедлива оценка (22). Пусть заданы точка $(t^0, x^0) \in G$ и число $\Delta \in (0, 1)$. Воспользуемся приведенным выше положением. Выберем момент времени $\tau_1 \in [t^0 + \Delta/2, t^0 + \Delta]$ и вектор $v(\tau_0) = v_\Delta + v^*(\tau_0)$ $(\|v(\tau_0)\| \leqslant \Delta)$ так, чтобы система $\dot{x}(t) = U^0(t^0, x^0) + v(\tau_0)$ $(x(t^0) = x^0)$ пришла в позицию $(\tau_1, x(\tau_1)) \in E_\Delta$.

Пусть определены моменты времени $\tau_1, \dots, \tau_i$ и управление $v(t) = v(\tau_j)$, $\tau_j \leqslant t < \tau_{j+1}$ $(j \in \overline{1, i-1})$. Предположим, что $\tau_i \leqslant \vartheta - \Delta$. Пусть $x(\tau_i)$ — состояние системы

$$\dot{x}(t) = U^0(\tau_j, x(\tau_j)) + v(\tau_j), \quad \tau_j \leqslant t < \tau_{j+1}, \quad j \in \overline{1, i-1}, \quad x(\tau_0) = x^0. \tag{27}$$

Отметим, что из включения $(t^0, x^0) \in G$ следует $(\tau_i, x(\tau_i)) \in G$ (см. (15)).

Выберем момент $\tau_{i+1} \in [\tau_i + \Delta/2, \tau_i + \Delta]$ и управление $v(\tau_i) = v_\Delta + v^*(\tau_i)$ $(\|v^*(\tau_i)\| \leqslant \Delta)$ так, чтобы система (27) при $\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}$ перешла из позиции $(\tau_i, x(\tau_i))$ в позицию $(\tau_{i+1}, x(\tau_{i+1})) \in E_\Delta$. Это опять возможно в силу сформулированного выше положения.

Указанное построение проводится вплоть до момента $\tau_i = \tau_N$, когда впервые $\tau_i \geqslant \vartheta - \Delta$. На последнем промежутке $[\tau_N, \vartheta]$ полагаем $\tau_{N+1} = \vartheta$, $v(\tau_N) = v_\Delta$.

Рассмотрим свойства построенного движения $x(\cdot)$. Отметим сначала, что

$$(\tau_i,\ x(\tau_i))\in E_\Delta \quad \text{при} \quad i\in\overline{1,\ N}. \tag{28}$$

Пусть $i\in\overline{1,\ N}$, $t\in[\tau_i,\ \tau_{i+1})$. Тогда из предыдущих построений и соотношений (17), (18) следует

$$x_1(t)=x_1(\tau_i)+(t-\tau_i)\,(U_1^0(\tau_i,\ x(\tau_i))+v_1(\tau_i))\leqslant$$

$$\leqslant x_1(\tau_i)+(t-\tau_i)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\xi(\Delta)+\Delta\right) \quad \text{при} \quad x_1(\tau_i)>0, \tag{29}$$

$$x_1(t)\geqslant x_1(\tau_i)+(t-\tau_i)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\xi(\Delta)-\Delta\right) \quad \text{при} \quad x_1(\tau_i)<0,$$

$$x_2(t)=x_2(\tau_i)+(t-\tau_i)\,(U_2^0(\tau_i,\ x(\tau_i))+v_2(\tau_i))\geqslant$$

$$\geqslant x_2(\tau_i)+(t-\tau_i)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\xi(\Delta)+1-\Delta+v_2^*(\tau_i)\right)\geqslant$$

$$\geqslant x_2(\tau_i)+(t-\tau_i)\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}-2\Delta-\xi(\Delta)\right). \tag{30}$$

Полагаем, что

$$\xi(\Delta)+\Delta<\sqrt{2}-1<1. \tag{31}$$

Предположим сначала, что $x_1(t)\neq 0$ при всех $t\in[\tau_1,\ \vartheta]$. Тогда из (19), (29), (31) следует $|x_1(\vartheta)|\leqslant|x_1(\tau_1)|-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\vartheta-\tau_1)\leqslant$ $\leqslant|x_1^0|+2\Delta-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\vartheta-\tau_1)<(3-\sqrt{2}/2)\Delta=\alpha_1(\Delta)$. Если же $x_1(t^*)=0$ при некотором $t^*\in[\tau_1,\ \vartheta]$, то из (29), (31) следует $|x_1(t)|\leqslant$ $\leqslant 2\Delta$ при всех $t\in[t^*,\ \vartheta]$. Итак,

$$|x_1(\vartheta)|\leqslant\alpha_1(\Delta)=(3-\sqrt{2}/2)\Delta. \tag{32}$$

Оценим теперь величину $x_2(\vartheta)$. Заметим, что $x_2(\tau_1)\geqslant x_2^0-2\Delta$. Суммируя оценку (30), получаем

$$x_2(\vartheta)\geqslant x_2(\tau_1)+(\vartheta-\tau_1)(1-\sqrt{2}/2)-(\vartheta-\tau_1)(\xi(\Delta)+2\Delta)\geqslant$$

$$\geqslant x_2^0+(\vartheta-t^0)(1-\sqrt{2}/2)-\alpha_2(\Delta), \tag{33}$$

где

$$\alpha_2(\Delta)=(1-\sqrt{2}/2)\Delta+2(\vartheta-t^0)(\xi(\Delta)+\Delta). \tag{34}$$

Из (13), (32), (33) следует

$$\sigma(x(\vartheta))\geqslant x_2^0+(\vartheta-t^0)(1-\sqrt{2}/2)-\alpha_1(\Delta)-\alpha_2(\Delta). \tag{35}$$

Итак, приходим к требуемой оценке (22), где, стало быть, $\alpha(\Delta)=$ $=\alpha_1(\Delta)+\alpha_2(\Delta)=(4-\sqrt{2})\Delta+2(\vartheta-t^0)(\xi(\Delta)+\Delta)$. Утверждение 2 доказано.

При обсуждении данной работы Н. Н. Красовский предложил другой пример дифференциальной игры: $\dot{x}_1=u_1+v_1$, $\dot{x}_2=u_2+x_1v_2$, $\sigma(x)=$ $=-x_2$, $|v_1|\leqslant 1$, $|v_2|\leqslant 1$, $|u_1|\leqslant 1-u_2$, $-1\leqslant u_2\leqslant 0$.

Здесь в отличие от приведенного выше примера плата является гладкой. Но функция цены игры так же, как и в предыдущем случае, оказывается кусочно-гладкой:

$$
c^0(t,\ x) = \begin{cases} -x_2+|x_1|(\vartheta-t) & \text{при } \vartheta-1\leqslant t\leqslant\vartheta, \\ -x_2+|x_1|+\dfrac{x_1^2}{2} & \text{при } t\leqslant\vartheta-1,\ |x_1|\leqslant\vartheta-1-t, \\ -x_2+|x_1|(\vartheta-t)-\dfrac{(\vartheta-1-t)^2}{2} & \text{при } t\leqslant\vartheta-1,\ |x_1|\geqslant\vartheta-1-t. \end{cases}
$$

Рассуждениями, аналогичными упомянутым выше, можно показать, что для некоторых ограниченных областей G отсутствует универсальная позиционная стратегия $U^0(t, x)$, оптимальная в G.

3. Приведенные примеры показывают, что надежда построить в дифференциальной игре универсальную оптимальную в заданном множестве G позиционную стратегию $U^0(t, x)$, оставаясь при этом в рамках системы определений дифференциальной игры из [1], не всегда оправдана. Решение вопроса о существовании универсальной оптимальной позиционной стратегии следует искать, модифицируя формализацию из [1].

Такая модификация содержится, например, в работе [2]. Здесь позиционной стратегией первого игрока называется функция $U=U(t, x; \varepsilon)$, которая позиции (t, x) и параметру $\varepsilon>0$ ставит в соответствие точку $U(t, x, \varepsilon)\in P$, а движение $x(\cdot)=x(\cdot, t_0, x_0, U)$ системы (1), порождаемое этой стратегией, определяется как двойной предел $\lim\limits_{\varepsilon_k\to+0}\ \lim\limits_{\Delta_k\to+0} x^{\varepsilon_k}_{\Delta_k}(\cdot)=$ $=x(\cdot)$ аппроксимационных движений $x^{\varepsilon_k}_{\Delta_k}(\cdot)$, отвечающих разбиениям $\Gamma=$ $=\{t_0=\tau_0^k<\tau_1^k<\ \dots\ \leqslant\vartheta\}$ с дискретом $\tau_{i+1}^k-\tau_i^k\leqslant\Delta_k\,(i=1,\ 2,\ \dots)$ и описываемых уравнением $\dot{x}^{\varepsilon_k}_{\Delta_k}(t)=f(t,\ x^{\varepsilon_k}_{\Delta_k}(t),\ U(\tau_i^k,\ x^{\varepsilon_k}_{\Delta_k}(\tau_i^k),\ \ \varepsilon_k),\ \ v_k(t))$, $\tau_i^k\leqslant t<\tau_{i+1}^k$, $v_k(\cdot):\ [t_0,\ \ \vartheta]\to Q$ — измеримая функция, $x^{\varepsilon_k}_{\Delta_k}(t_0)\to x_0$ при $k\to\infty$. В работе [2] показано, что при таком определении позиционных стратегий и движений в дифференциальной игре (1) — (3) существует универсальная стратегия $U^0(t, x, \varepsilon)$, оптимальная для всех точек заданной ограниченной области $G\subset[t_{00},\ \vartheta]\times R^n$.

Эта стратегия может быть определена, например, следующим образом.

Для позиции (t, x) вычислим величину $\varepsilon(t)=\varepsilon\exp(2\lambda(t-\vartheta))$, где λ — константа Липшица по x для функции $f(t, x, u, v)$ в области $G\times$ $\times P\times Q$. Затем построим в пространстве R^n евклидов шар $O_{\varepsilon(t)}(x)$ с центром в точке x радиуса $\varepsilon(t)$ и найдем точку w_*: $c^0(t, w_*)=$ $=\min\limits_{w\in O_{\varepsilon(t)}(x)} c^0(t, w)$. Значение $U^0(t, x, \varepsilon)$ определим из условия $\max\limits_{v\in Q} s^{\mathrm{T}}f(t,\ x,\ U^0(t,\ x,\ \varepsilon),\ v)=\min\limits_{u\in P}\max\limits_{v\in Q} s^{\mathrm{T}}f(t,\ x,\ u,\ v)$, где $s=x-w_*$.

Еще одну возможную модификацию определений позиционной дифференциальной игры подсказывает построение приведенного выше примера.

Определение 2. Позиционной стратегией первого игрока будем называть пару: функцию $(t, x)\mapsto U(t, x)\in P$ и отображение $\Delta\mapsto\Gamma(\Delta)$ $(\Delta\in(0, \Delta^*)\subset R)$. Отображение $\Delta\mapsto\Gamma(\Delta)$ ставит в соответствие положительному числу Δ некоторое разбиение $\Gamma(\Delta)=\{\tau_0=t_{00}<\tau_1<\dots$ $\dots<\tau_N<\tau_{N+1}=\vartheta\}$ с дискретом $\tau_{i+1}-\tau_i\leqslant\Delta$ $(i\in\overline{0,\ N})$.

Движение $x(\cdot)$, порождаемое позиционной стратегией, есть равномерный на $[t_0, \vartheta]$ предел аппроксимационных движений $x_{\Delta_k}(\cdot)=x(\cdot,$ $t_0,\ x_0^{(k)},\ U,\ v_k(\cdot),\ \Gamma(\Delta_k))$ (см. (4)), отвечающих, согласно определению этой стратегии, функции $U=U(t, x)$ и разбиениям $\Gamma(\Delta_k)$ (при $\Delta_k\to0$). (Здесь $v_k(\cdot)$: $[t_{00}, \vartheta]\times R^n\mapsto Q$ — измеримые функции, $k=1, 2, \dots$)

Используя определение 2, мы сужаем пучок движений, порождаемых функцией $U(t, x)$, по сравнению с пучком движений, построенных согласно формализации из [1]. Это обстоятельство позволяет доказать следующий результат.

Утверждение 3. *Для любой ограниченной области* $G\subset[t_{00}, \vartheta]\times\times R^n$ *в дифференциальной игре (1)—(3) существует универсальная, оптимальная в* G *позиционная стратегия* $(t, x)\mapsto U^0(t, x)$, $\Delta\mapsto\Gamma^0(\Delta)$.

Действительно, как показано в [2, 3], для любой ограниченной области G, задавшись произвольным числом $\varepsilon>0$, можно построить позиционную стратегию $U^0(t, x, \varepsilon)$, которая для любой начальной позиции $(t_0, x_0)\in G$ гарантирует первому игроку результат, не больший, чем $c^0(t_0, x_0)+\varepsilon$. При этом пучки движений определяются согласно [1]. Это означает, что в аппроксимационной схеме числу $\varepsilon>0$ можно поставить в соответствие $\Delta=\Delta(\varepsilon)>0$ такое, что для любой позиции $(t_0, x_0)\in G$ и для любого аппроксимационного движения $x_\Delta(\cdot)$ с дискретом не больше Δ справедливо

$$\sigma(x(\vartheta))\leqslant c^0(t_0, x_0)+2\varepsilon. \tag{36}$$

Зададимся последовательностью $\{\varepsilon_k\}\to+0$ при $k\to\infty$. Ей соответствует последовательность $\{\Delta_k=\Delta(\varepsilon_k)\}\to 0$ при $k\to\infty$. Построим отображение $\Delta\mapsto\Gamma^0(\Delta)$ следующим образом. Числу Δ поставим в соответствие $\Gamma^0(\Delta)=\Gamma^0(\Delta_k)=\{\tau_0^k=t_{00}<\tau_1^k<\ldots<\tau^k_{N^k+1}=\vartheta\}$ при $\Delta_k\leqslant\Delta<\Delta_{k-1}$. Позаботимся, чтобы выполнялось условие

$$\tau_i^k\notin\Gamma^0(\Delta_j),\quad i\in\overline{1, N^k}\ \text{при всех}\ j\neq k. \tag{37}$$

Определим теперь функцию $U^0(t, x)$ следующим образом:

$$U^0(\tau_i^k, x)=U^0(\tau_i^k, x, \varepsilon_k),\ \text{если}\ \tau_i^k\in\Gamma^0(\Delta_k),\ i\in\overline{1, N^k},\ k=1, 2, \ldots, \tag{38}$$

а в остальных точках (t, x) определяем $U^0(t, x)$ произвольным образом, $U^0=U^0(t, x)\in P$.

Согласно построению, для аппроксимационных движений $x_\Delta(\cdot)==x(\cdot, t_0, x_0^k, U^0, v_k(\cdot), \Gamma^0(\Delta))$ справедлива оценка (36). Отсюда вытекает, что для предельных движений построенная позиционная стратегия $(t, x)\mapsto U^0(t, x)$, $\Delta\mapsto\Gamma^0(\Delta)$ гарантирует оптимальный результат $c^0(t_0, x_0)$ из любой начальной позиции $(t_0, x_0)\in G$, т. е. стратегия $(t, x)\mapsto U^0(t, x)$, $\Delta\mapsto\Gamma^0(\Delta)$ является универсальной.

Как видно из доказательства утверждения 3, оно останется справедливым, если изменить определение 2 позиционной стратегии следующим образом: в паре с функцией $(t, x)\mapsto U(t, x)$ вместо отображения $\Delta\mapsto\Gamma(\Delta)$, $\Delta\in(0, \Delta^*)\subset R$, рассматривать некоторую последовательность разбиений $\Gamma(\Delta_k)=\{\tau_0^k=t_{00}<\tau_1^k<\ldots<\tau^k_{N^k+1}=\vartheta\}$ с дискретом τ_{i+1}^k-

$$-\tau_i^k\leqslant\Delta_k,\ i\in\overline{0, N},\ k=1, 2, \ldots,\ \{\Delta_k\}\xrightarrow[k\to\infty]{}0.$$

Литература

1. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры.— М.: Наука, 1974.
2. Красовский Н. Н.— Мат. сб., 1978, т. 107 (149), № 4, (12), с. 541—571.
3. Кононенко А. Ф. Математические методы анализа динамических систем с иерархической системой управления.— Дис. ... докт. физ.-мат. наук.— М., 1979.

Институт математики и механики УНЦ АН СССР

Поступила в редакцию 6 января 1981 г.