



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Маркус, В. И. Мацаев, О факторизации
слабо гиперболического пучка,
Функц. анализ и его прил., 1976, том 10, вы-
пуск 1, 81–82

<https://www.mathnet.ru/faa2136>

Использование Общероссийского математического портала
Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с
пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.91

29 апреля 2025 г., 12:12:48



О ФАКТОРИЗАЦИИ СЛАБО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ПУЧКА

[А. С. Маркус, В. И. Мацаев]

1. В последнее время появился ряд работ, в которых рассматривается задача об отщеплении от голоморфной оператор-функции $L(\lambda)$ линейного или полиномиального множителя, отвечающего некоторой замкнутой части σ ее спектра $\sigma(L)$. Почти все эти работы [1] — [6] посвящены случаю, когда σ — изолированная часть $\sigma(L)$. Основным аналитическим аппаратом в этом случае (см. [2] — [5]) являются теоремы Гохберга-Лайтера о факторизации оператор-функции, обратимой на некоторой замкнутой кривой. Если же σ не является изолированной частью $\sigma(L)$, то не существует замкнутой кривой, отделяющей σ от $\sigma(L) \setminus \sigma$, и поэтому указанные теоремы не могут быть применены.

В этой заметке предлагается новый метод спектральной факторизации голоморфной оператор-функции, основанный на изучении спектральных подпространств оператора сдвига в некоторых пространствах голоморфных вектор-функций. В качестве модельного объекта рассматривается слабо гиперболический пучок.

2. Пусть \mathfrak{H} — сепарабельное гильбертово пространство и $L(\mathfrak{H})$ — алгебра всех линейных ограниченных операторов, действующих в \mathfrak{H} .

Полиномиальный операторный пучок $L(\lambda) = \lambda^n I + \lambda^{n-1} A_{n-1} + \dots + A_0$ ($A_j \in L(\mathfrak{H})$) будем называть *слабо гиперболическим* *, если при любом $f \neq 0$ все корни полинома $(L(\lambda) f, f)$ вещественны. Очевидно, что тогда $A_j^* = A_j$ ($j = 0, 1, \dots, n-1$).

Обозначим через $p_1(f) \geq p_2(f) \geq \dots \geq p_n(f)$ корни полинома $(L(\lambda) f, f)$. Множество значений функционала $p_j(f)$ ($f \in \mathfrak{H} \setminus \{0\}$) называется j -й *спектральной зоной* пучка $L(\lambda)$ и обозначается через Δ_j . Очевидно, Δ_j — ограниченный промежуток на вещественной оси. Г. Лангер [7] установил, что спектральные зоны не перекрываются, т. е. $a_j \geq b_{j+1}$ ($j = 1, 2, \dots, n-1$), где $a_j = \inf \Delta_j$, $b_j = \sup \Delta_j$.

Основным результатом этой заметки является следующая

Т е о р е м а 1. Разобьем как-либо множество $J = \{1, 2, \dots, n\}$ на два подмножества: J_1 , содержащее k индексов ($1 \leq k < n$), и J_2 . Пучок $L(\lambda)$ допускает факторизацию $L(\lambda) = Q_{n-k}(\lambda) L_k(\lambda)$, где $Q_{n-k}(\lambda)$ ($L_k(\lambda)$) — пучок степени $n-k$ (k) со старшим коэффициентом I , причем $\sigma(Q_{n-k}) \subset \bigcup_{j \in J_2} \bar{\Delta}_j$, $\sigma(L_k) \subset \bigcup_{j \in J_1} \bar{\Delta}_j$.

Отметим, что Г. Лангер, пользуясь результатами теории операторов в пространствах с индефинитной метрикой, доказал теорему 1 для двух частных случаев: когда $k = 1$ (см. [8]) и когда одно из множеств J_1, J_2 состоит из четных индексов, а другое — из нечетных (см. [9]). В приведенной общей формулировке теорема 1 является, по-видимому, новой и в случае, когда $\bar{\Delta}_i \cap \bar{\Delta}_j = \emptyset$ ($i \in J_1, j \in J_2$), хотя в этом случае ее можно доказать методами, применявшимися в [2] — [5].

3. Укажем некоторые этапы доказательства теоремы 1. Без ограничения общности можно считать, что $\sigma(L) \subset \{|\lambda| < 1\}$ и что ни одна зона Δ_j не вырождается в точку.

Через G обозначим подпространство пространства $H_+^2(\mathfrak{H})$, состоящее из тех вектор-функций $f(\lambda)$, для которых $L(\lambda) f(\lambda) \in H_+^2(\mathfrak{H})$, и через V — оператор из $L(G)$, определенный равенством $(Vf)(\lambda) = \lambda f(\lambda) - \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\lambda f(\lambda))$. Легко видеть, что $\sigma(V) = \sigma(L)$ и $\|(V - \lambda I)^{-1}\| \leq C \|\lambda^{-1}\|$ ($\lambda \notin \sigma(L)$). Отсюда вытекает, что $\|(V - \lambda I)^{-1}\| \leq C_1 |\operatorname{Im} \lambda|^{-2}$, и поэтому к оператору V применима теория двойственности спектральных подпространств, развитая Бишопом [10] (см. также [11]).

Пусть $A \in L(\mathfrak{H})$ и $F \subset \mathbb{C}$ — компакт. Через $M(F, A)$ обозначается замыкание множества всех $h \in \mathfrak{H}$, для которых существует вектор-функция $h(\lambda)$ со значениями в \mathfrak{H} , голоморфная вне F и такая, что $(A - \lambda I) h(\lambda) = h$ ($\lambda \notin F$).

Разобьем множество J на три подмножества N_1, N_2 и N_3 следующим образом: $j \in N_1$, если $j-1$ и $j \in J_1$; $j \in N_2$, если $j-1$ и $j \in J_2$ или если $j=1$ и $1 \in J_2$. Выберем λ_j ($j = 1, 2, \dots, n$) так, чтобы $\lambda_j \geq b_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$), $\lambda_{j+1} \leq a_j$ ($j = 1, 2, \dots, n-1$), и положим

$$q(\lambda) = \prod_{j \in N_3} (\lambda - \lambda_j), \quad r(\lambda) = - \prod_{j \in N_1} (\lambda - \lambda_j) \prod_{i \in N_2} (\lambda - \lambda_i)^{-1}, \quad F = \bigcup_{j \in J_1} \bar{\Delta}_j, \quad M = M(F, V), \quad M_1 = \overline{q(V)M}.$$

* По терминологии Г. Лангера, $L(\lambda)$ — пучок с чисто вещественными нулями.

Л е м м а 1. Для любой вектор-функции $f \in M_1$ главная часть $\Phi(\lambda)$ функции $r(\lambda)$ ($L(\lambda)f(\lambda)$, $f(\lambda)$) является неванлинновской, т. е. $\text{Im } \Phi(\lambda) \geq 0$ при $\text{Im } \lambda \geq 0$.

Эта лемма доказывается на основании [5].

Обозначим через $S: M \rightarrow \mathfrak{H}^k$ оператор, определенный равенством $S \left(\sum_{i=1}^{\infty} f_j \lambda^{-j} \right) = (f_1, \dots, f_k)$.

Л е м м а 2. Существует подпространство M_2 ($M_1 \subset M_2 \subset M$) такое, что $S|_{M_2}$ является изоморфизмом M_2 на \mathfrak{H}^k и что $\forall M_2 \subset M_2$.

Обозначим через M_0 подпространство M_2 , состоящее из функций $f(\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j \lambda^j$, для которых $f_1 = \dots = f_{k-1} = 0$, и через $S_k: M_0 \rightarrow \mathfrak{H}$ — оператор, определенный равенством $S_k f = f_k$. Из леммы 2 следует, что S_k изоморфно отображает M_0 на \mathfrak{H} . Для каждого $h \in \mathfrak{H}$ положим $C(\lambda)h = (S_k^{-1}h)(\lambda)$.

Л е м м а 3. $C(\lambda)$ — голоморфная и обратимая в $\mathbb{C} \setminus F$ оператор-функция, причем $C^{-1}(\lambda)$ — полиномиальный пучок степени k со старшим коэффициентом I .

Положим $Q_{n-k}(\lambda) = L(\lambda)C(\lambda)$. Без труда доказывается, что $Q_{n-k}(\lambda)$ — полиномиальный пучок степени $n-k$ со старшим коэффициентом I , и для окончания доказательства теоремы 1 остается показать, что $Q_{n-k}(\lambda)$ обратим при $\lambda \notin \mathbb{C} \setminus F$.

4. Следствие 1. Пусть $L(\lambda)$ — слабо гиперболический пучок и множество индексов $J = \{1, 2, \dots, n\}$ разбито произвольным образом на некоторые подмножества J_1, J_2, \dots, J_m , причем J_k содержит n_k индексов. Если $F_k = \bigcup_{j \in J_k} \bar{\Delta}_j$ и $F_k \cap F_{k+2} = \emptyset$ ($k = 1, 2, \dots, m-2$), то $L(\lambda) = L_1(\lambda)L_2(\lambda) \dots L_m(\lambda)$, где $L_k(\lambda)$ — полиномиальный пучок степени n_k со старшим коэффициентом I и $\sigma(L_k) \subset F_k$ ($k = 1, 2, \dots, m$).

Отсюда, в частности, вытекает

С л е д с т в и е 2. Слабо гиперболический пучок $L(\lambda)$ разлагается на линейные множители: $L(\lambda) = (\lambda I - Y_1)(\lambda I - Y_2) \dots (\lambda I - Y_n)$, где $\sigma(Y_j) \subset \bar{\Delta}_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$).

С л е д с т в и е 3. Если в условиях теоремы 1 $\bar{\Delta}_j \cap \bar{\Delta}_i = \emptyset$ ($j \in J_1, i \in J, i \neq j$), то система собственных векторов $L(\lambda)$, отвечающих собственным значениям из $\bigcup_{j \in J_1} \bar{\Delta}_j$,

k -кратно полна в \mathfrak{H} тогда и только тогда, когда полна в \mathfrak{H} система собственных векторов $L(\lambda)$, отвечающих собственным значениям из $\bar{\Delta}_j$, при каждом $j \in J_1$. Если указанная система k -кратно полна, то k -кратные разложения по ней безусловно сходятся.

При некоторых дополнительных ограничениях следствия 2, 3 установлены в [12].

Авторы благодарны Г. Лангеру за ценное обсуждение результатов.

Институт математики с ВЦ АН МССР
Отделение Института
химической физики АН СССР

Поступило в редакцию
4 мая 1975 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. L a n g e r H., Acta sci. math. Szeged 35 (1973), 73—86.
2. М а р к у с А. С., М а ц а е в В. И., Р у с с у Г. И., Acta sci. math. Szeged 34 (1973), 245—271.
3. В и р о з у б А. И., М а ц а е в В. И., Функц. анализ 8, вып. 1 (1974), 1—10.
4. М а р к у с А. С., М а ц а е в В. И., Функц. анализ 9, вып. 1 (1975), 76—77.
5. М а р к у с А. С., М а ц а е в В. И., Матем. исслед. 9, вып. 4 (1974), 79—91.
6. L a n g e r H., Math. Nachr. 65 (1975), 301—319.
7. L a n g e r H., J. Funct. Anal. 12, № 1 (1973), 13—29.
8. L a n g e r H., J. Funct. Anal. 16, № 2, (1974), 221—234.
9. L a n g e r H., Acta sci. math. Szeged 38 (1976).
10. В и ш о р Е., Pacific J. Math. 9, № 2 (1959), 379—397.
11. Л о м о н о с о в В. И., Л ю б и ч Ю. И., М а ц а е в В. И., ДАН СССР 216, № 4 (1974), 737—739.
12. К а б а к В. И., М а р к у с А. С., УМН XXX, вып. 4 (1975), 245—246.