

УДК 512.542

Однопорожденные композиционные формации

© 2001 г. А. Б. Еловигов

В работе описывается класс факторизуемых однопорожденных композиционных формаций через установление необходимых и достаточных условий факторизации. Рассматриваются только конечные группы.

Однопорожденные формации конечных групп были введены в рассмотрение основателем теории формаций В. Гашюцем. Исследованию факторизуемых однопорожденных локальных формаций посвящен ряд работ (см., например, [1–3]). А. Н. Скиба в книге [4] описал все возможные факторизации однопорожденных локальных формаций, там же был поставлен вопрос: можно ли описать все возможные несократимые факторизации однопорожденных композиционных формаций? (см. [4], вопрос 3.5.21).

В настоящей работе описывается обширный класс факторизуемых однопорожденных композиционных формаций через установление необходимых и достаточных условий факторизации. Основные результаты статьи анонсированы в [10]. Рассматриваются только конечные группы. Все необходимые определения и обозначения можно найти в [4–6]. Приведем только некоторые из них. Через $G = [A]B$ обозначают полупрямое произведение групп A и B , где A нормальна в G ; $CF(f)$ — композиционная формация, определяемая композиционным спутником f . С целью компактного изложения материала композиционные формации (n -кратно композиционные формации) коротко будем называть c -формациями (c_n -формациями), а композиционные спутники (n -кратно композиционные спутники) c -спутниками (c_n -спутниками). Через \mathfrak{G} , \mathfrak{J} , \mathfrak{S} обозначают соответственно класс всех конечных групп, класс всех конечных простых групп, класс всех конечных разрешимых групп.

Перейдем к изложению полученных результатов.

Лемма 1. Пусть $A \in \mathfrak{G}$, тогда в формации $\text{sform } A$ содержится лишь конечное множество наследственных c -формаций.

Доказательство. Обозначим θ полную решетку всех наследственных формаций. Пусть $\mathfrak{M} = \theta^c \text{form } A$ — пересечение всех c -формаций, содержащих A и имеющих хотя бы один θ -значный спутник. Очевидно, что $\text{sform } A \subseteq \mathfrak{M}$. Покажем, что в \mathfrak{M} содержится лишь конечное число наследственных c -формаций.

Пусть \mathfrak{F} — произвольная наследственная c -формация такая, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$. По следствию 1.2 из [7] $\mathfrak{F} \in \theta^c$. Пусть f и m — минимальные наследственные c -спутники

формаций \mathfrak{F} и \mathfrak{M} , соответственно, тогда по следствию 2.1 из [7] $f \leq m$. По лемме 6 из [8]

$$m(B) = \theta \operatorname{form}(A/F_B(A)),$$

где $B \in K(A)$. Следовательно, по лемме 8.8 из [5] существует лишь конечное множество наследственных c -спутников t , меньших m . Значит, в \mathfrak{M} , а тем более в $\operatorname{sform} A$, существует лишь конечное множество наследственных c -подформаций.

Лемма доказана.

Лемма 2. Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, где \mathfrak{F} и \mathfrak{M} — неединичные c -формации, а \mathfrak{H} — такая формация, что

$$K(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{A} \not\subseteq K(\mathfrak{M}) \cap \mathfrak{A} \neq \emptyset,$$

то множество наследственных c -подформаций формации \mathfrak{F} бесконечно.

Доказательство. Пусть $Z_p \in K(\mathfrak{H}) \setminus K(\mathfrak{M})$. Ясно, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Значит $Z_p \in K(\mathfrak{F})$. Формация \mathfrak{F} композиционна. Следовательно, $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$. Легко показать, что $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $Z_q \in K(\mathfrak{M})$. Тогда $q \neq p$ и $\mathfrak{N}_q \subseteq \mathfrak{M}$. Для всякого натурального числа n зафиксируем некоторую циклическую группу P_n порядка p^n . Пусть $Q_n = Z_q \wr P_n$ — регулярное сплетение. Обозначим через \mathfrak{F}_n композиционную формацию, порожденную группой Q_n . Группа Q_n является расширением q -группы с помощью p -группы. Следовательно,

$$Q_n \in \mathfrak{N}_q \mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{M}\mathfrak{H} = \mathfrak{F}.$$

Поэтому $\mathfrak{F}_n \subseteq \mathfrak{F}$. Поскольку группа Q_n метанильпотентна, то $\mathfrak{F}_n \subseteq \mathfrak{N}^2$. Хорошо известно, что каждая разрешимая c -формация является локальной формацией. Значит, ввиду леммы 8.10 из [5] все c -подформации формации \mathfrak{N}^2 наследственны. Тогда \mathfrak{F}_n — наследственная c -формация в \mathfrak{F} .

При доказательстве леммы 8.13 в [5] было показано, что если n и m — различные натуральные числа, то $\mathfrak{F}_n \neq \mathfrak{F}_m$. Итак, в \mathfrak{F} содержится бесконечное множество наследственных c -подформаций $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots$

Лемма доказана.

Используя методы, разработанные в [5] (теорема 7.10) и [8] (теорема 1), несложно показать, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. Пусть $\mathfrak{M} = CF(m)$, причем $\mathfrak{N}_\pi(\mathfrak{M}) \subseteq \mathfrak{M}$, \mathfrak{H} — такая непустая формация, что $\mathfrak{N}_q \mathfrak{H} = \mathfrak{H}$ для любого простого числа q такого, что $Z_q \in (K(\mathfrak{H}) \setminus K(\mathfrak{M}))$ (это условие, в частности, выполняется, если $K(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{A} \subseteq K(\mathfrak{M}) \cap \mathfrak{A}$). Тогда формация $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ имеет такой c -спутник f , что $f(A) = m(A)\mathfrak{H}$ для всех $A \in K(\mathfrak{M})$, $f(A) = \mathfrak{H}$, если $A \in K(\mathfrak{H}) \setminus K(\mathfrak{M})$ и $f(A) = \emptyset$ для любого $A \in \mathfrak{J} \setminus K(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$.

Замечание 1. Лемма 3 дополняет теоремы 7.9 и 7.10 из [5].

Лемма 4. Пусть $A \in \mathfrak{G}$ и \mathfrak{F} — формация, содержащая лишь конечное число попарно неизоморфных формационно критических групп. Тогда если $A^{\mathfrak{F}}$ не имеет фраттиниевых A -главных факторов, то в формации $\mathfrak{M} = c_n \operatorname{form} A$ имеется лишь конечное число n -кратно композиционных подформаций.

Доказательство. Проведем индукцию по n . Пусть $n = 0$. Тогда $\mathfrak{M} = \operatorname{form} A$. По теореме 3.44 из [5] \mathfrak{M} имеет лишь конечное множество подформаций.

Пусть теперь $n > 0$ и лемма верна для $n - 1$. Обозначим через t минимальный $c_{(n-1)}$ -спутник формации \mathfrak{M} . По лемме 6 из [8]

$$t(B) = c_{(n-1)} \text{form}(A/F_B(A))$$

для любого $B \in K(A)$ и $t(B) = \emptyset$ для всех $B \in \mathcal{J} \setminus K(A)$. Ввиду теоремы 3.36 из [5] \mathfrak{F} -корадикал группы $A/F_B(A)$ не содержит фраттиниевых $(A/F_B(A))$ -главных факторов. Значит, по индукции в формации $c_{(n-1)} \text{form}(A/F_B(A))$ имеется лишь конечное множество $(n - 1)$ -кратно композиционных подформаций. Применяя теперь следствие 5 из [8], заключаем, что в формации \mathfrak{M} содержится лишь конечное множество n -кратно композиционных подформаций. Лемма доказана.

Из теоремы 3.49 в [5] и леммы 4 вытекает следующее утверждение.

Лемма 5. Пусть A — конечная группа. Тогда если \mathfrak{S} -корадикал $A^{\mathfrak{S}}$ группы A не имеет фраттиниевых A -главных факторов, то в формации $c_n \text{form } A$ имеется лишь конечное множество c_n -подформаций.

Лемма 6. Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{H} — формации и $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, причем по крайней мере одна из формаций \mathfrak{F} , \mathfrak{H} разрешима. Если \mathfrak{F} является c_n -формацией, то в ней содержится минимальная n -кратно композиционная не \mathfrak{H} -формация.

Доказательство. Утверждение очевидно при $\mathfrak{H} = \emptyset$. Пусть $\mathfrak{H} \neq \emptyset$ и A — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда A — монолитическая группа с монолитом $R = A^{\mathfrak{H}}$. Индукцией по n покажем, что в $\mathfrak{M} = c_n \text{form } A$ имеется лишь конечное множество c_n -подформаций.

Пусть $n = 0$. Тогда $\mathfrak{M} = \text{form } A$. По лемме 19.6 из [5] \mathfrak{M} имеет лишь конечное множество подформаций.

Пусть $n > 0$ и лемма верна для $n - 1$. Обозначим через t минимальный $c_{(n-1)}$ -спутник формации \mathfrak{M} . По лемме 6 из [8] $t(B) = c_{(n-1)} \text{form}(A/F_B(A))$ для любого $B \in K(A)$ и $t(B) = \emptyset$ для любого $B \in \mathcal{J} \setminus K(A)$. Если $F_B(A) \neq 1$, то, ввиду условия леммы, $A/F_B(A) \in \mathfrak{S}$, то есть $(A/F_B(A))^{\mathfrak{S}} = 1$. Тогда по лемме 5 в $t(B)$ имеется лишь конечное множество $c_{(n-1)}$ -подформаций. Если же $F_B(A) = 1$, то $t(B) = c_{(n-1)} \text{form } A$ и по индукции число $c_{(n-1)}$ -подформаций в $t(B)$ конечно. Следовательно, в формации \mathfrak{M} содержится лишь конечное множество c_n -подформаций. Так как при этом $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но $(1) \subseteq \mathfrak{H}$, то в \mathfrak{M} можно выбрать такую c_n -подформацию \mathfrak{K} , что $\mathfrak{K} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но $\mathfrak{K}_1 \subseteq \mathfrak{H}$ для каждой собственной c_n -подформации \mathfrak{K}_1 из \mathfrak{K} .

Лемма доказана.

Лемма 7. Пусть \mathfrak{F} — минимальная композиционная не \mathfrak{M}^n -формация. Тогда $\mathfrak{F} = \text{sform } G$, где G — такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{M}^n}$, что выполняется одно из следующих условий:

- (1) $G = P$ — простая неабелева группа,
- (2) P — собственная неабелева подгруппа группы G ,
- (3) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ — p -группа и $H = [Q]N$, причем

$$C_H(Q) = Q = H^{\mathfrak{M}^{n-1}}.$$

Доказательство. По теореме 7.9 в [5] и теореме 3.2 в [6] формация \mathfrak{N}^n имеет такой максимальный внутренний композиционный спутник h , что $h(Z_p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{N}^{n-1}$ для всех $Z_p \in \mathfrak{A}$ и $h(A) = \mathfrak{N}^n$ для любой простой неабелевой группы A . Ввиду теоремы 1 из [11], $\mathfrak{F} = \text{sform } G$, где G — такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{N}^n}$, что выполняется одно из следующих условий:

- (1) $G = P$ — простая группа,
- (2) P — собственная неабелева подгруппа группы G и $P = G^{h(A)}$ для $A \in K(P)$,
- (3) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ — p -группа, а $H \neq 1$ — монолитическая группа с монолитом $Q = H^{h(A)}$ для $A \in K(P)$.

Пусть верно условие 1. Если $G = P = Z_p$ для некоторого $p \in \mathbf{P}$, то $\text{form } G \subseteq \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{N}^n$. Получаем противоречие. Отсюда, $G = P$ — простая неабелева группа.

Пусть верно условие 3. Поскольку $H \notin h(Z_p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{N}^{n-1}$ для $Z_p \in K(P)$, то $H \notin \mathfrak{N}$. Из следствия 1 из [11] заключаем, что $\Phi(H) = 1$, тогда $H = [Q]N$. Так как

$$G/P \cong H \in \mathfrak{N}^n \subseteq \mathfrak{S},$$

то Q абелева. Из монолитичности H следует, что $Q = C_H(Q)$.

Поскольку Q — абелева группа, $Q \subseteq F(H)$. Но $F(H) \subseteq C_H(Q) = Q$. Следовательно, $Q = F(H)$. Так как $H \in \mathfrak{N}^n$, то $H^{\mathfrak{N}^{n-1}} \in \mathfrak{N}$, а значит, $H^{\mathfrak{N}^{n-1}} \subseteq F(H) = Q$. Из монолитичности H получим, что $Q = H^{\mathfrak{N}^{n-1}}$.

Лемма доказана.

Теорема 1. Если произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ неединичной s -формации \mathfrak{M} такой, что $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{M})} \subseteq \mathfrak{M}$, и неединичной формации $\mathfrak{H} \neq \emptyset$ является однопорожденной s -формацией, то выполняются следующие условия:

- (1) $K(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{A} \subseteq K(\mathfrak{M}) \cap \mathfrak{A}$,
- (2) \mathfrak{M} — метанильпотентная однопорожденная s -формация,
- (3) $\pi(\mathfrak{H}) \cap \pi(t(B)) = \emptyset$ для всех $B \in K(\mathfrak{M})$, где t — минимальный s -спутник формации \mathfrak{M} ,
- (4) если $|\pi(\mathfrak{M})| > 1$, то \mathfrak{H} — однопорожденная формация, причем $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{N}$ влечет включение $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{A}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} = \text{sform } A$. Допустим, что

$$K(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{A} \not\subseteq K(\mathfrak{M}) \cap \mathfrak{A}.$$

Так как по условию $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{M})} \subseteq \mathfrak{M}$, то $K(\mathfrak{M}) \cap \mathfrak{A} \neq \emptyset$. Тогда по лемме 2 в формации \mathfrak{F} содержится бесконечное множество наследственных s -подформаций, что противоречит лемме 1. Значит,

$$K(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{A} \subseteq K(\mathfrak{M}) \cap \mathfrak{A},$$

то есть формации \mathfrak{M} и \mathfrak{H} удовлетворяют условию 1.

Пусть h — минимальный s -спутник формации \mathfrak{F} . По лемме 3 формация \mathfrak{F} имеет также s -спутник f такой, что $f(B) = t(B)\mathfrak{H}$ для всех $B \in K(\mathfrak{M})$, где t — минимальный s -спутник формации \mathfrak{M} , $f(B) = \mathfrak{H}$ при всяком $B \in K(\mathfrak{H}) \setminus K(\mathfrak{M})$ и $f(B) = \emptyset$,

если $A \in \mathcal{J} \setminus K(\mathcal{M} \cup \mathfrak{H})$. Поскольку m — внутренний спутник формации \mathcal{M} , то f — внутренний спутник формации \mathfrak{F} . Предположим, что найдутся такие различные простые числа p и q , что в формации $m(Z_p)$ содержится группа Z_q и $q \in \pi(\mathfrak{H})$. Пусть H — некоторая qd -группа из \mathfrak{H} . Для всякого натурального числа n через H_n обозначим регулярное сплетение

$$Z_q \wr H^n = [K]H^n,$$

где K — база сплетения H_n , а H^n обозначает некоторую группу, являющуюся прямым произведением n изоморфных копий группы H . Так как

$$H_n/K \cong H^n \in \mathfrak{H},$$

то есть $(H_n)^{\mathfrak{H}} \subseteq K \in m(Z_p)$, то $H_n \in m(Z_p)\mathfrak{H}$. По лемме 18.8(b) из [12] $O_p(H_n) = 1$. Следовательно, по теореме работы [9] $H_n \in h(Z_p)$. Если L — подгруппа порядка q из H , то по лемме 18.8(a) из [12] группа $T_n = Z_q \wr L^n$ изоморфно вкладывается в H_n . Тогда

$$T_n \in \text{sform}(A/F_{Z_p}(A))$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Ввиду леммы 3.1.7 из [4] степень нильпотентности группы T_n не меньше $n + 1$, что противоречит лемме 3.1.5 из [4].

Итак, в дальнейшем мы можем считать, что если p и q — различные простые числа и группа Z_q принадлежит формации $m(Z_p)$, то $q \notin \pi(\mathfrak{H})$. Кроме того, как и при доказательстве теоремы 8.16 в [5], можно показать, что в этой ситуации формация \mathfrak{H} абелева.

Покажем теперь, что \mathcal{M} — метанильпотентная однопорожденная c -формация. Предположим, что $\mathcal{M} \not\subseteq \mathfrak{N}^2$. Тогда, по лемме 6 в \mathcal{M} имеется неметанильпотентная c -подформация \mathcal{M}_0 , у которой все собственные c -подформации метанильпотентны. Причем по лемме 7 $\mathcal{M}_0 = \text{sform } G$, где группа G удовлетворяет одному из следующих условий:

- (a) $P = G^{\mathfrak{N}^2}$ — неабелева единственная минимальная нормальная подгруппа в G ,
- (b) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ — минимальная нормальная подгруппа в G , а $H = [Q]N \neq 1$, $Q = C_H(Q) = H^{\mathfrak{N}}$ — минимальная нормальная подгруппа в H .

Пусть G удовлетворяет условию (a) и $B \in K(P)$. Ясно, что $G \in m(B)$. Пусть M — неединичная группа из \mathfrak{H} . Для всякого натурального числа n через G_n обозначим регулярное сплетение

$$G_n = G \wr M^n = [K]M^n,$$

где K — база сплетения. Так как $G_n/K \cong M^n \in \mathfrak{H}$, то $(G_n)^{\mathfrak{H}} \subseteq K \in m(B)$. Если $G = P$, то $(G_n)^{\mathfrak{H}} \in m(B)$, то есть $G_n \in m(B)\mathfrak{H}$. Поскольку $O_T(G_n) = 1$ для любой простой группы $T \in \mathcal{J} \setminus (B)$, по теореме из [9]

$$G_n \in h(B) = \text{form}(A/F_B(A))$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. Но G_n содержит монолит порядка $|G|^{|M|^n}$, что противоречит лемме 3.1.5 из [4].

Предположим, что $P \subset G$. Докажем, что в этом случае $(G_n)^{\mathfrak{H}}$ входит подпрямую в K . Пусть D_1 — проекция $(G_n)^{\mathfrak{H}}$ на первую копию G_1 . Допустим, что $D_1 \neq G_1$. Поскольку $(G_n)^{\mathfrak{H}}$ нормальна в G_n , то D_1 нормальна в G_1 . По лемме 3.1.9 из [4]

$(G_1/D_1) \wr M^n$ — гомоморфный образ группы $G_n/(G_n)^{\mathfrak{H}}$, то есть $(G_1/D_1) \wr M^n \in \mathfrak{H}$. Следовательно, $\pi(G_1) \cap \pi(\mathfrak{H}) \neq \emptyset$. Без ограничения общности в качестве M можно взять прямое произведение qd -групп из \mathfrak{H} , где $q \in \pi(G_1) \cap \pi(\mathfrak{H})$, по одной для каждого q .

Уточним строение \mathfrak{H} . Введем обозначение

$$\mathfrak{F}_1 = \text{form}\{A/F_B(A) \mid B \in K(A)\}.$$

Хорошо известно, что формация, порожденная конечным множеством групп, однопорождена. Значит, $\mathfrak{F}_1 = \text{form } S$ для некоторой группы S . Пусть A_1 — произвольная монолитическая группа из \mathfrak{H} . Понятно, что $O_{Z_p}(A_1) = 1$ для некоторого $p \in \pi(\mathfrak{M})$. Значит, $A_1 \in \mathfrak{H} \subseteq m(Z_p)\mathfrak{H}$ и по теореме из [9]

$$A_1 \in h(Z_p) = \text{form}(A/F_{Z_p}(A)) \subseteq \mathfrak{F}_1.$$

Следовательно, всякая монолитическая группа из \mathfrak{H} входит в \mathfrak{F}_1 . Таким образом, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Если L — подгруппа порядка q из M , а Z_q — подгруппа порядка q из G_1/D_1 , то по лемме 18.8(a) из [12], группа $T_n = Z_q \wr L^n$ изоморфно вкладывается в $(G_1/D_1) \wr M^n$. Тогда $T_n \in \text{sform } S$ для всех $n \in \mathbf{N}$, что противоречит лемме 3.1.5 из [4]. Таким образом, $G_1 = D_1$, то есть $(G_n)^{\mathfrak{H}}$ входит подпрямую в K . Поэтому $(G_n)^{\mathfrak{H}} \in m(B)$ и $G_n \in m(B)\mathfrak{H}$. Поскольку $O_T(G_n) = 1$ для любой простой группы $T \in \mathcal{J} \setminus (B)$, по теореме работы [9]

$$G_n \in h(B) = \text{form}(A/F_B(A)).$$

Но G_n содержит монолит порядка $|P|^{|M|^n}$, что противоречит лемме 3.1.5 из [4].

Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 8.16 в [5], можно показать, что группа G не может удовлетворять и условию (b). Следовательно, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}^2$.

Покажем, что \mathfrak{M} — однопорожденная s -формация. Поскольку всякая s -подформация из \mathfrak{M} наследственна, то $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. По лемме 1 в \mathfrak{M} имеется лишь конечное множество s -подформаций. Пусть

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{M}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{M}_k = \mathfrak{M}$$

— такая цепь s -формаций, что \mathfrak{M}_{i-1} — максимальная s -подформация в \mathfrak{M}_i , $i = 1, 2, \dots, k$. Пусть

$$H_i \in \mathfrak{M}_i \setminus \mathfrak{M}_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Тогда

$$\mathfrak{M} = \text{sform}\{H_1, \dots, H_k\} = \text{sform } H_1 \times \dots \times H_k,$$

то есть \mathfrak{M} — однопорожденная s -формация. Итак, \mathfrak{M} удовлетворяет условию 2.

Предположим, что найдется такое простое число q , что $q \in \pi(\mathfrak{H}) \cap \pi(m(B))$. Так как формация \mathfrak{M} метанильпотентна, $B \cong Z_p$ для некоторого $p \in \mathbf{P}$. Причем, по следствию 1 из [9] $m(Z_p) \subseteq m_1(Z_p)$, где m_1 — минимальный s -спутник формации \mathfrak{N}^2 . По теореме 7.9 из [5] $m(Z_p) \subseteq \mathfrak{N}$. Более того, учитывая теорему работы [9], заключаем, что $m(Z_p) \subseteq \mathfrak{N}_{p'}$. Следовательно, $q \neq p$ и в формации $m(Z_p)$ имеется группа порядка q . Значит, как показано ранее, $q \notin \pi(\mathfrak{H})$. Получаем противоречие. Таким образом, \mathfrak{M} и \mathfrak{H} удовлетворяют условию 3.

Пусть $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{N}$. Тогда найдется такое $Z_p \in K(\mathfrak{M})$, что $\mathfrak{E} \subset t(Z_p)$. Но $t(Z_p) \subseteq \mathfrak{N}_p$. Поэтому в формации $t(Z_p)$ имеется группа простого порядка q , где $q \neq p$. В этом случае ввиду установленного ранее формация \mathfrak{H} абелева.

Предположим теперь, что $|\pi(\mathfrak{M})| > 1$. Ранее отмечалось, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Пусть $\mathfrak{H} \not\subseteq \mathfrak{A}$. Тогда ввиду доказанного выше $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$. Следовательно, $t(Z_p) = \mathfrak{E}$ при любом $Z_p \in K(\mathfrak{M})$. Таким образом,

$$f(Z_p) = t(Z_p)\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$$

для всех $Z_p \in K(\mathfrak{M})$ и $f(B) = \mathfrak{H}$ для $B \in K(\mathfrak{H}) \setminus K(\mathfrak{M})$. Но $h \leq f$. Значит, $A/F_B(A) \in \mathfrak{H}$ при всех $B \in K(A)$, то есть $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{H}$. Таким образом, $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}_1$ — однопорожденная формация. Пусть $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{A}$. Поскольку $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}_1$, по лемме 3.1.5 из [4] число неизоморфных монолитических групп из \mathfrak{H} конечно, ибо все они являются циклическими группами порядка не больше $|A|$. Значит, и в этом случае формация \mathfrak{H} однопорождена.

Теорема доказана.

Замечание 2. Аналогичные результаты независимо получены и анонсированы в [13].

Теорема 2. Произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ неединичной s -формации \mathfrak{M} такой, что $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{M})} \subseteq \mathfrak{M}$ и неединичной формации $\mathfrak{H} \neq \emptyset$ является однопорожденной s -формацией, если выполняются следующие условия:

- (1) $K(\mathfrak{H}) \subseteq K(\mathfrak{M})$,
- (2) \mathfrak{M} — метанильпотентная однопорожденная s -формация,
- (3) $\pi(\mathfrak{H}) \cap \pi(t(B)) = \emptyset$ для всех $B \in K(\mathfrak{M})$, где t — минимальный s -спутник формации \mathfrak{M} ,
- (4) если $|\pi(\mathfrak{M})| > 1$, то \mathfrak{H} — однопорожденная формация, причем $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{N}$ влечет включение $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{A}$.

Доказательство. Обозначим формацию $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ через \mathfrak{F} . Пусть $\pi(\mathfrak{M}) = \{p\}$. Учитывая включение $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{M})} \subseteq \mathfrak{M}$, заключаем, что $\mathfrak{N}_p = \mathfrak{M}$. Из условия 1 следует, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_p$. Значит,

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H} = \mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p.$$

Следовательно, $\mathfrak{F} = \text{sform}(Z_p)$.

Рассмотрим случай, когда $|\pi(\mathfrak{M})| > 1$. Ввиду леммы 3 формация \mathfrak{F} имеет такой s -спутник f , что $f(A) = t(A)\mathfrak{H}$, если $A \in K(\mathfrak{M})$, и $f(A) = \emptyset$ для всех $A \in \mathcal{J} \setminus K(\mathfrak{M})$. По условию 2 \mathfrak{M} — однопорожденная s -формация. Значит, по следствию 6 из [8] $K(X\mathfrak{M}) = K(X\mathfrak{F})$ — конечное множество.

Используя рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы 8.16 в [5], несложно показать, что формация $t(A)\mathfrak{H}$ для любого $A \in K(\mathfrak{M})$ — однопорождена. Тогда по лемме 3.5.21 из [4] \mathfrak{F} является однопорожденной s -формацией.

Теорема доказана.

Список литературы

1. Скиба А. Н., О произведении формаций. *Алгебра и логика* (1983) **22**, №5, 574–583.
2. Скиба А. Н. О факторизациях одного класса формаций конечных групп. *Вопросы алгебры* (1992) **7**, 108–110.
3. Skiba A. N., On nontrivial factorizations of an onegenerated local formation of finite groups. In: *Proc. Int. Conf. Algebra Dedicat. Mem. A. I. Malcev*, Novosibirsk, 21–26 Aug. 1989, p. 111.
4. Скиба А. Н., *Алгебра формаций*. Беларуская навука, Минск, 1997.
5. Шеметков Л. А., Скиба А. Н., *Формации алгебраических систем*. Наука, Москва, 1989.
6. Шеметков Л. А., *Формации конечных групп*. Наука, Москва, 1978.
7. Ведерников В. А., Сорокина М. М., О композиционных наследственных критических формациях. Препринт №1., Брянск, БГПУ, 1996.
8. Еловигов А. Б., Кратно Ω -композиционные формации групп. Препринт №3, Брянск, БГПУ, 1999.
9. Скиба А. Н., Шеметков Л. А., О минимальном композиционном экране композиционной формации. *Вопросы алгебры* (1992) **7**, 39–43.
10. Еловигов А. Б., О факторизации формаций. *Тезисы между. науч. конф., посвященной 80-летию проф. Вольфганга Гашюца*. Гомель, 16–21 октября 2000 г., Гомельский гос. ун-т., Гомель, 23–25.
11. Сорокина М. М., О композиционных и локальных критических формациях. *Изв. вузов. Сер. математика* (2000), №7, 59–66.
12. Doerk K., Hawkes T., *Finite soluble groups*. Gruyter, Berlin, 1992.
13. Го Вэньбинь, Скиба А. Н., Факторизации однопорожжденных композиционных формаций. В сб.: *Тезисы IV Между. алгебр. конф., посвященной 60-летию проф. Ю. И. Мерзлякова*. Новосибирск, 7–11 августа 2000 г., Институт математики СО РАН, Новосибирск, с. 60–61.

Статья поступила 06.03.2001.

«ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА», 2001, ТОМ 13, ВЫПУСК 3

Заведующая редакцией Л. М. Барыкина

Сдано в набор 8.08.2001. Подписано к печати 28.08.2001. Формат 70 × 100/16.
 Печать офсетная. Усл. печ. л. 13,0. Усл. кр.-отт. 3,1 тыс. Уч.-изд. л. 12,6. Бум. л. 5,0.
 Тираж 234 экз. Заказ №2448.

Свидетельство о регистрации №1868 от 28.01.1991 г. в Госкомпечати СМ СССР.

Учредители: Академия наук СССР, Отделение математики

Адрес издательства: 117997 г. Москва, Профсоюзная ул., д. 90.

Адрес редакции: 117966 г. Москва ГСП-1, ул. Губкина, д. 8, комн. 622. Тел. 938 3700.

Отпечатано в ППП «Типография «Наука»
 121099 г. Москва Г-99, Шубинский пер., д. 6.

Налоговая льгота — общероссийский классификатор продукции ОК-005-93, том 2;
 952000 – журналы