П. А. Пугач, В. А. Шлык, Обобщенные емкости и полиэдральные поверхности, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2010, том 383, 148–178

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 383, 2010 г.

П. А. Пугач, В. А. Шлык

ОБОБЩЕННЫЕ ЕМКОСТИ И ПОЛИЭДРАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Введение

Х. Айкава и М. Отцука ввели в [1] понятие обобщенной емкости конденсатора, экстремальные функции которой, в отличие от классической емкости, удовлетворяют, вообще говоря, вырожденному эллиптическому уравнению.

Они разработали метод экстремальной метрики векторозначных мер и с его помощью установили аналоги известных соотношений между емкостью конденсатора, модулем семейства кривых, соединяющих пластины конденсатора, и модулем семейства поверхностей, отделяющих пластины конденсатора.

Ниже с помощью этого метода и построений из [2] получены соотношения между обобщенной емкостью конденсатора и обобщенным модулем семейства поверхностей, отделяющих пластины конденсатора и не пересекающих предписанное множество (теоремы 1–2). Доказывается свойство аппроксимируемости изнутри этого модуля модулем семейства полиэдральных поверхностей (теорема 4).

§1. Необходимые определения и факты

В дальнейшем R^n – евклидово пространство с $n \geqslant 2$, $\mathcal{L}_k$ и $\mathcal{H}_k$ – соответственно k-мерные меры Лебега и Хаусдорфа. Для $K, F \subset R^n$ через $d(K,F)$ обозначим евклидово расстояние между K и F, через $d(x,F)$ – расстояние от точки $x \in R^n$ до F. Запись $\overline{F}$, ∂F, $\operatorname{int} F$ означает соответственно замыкание, границу, внутренность множества F в топологии R^n; $K \Subset F$ означает, что $d(\partial K, \partial F) > 0$ и $K \subset F$; $B(x,r) = \{y \in R^n : |x-y| < r\}$ – шар с центром в точке $x \in R^n$ радиуса $r > 0$. Пусть $1 < p < \infty$ и q такие,что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; A_p – класс

Ключевые слова: конденсатор, емкость конденсатора, модуль семейства кривых, модуль семейства поверхностей.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 08-01-00028) и ВО РАН (грант 09-III-А-01-0007).

локально интегрируемых функций $w : R^n \to (0, +\infty)$, удовлетворяющих условию Макенхаупта [3]:

$$\sup \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q w\,dx \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q w^{1-q}\,dx \right)^{p-1} < \infty,$$

где $|Q| = \mathcal{L}_n(Q)$ и супремум берется по всем координатным кубам $Q \subset R^n$. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x)$ – положительно определенная симметрическая $n \times n$ матрица с измеримыми по Борелю компонентами $a_{ij}(x)$ и такая, что

$$c_0^{-2} w(x)^{2/p} |\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leqslant c_0^2 w^{2/p} |\xi|^2$$

для любого вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in R^n$ и $x \in G$.

В дальнейшем G — открытое ограниченное множество в R^n. Пусть $\mathcal{B} = \mathcal{B}(x) = \{b_{ij}\}$ – обратная матрица для $\mathcal{A}$. Тогда (см. [1]) для матрицы $\mathcal{B}$ справедливы неравенства

$$c_0^{-2} w(x)^{-2/p} |\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j} b_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \leqslant c_0^2 w(x)^{-2/p} |\xi|^2.$$

Положим $\mathcal{A}[\xi] = \Big(\sum\limits_{i,j} a_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \Big)^{\frac{1}{2}}$ для $\xi \in R^n$, и если $\xi = \xi(x)$ – векторнозначная измеримая по Борелю функция на $G \subset R^n$, то $\mathcal{A}_p(\xi) = \Big(\int\limits_G \mathcal{A}[\xi]^p dx \Big)^{\frac{1}{p}}$. Аналогично определим $\mathcal{B}[\xi]$ и $\mathcal{B}_p(\xi)$. Заметим, что $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ могут быть записаны как $\mathcal{A} = \sqrt{\mathcal{A}}^2$, $\mathcal{B} = \sqrt{\mathcal{B}}^2$ с положительно определенными симметрическими $n \times n$ матрицами $\sqrt{\mathcal{A}}$, $\sqrt{\mathcal{B}}$. Тогда $\mathcal{A}[\xi] = |\sqrt{\mathcal{A}}\xi|$, $\mathcal{B}[\xi] = |\sqrt{\mathcal{B}}\xi|$, $\mathcal{A}_p(\xi) = \Big(\int\limits_G |\sqrt{\mathcal{A}}\xi|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}}$ и $\mathcal{B}_p(\xi) = \Big(\int\limits_G |\sqrt{\mathcal{B}}\xi|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}}$. Кроме того,

$$\begin{gathered} c_0^{-1} w(x)^{\frac{1}{p}} |\xi| \leqslant |\sqrt{\mathcal{A}}\xi| \leqslant c_0 w(x)^{\frac{1}{p}} |\xi|, \\ c_0^{-1} w(x)^{-\frac{1}{p}} |\xi| \leqslant |\sqrt{\mathcal{B}}\xi| \leqslant c_0 w(x)^{-\frac{1}{p}} |\xi|. \end{gathered} \tag{1}$$

По определению, для $x \notin G$ матрицу $\mathcal{A}(x)$ будем считать равной единичной матрице, умноженной на $w(x)^{2/p}$. Ясно, что соотношения (1) справедливы и для $x \in R^n \setminus G$.

Обозначим через $L^{p,w}(D)$ ($L^{p,w}(D,R^n)$), где D – открытое множество из R^n, класс борелевских функций $f : D \to [-\infty,\infty]$ (вектор-функций $f = (f_1,\dots,f_n)$, $f_i \in L^{p,w}(D)$, $i = 1,\dots,n$), для которых $\|f\| = \|f\|_{p,w} = \left(\int\limits_D |f|^p\ w\,dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$. Для $w \equiv 1$ в R^n положим $L^{p,w}(D) = L^p(D)$, $L^{p,w}(D,R^n) = L^p(D,R^n)$, $\|f\|_{p,w} = \|f\|_p$. Через $L^{p,w}_+(D)$ обозначим класс борелевских функций $f : D \to [0,\infty]$, $f \in L^{p,w}(D)$. Введем для $w \in A_p$ пространство $L^1_{p,w}(G)$ функций $u : G \to (-\infty,\infty)$, локально интегрируемых в G, имеющих в G обобщенные частные производные и таких, что $\big(\int\limits_G |\nabla u|^p\,w\,dx\big)^{\frac{1}{p}} < \infty$. Пусть F_0, F_1 — непересекающиеся компакты такие, что $F_0 \cap \overline{G} \neq \varnothing$, $F_1 \cap \overline{G} \neq \varnothing$, E – ограниченное замкнутое относительно $R^n \setminus (F_0 \cup F_1)$ множество, ни одна компонента связности которого не имеет предельных точек на $F_0 \cup F_1$. Тогда набор $(F_0, F_1, G/E)$ назовем конденсатором в G. Определим $(\mathcal{A},p)$-емкость конденсатора $(F_0, F_1, G/E)$ как величину

$$C^*_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G/E) = \inf A_p(\nabla u)^p,$$

где инфимум берется по всем функциям $u \in L^1_{p,w}(G) \cap C^\infty(G)$, $0 \le u \le 1$ в G, равным j в некоторой окрестности F_j, $j = 0,1$, и постоянной в некоторой окрестности каждой компоненты связности множества E. Класс всех таких допустимых функций обозначим через $\mathrm{adm}_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G/E)$. Замыкание этого класса функций в норме $L^1_{p,w}(G)$ обозначим через $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}^*(F_0, F_1, G)$. Отметим, что в случае $E = \varnothing$ емкость $C^*_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G/E)$ совпадает с емкостью $C^*_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G)$, введенной в [1] (см. [1, предложение 5, с. 71]). При $w \equiv 1$ в R^n и $\mathcal{A} = I$, где I – единичная матрица, $C^*_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G/E)$ равна емкости $C_p(F_0, F_1, G/E)$, рассмотренной в [2], для $\mathcal{A} = w^{2/p} I$ емкость $C^*_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G)$ равна емкости $C_{p,w}(F_0, F_1, G)$, рассмотренной в [4].

Выпуклую оболочку $n+1$ точек, не лежащих в одной $(n-1)$-мерной гиперплоскости, назовем n-мерным симплексом. Полиэдром будем называть объединение конечного числа симплексов. Границу полиэдра или ее часть будем называть полиэдральной поверхностью. Компакт σ, расположенный в $R^n \setminus E$, назовем поверхностью, отделяющей F_0 от F_1 в R^n/E, если $R^n \setminus \sigma = A(\sigma) \cup B(\sigma)$, где $A(\sigma), B(\sigma)$ – непересекающиеся открытые множества и $F_0 \subset A(\sigma)$, $F_1 \subset B(\sigma)$.

По построению, $\partial A(\sigma) \cap E = \varnothing$, $\partial B(\sigma) \cap E = \varnothing$, $\partial A(\sigma) \cup \partial B(\sigma) \subset \sigma$. Семейство всех таких поверхностей σ обозначим через $\Sigma(F_0, F_1, R^n/E)$. Если при этом σ является границей полиэдра, то семейство всех таких полиэдральных поверхностей обозначим через $\Sigma^0(F_0, F_1, R^n/E)$.

Если $\sigma \in \Sigma(F_0, F_1, R^n/E)$, то $\sigma \cap G$ назовем поверхностью, отделяющей F_0 от F_1 в G/E. Семейство всех таких поверхностей обозначим через $\Sigma(F_0, F_1, G/E)$. Если $E = \varnothing$, то такое семейство будем обозначать через $\Sigma(F_0, F_1, G)$. Аналогично определим семейство полиэдральных поверхностей $\Sigma^0(F_0, F_1, G/E)$. Положим $\widetilde{w} = w^{1-q}$ при $w \in A_p$. Определим $(q, \widetilde{w})$-модуль семейства Σ борелевских множеств из G как величину

$$M_{q,\widetilde{w}}(\Sigma) = \inf \int\limits_G \rho^q\ w^{1-q}\, dx,$$

где инфимум берется по всем борелевским функциям $\rho \in L_+^{q,\widetilde{w}}(G)$ таким, что $\int\limits_\sigma \rho\, d\mathcal{H}_{n-1} \geqslant 1$ для всех $\sigma \in \Sigma$. Класс всех таких допустимых функций обозначим через $\mathrm{Adm}_{q,\widetilde{w}}(\Sigma)$. Если $\Sigma = \Sigma(F_0, F_1, G/E)$, то обозначим $M_{q,\widetilde{w}}(\Sigma) = M_{q,\widetilde{w}}(F_0, F_1, G/E)$. Соответственно для $\Sigma = \Sigma^0(F_0, F_1, G/E)$ положим $M_{q,\widetilde{w}}(\Sigma) = M^0_{q,\widetilde{w}}(F_0, F_1, G/E)$. Семейство Σ', для которого $M_{q,\widetilde{w}}(\Sigma') = 0$, назовем $(q, \widetilde{w})$-исключительным. Если некоторое утверждение выполняется для всех множеств $\sigma \in \Sigma \setminus \Sigma'$, где Σ' – $(q, \widetilde{w})$-исключительное семейство, то будем говорить, что это утверждение выполняется на семействе поверхностей Σ $(q, \widetilde{w})$-почти всюду ($(q, \widetilde{w})$-п.в.). Отметим, что $M_{q,\widetilde{w}}(\Sigma') = 0$ для $\Sigma' = \{\sigma \in \Sigma(F_0, F_1, G/E) : \mathcal{H}_{n-1}(\sigma) = \infty\}$. Пусть $\rho \in L_+^{q,\widetilde{w}}(G)$. Будем говорить, что $\rho \in \widetilde{\mathrm{Adm}}_{q,\widetilde{w}}(\Sigma)$, если функция ρ $(q, \widetilde{w})$-п.в. допустима для семейства Σ. Известно (см. [5]),что

$$M_{q,\widetilde{w}}(\Sigma) = \inf \left\{ \int\limits_G \rho^q\ w^{1-q}\, dx : \rho \in \widetilde{\mathrm{Adm}}_{q,\widetilde{w}}(\Sigma) \right\}.$$

Аналогично введем классы допустимых функций, связанных с семействами поверхностей $\Sigma(F_0, F_1, G/E)$ и $\Sigma^0(F_0, F_1, G/E)$. Обозначим их соответственно через $\mathrm{Adm}_{q,\widetilde{w}}(F_0, F_1, G/E)$, $\widetilde{\mathrm{Adm}}_{q,\widetilde{w}}(F_0, F_1, G/E)$ и $\mathrm{Adm}^0_{q,w}(F_0, F_1, G/E)$, $\widetilde{\mathrm{Adm}}^0_{q,\widetilde{w}}(F_0, F_1, G/E)$.

Теперь определим модуль системы векторных борелевских зарядов на G. Пусть $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ – векторный борелевский заряд на G, чьи компоненты ν_i представляют собой борелевские меры со знаком (иначе говоря, заряды). Полную вариацию векторного заряда $|\nu|$ определим равенством

$$|\nu|(K) = \sup \sum_j \left(\sum_{i=1}^n \big(\nu_i(K_j)\big)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

для любого борелевского множества $K \subset G$, где супремум берется по всем разбиениям $\{K_j\}$ множества K на борелевские множества K_j. Полная вариация ν – неотрицательная борелевская мера в G. Аналогично определим векторный заряд и его полную вариацию на произвольном открытом множестве из R^n. В дальнейшем векторные заряды и вектор-функции по определению считаем борелевскими на тех открытых множествах, где они рассматриваются.

Пусть $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ – некоторая вектор-функция. Если $\int\limits_G |\xi_i|\, d|\nu_i| < \infty$ для $i = (1, \dots, n)$, то положим $\int\limits_G \xi\, d\nu = \sum\limits_{i=1}^n \int\limits_G \xi_i\, d\nu_i$. Известно, что

$$\left| \int\limits_G \xi d\nu \right| \le \int\limits_G |\xi|\, d|\nu|.$$

Пусть $\mathcal{F}_0$ – некоторое семейство векторных зарядов в G. Положим

$$|\mathcal{F}_0| = \big\{ |\nu| : \nu \in \mathcal{F}_0 \big\}$$

и

$$M_{q,\widetilde{w}}(|\mathcal{F}_0|) = \inf \left\{ \int\limits_G \rho^q\ \widetilde{w} dx : \rho \in L_+^{q,\widetilde{w}}(G), \rho \wedge |\mathcal{F}_0| \right\}.$$

Запись $\rho \wedge |\mathcal{F}_0|$ означает, что $\int\limits_G \rho\, d|\nu| \ \ge\ 1$ для всех $\nu \in \mathcal{F}_0$. Если $M_{q,\widetilde{w}}(|\mathcal{F}_0|) = 0$, то назовем семейство $\mathcal{F}_0$ $(q, \widetilde{w})$-исключительным множеством ($(q, \widetilde{w})$-искл.). Если утверждение относительно семейства $\mathcal{F}$ векторных зарядов ν в G неверно только для $(q, \widetilde{w})$-искл. системы $\mathcal{F}_0$, то будем говорить, что оно выполняется $(q, \widetilde{w})$-почти всюду (в дальнейшем этот факт будем записывать $(q, \widetilde{w})$-п.в.). В случае $\widetilde{w} \equiv 1$ в R^n данный факт будет записываться в виде (q)-п.в.

Определение 1. *Пусть* $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ *– вектор-функция из* $L^{q,\widetilde{w}}(G)$ *и* $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ *– векторный заряд в* G. *Запись* $\xi \wedge \nu$ *означает, что* $\int\limits_G \xi \, d\nu \geq 1$. *Пусть* $\mathcal{F}$ *– некоторое семейство векторных зарядов в* G. *Запись* $\xi \wedge \mathcal{F}$ *–* $(q, \widetilde{w})$*-п.в. означает, что* $\xi \wedge \nu$ $(q, \widetilde{w})$*-п.в. на* $\mathcal{F}$. *Положим* $M_{\mathcal{B},q}(\mathcal{F}) = \inf\{B_q(\xi)^q, \xi \wedge \mathcal{F}$ *–* $(q, \widetilde{w})$*-п.в.*$\}$, *где инфимум равен* ∞, *если не существует подходящих* $\xi \in L^{q,\widetilde{w}}(G, R^n)$.

Определение 2. *Пространством* $BV(D)$ *(см.* [6, 7]*) называется класс локально суммируемых на открытом множестве* $D \subset R^n$ *функций* $u : D \to (-\infty, \infty)$, *для которых градиент* ∇u *(в смысле теории обобщенных функций) является конечным векторным зарядом в* D.

Такие функции будем называть функциями ограниченной вариации в D. Полную вариацию заряда ∇u на всем множестве D обозначим через $\|u\|_{BV(D)}$. Периметр множества $K \subset R^n$ относительно D определим равенством $P_D(K) = \|\chi_K\|_{BV(D)}$, если $\chi_K \in BV(D)$, и $P_D(K) = \infty$, если $\chi_K \notin BV(D)$. Здесь χ_K – характеристическая функция множества K. По определению (см. [7, с. 14]),

$$P_D(K) = \sup\left\{ \int\limits_K \operatorname{div} \, g \, dx : g \in C_0^1(D, R^n), |g(x)| \leq 1 \right\}.$$

Для функции $u \in BV(D)$ векторный заряд, порожденный этой функцией в D, обозначим через $\nabla u = \nabla u_D$. В частности, для $\chi_K \in BV(D)$ этот заряд обозначим через $\nabla \chi_{K,D}$. Интегралы для вектор-функций $g = (g_1, \dots, g_n)$ по борелевскому множеству $B \subset D$ от зарядов ∇u_D, $\nabla \chi_{K,D}$ будем записывать соответственно в виде $\int\limits_B g \, \nabla u_D$, $\int\limits_B g \, \nabla \chi_{K,D}$. Другими словами, ∇u_D, $\nabla \chi_{K,D}$ в этих интегралах представляют собой элементы мер.

Для функции $u \in L^1_{p,w}(G) \subset BV(G)$ заряд множества K можно записать (см. [6, с. 15]) в виде $\int\limits_{K \cap G} \nabla u \, dx$. Таким образом, для $u \in L^1_{p,w}(G)$ символ ∇u в зависимости от ситуации будет обозначать либо векторный заряд, либо вектор-функцию.

Отметим, что если $\chi_K \in BV(R^n)$, то из определения $P_G(K)$ следует, что сужение $\nabla \chi_{K,R^n}\Big|_G$ совпадает с зарядом $\nabla \chi_{K,G} = \nabla \chi_K$.

Ниже $B(\sigma)$, $F_1 \subset B(\sigma)$, – открытое множество из определения компакта $\sigma \in \Sigma(F_0, F_1, R^n/E)$. Зададим следующие семейства зарядов:

$$
\begin{aligned}
\nabla \mathcal{D}^*(G) &= \{\nabla u : u \in \mathcal{D}^* = \mathcal{D}^*(F_0, F_1, G/E)\},\\
\nabla \Sigma(G) &= \nabla \Sigma(F_0, F_1, G/E) = \{\nabla \chi_{B(\sigma)} : \chi_{B(\sigma)} \in BV(G)\},\\
|\nabla \Sigma(G)| &= |\nabla \Sigma(F_0, F_1, G/E)| = \{|\nabla \chi_{B(\sigma)}| : \nabla \chi_{B(\sigma)} \in \nabla \Sigma(G)\},\\
\nabla \Sigma^0(G) &= \nabla \Sigma^0(F_0, F_1, G/E) \qquad (2)\\
&= \{\nabla \chi_{B(\sigma)} \in \Sigma(G), \sigma \in \Sigma^0(F_0, F_1, R^n/E)\},\\
|\nabla \Sigma^0(G)| &= |\nabla \Sigma^0(F_0, F_1, G/E)| = \{|\nabla \chi_{B(\sigma)}| : \nabla \chi_{B(\sigma)} \in \nabla \Sigma^0(G)\}.
\end{aligned}
$$

По определению, векторный заряд $\nabla \chi_{B(\sigma)} = \nabla \chi_{B(\sigma),G}$, $\nabla \chi_{B(\sigma)} \in \nabla \Sigma(G)$, порожденный функцией $\chi_{B(\sigma)}$ в G, совпадает с векторным зарядом $\nabla \chi_{B(\sigma)\cap G,G}$. Аналогично, $|\nabla \chi_{B(\sigma)}| = |\nabla \chi_{B(\sigma),G}| = |\nabla \chi_{B(\sigma)\cap G,G}|$ при рассмотрении этих зарядов в G.

Согласно структурной теореме для BV-функций (см. [8, теорема 1, с. 130]), каждой функции $\chi_{B(\sigma)} \in \nabla \Sigma(G)$ можно сопоставить неотрицательную меру Радона μ, сосредоточенную на G, и μ-измеримую функцию $\nu(x) : R^n \to R^n$ такие, что $|\nu| = 1$ μ-п.в. на G, $\operatorname{supp} \mu \subset \overline{\sigma \cap G}$, $\nu = \vec{0}$ на $R^n \setminus G$,

$$
\begin{aligned}
\nabla \chi_{B(\sigma)}(K) &= \int\limits_K \nu(x)\, d\mu,\\
|\nabla \chi_{B(\sigma)}|(K) &= \int\limits_K d\mu.
\end{aligned} \qquad (3)
$$

для всех борелевских множеств $K \subset R^n$.

Определение 3. *Пусть $\chi_{B(\sigma)} \in BV(G)$, $x \in R^n$. Будем говорить, что x принадлежит приведенной границе $\partial^*(B(\sigma)\cap G)$ множества $B(\sigma)\cap G$, если выполнены следующие условия:*

1. $|\nabla \chi_{B(\sigma)}|(B(x, r)) > 0$ *для всех* $r > 0$,
2. $\lim\limits_{r\to 0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \cdot \int\limits_{B(x,r)} \nu\, d\mu = \nu(x)$,
3. $|\nu(x)| = 1$, *где* ν, μ *приведены в соотношениях* (3).

Отметим, что по определению $\partial^*(B(\sigma) \cap G) \subset \sigma \cap G$. Кроме того, для каждого шара $B(x, r)$, $x \in \sigma \cap G$, $0 < r < d\ (x, \partial G)$, справедлива оценка (см. [8, п. 5.7, лемма 1, с. 151])

$$P_{R^n}(B(\sigma) \cap B(x, r)) \le P_G(B(\sigma)) + \mathcal{H}_{n-1}(\partial(B(x, r) \cap B(\sigma)),$$

что влечет условие $\chi_{B(\sigma)\cap B(x,r)} \in BV(R^n)$. Это позволяет привести аналог структурной теоремы для множества с конечным периметром ([8, теорема 2, с 158]) применительно к множеству $B(\sigma)$ относительно G. Справедливость этого аналога следует из локальности рассуждений в доказательстве упомянутой выше теоремы.

Утверждение 1. *Если $B(\sigma)\cap G$ имеет конечный периметр относительно G (иначе говоря, $\nabla\chi_{B(\sigma)} \in \nabla\Sigma(G)$), то*

1. $\partial^*(B(\sigma)\cap G) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} K_k \cup N$, *где* $|\nabla\chi_{B(\sigma)\cap G}|(N) = 0$ *и* K_k *– компактное подмножество гиперповерхности* $S_k, k = 1, 2, \dots;$
2. $\nu\Big|_{S_k}$ *является нормалью к* $S_k, k = 1, 2, \dots,$ *где* ν *определено в* (3),
3. $\mu = |\nabla\chi_{B(\sigma)}|\Big|_G$ *совпадает с ограничением* $\mathcal{H}_{n-1}$*-меры на* $\partial^*(B(\sigma)\cap G)$.

Определение 4. *Пусть $x \in R^n$. Будем говорить, что x принадлежит границе $\partial_*(B(\sigma)\cap G)$ множества $B(\sigma)\cap G$ в смысле теории меры, если*

$$\limsup_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}_n(B(x,r)\cap B(\sigma)\cap G)}{r^n} > 0,$$
$$\limsup_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}_n((B(x,r))\setminus(B(\sigma)\cap G))}{r^n} > 0.$$

По определению, $\partial_*(B(\sigma)\cap G) \subset \partial(B(\sigma)\cap G)$. Следующее утверждение уточняет известные соотношения между приведенной границей и границей в смысле теории меры на случай множества $B(\sigma)\cap G$ (см. [8, лемма 1, с. 160]) и доказывается теми же рассуждениями, что и в [8].

Утверждение 2. *Пусть $\nabla\chi_{B(\sigma)} \in \nabla\Sigma(G)$. Тогда*

1. $\partial^*(B(\sigma)\cap G) \subset \partial_*(B(\sigma)\cap G)\cap G,$
2. $\mathcal{H}_{n-1}\Big(\big(\partial_*(B(\sigma)\cap G)\cap G)\big)\setminus\partial^*(B(\sigma)\cap G)\Big) = 0.$

Следующее утверждение дает достаточные условия включения функции $\chi_{B(\sigma)}$ в класс $BV(G)$.

Предложение 1. *В определении семейства $\nabla\Sigma^0(G)$ функция $\chi_{B(\sigma)}$ принадлежит классу $BV(G)$ для любого $\sigma \in \Sigma^0(F_0, F_1, R^n/E)$. Если* *для* $\sigma \in \Sigma(F_0, F_1, R^n/E)$: $\mathcal{H}_{n-1}(\sigma \cap G) < \infty$ *и* $F_0 \cup F_1 \subset G$, $E \cap \partial G = \varnothing$, $\mathcal{H}_{n-1}(\partial G) < \infty$, *то* $\chi_{B(\sigma)} \in BV(G)$.

Доказательство. Для полиэдра P, как следует из формулы Гаусса–Остроградского и определения периметра множества в дивергентной форме, справедлива оценка $P_{R^n}(P) \le \mathcal{H}_{n-1}(\partial P)$. Значит (см. [6, 7]), $P_G(P) = P_G(P \cap G) \le P_{R^n}(P)$. Отсюда для $B(\sigma) = P$, если $F_1 \subset P$, или $B(\sigma) = R^n \setminus \overline{P}$, если $F_0 \subset P$, $\partial P = \sigma \in \Sigma^0(F_0, F_1, R^n/E)$, выполняется нужное условие $\chi_{B(\sigma)} \in BV(G)$.

Пусть теперь $F_0 \cup F_1 \subset G$, $E \cap \partial G = \varnothing$ и $\mathcal{H}_{n-1}(\partial G) < \infty$. Тогда (см. [9, теорема 24.2]) для $U = G \cap B(\sigma)$ можно указать последовательность полиэдров P_i, удовлетворяющую условиям:

$$P_i \subset \left\{x : d(x, U) < \frac{1}{i}\right\}, \quad \mathcal{L}(P_i) \to \mathcal{L}(U),$$
$$\mathcal{H}_{n-1}(\partial P_i) \to \mathcal{H}_{n-1}(\beta(U)) \quad \text{при} \quad i \to \infty,$$

где $\beta(U)$, $\beta(U) \subset \partial U$, – приведенная граница множества U относительно R^n, $\partial P_i \subset \{x : d(x, \beta(U)) < \frac{1}{i}\} \subset \{x : d(x, \partial U) < \frac{1}{i}\}$. По построению, $\chi_{P_i} \to \chi_U$ в $L^1(R^n)$, $P_{R^n}(P_i) \le \mathrm{const}$ для всех $i \ge 1$. В силу свойства полунепрерывности полной вариации (см. [6, теорема 9]),

$$P_{R^n}(U) \le \varliminf_{i \to \infty} P_{R^n}(P_i) < \infty,$$

что влечет условия $P_G(U) \le P_{R^n}(U)$ и $\chi_{B(\sigma)} \in BV(G)$.

Замечание. Вообще говоря, для $\sigma \cap G \in \Sigma(F_0, F_1, G/E)$ можно указать разные компакты σ из $\Sigma(F_0, F_1, G/E)$. В доказательстве предложения 1 в качестве σ можно взять ∂U, в качестве $B(\sigma)$ можно взять U. Тогда (см. [7, лемма 3, с. 243]) $\nabla \chi_{U,G} = \nabla \chi_{U,R^n}\big|_G$ и $\nabla \chi_{P_i,R^n} \to \nabla \chi_{U,R^n}$ слабо. Последнее означает, что для любой функции $\varphi \in C(R^n, R^n)$ с компактным носителем $\lim\limits_{i \to \infty} \int \varphi \nabla \chi_{P_i,R^n} = \int \varphi \nabla \chi_{U,R^n}$.

Предложение 2. $M_{\mathcal{B},q}(\nabla \mathcal{D}^*) = \inf\{\mathcal{B}_q(\xi)^q : \xi \wedge \nabla \mathcal{D}^*\}$.

Доказательство. По определению,

$$M_{\mathcal{B},q}(\nabla \mathcal{D}^*) = \inf\{\mathcal{B}_q(\xi)^q : \xi \wedge \nabla \mathcal{D}^*(q, \widetilde{w})\text{-п.в.}\}.$$

Рассмотрим множество $\mathcal{E}_\xi = \{\nabla u : u \in \mathcal{D}^*, \xi \wedge \nabla u \ \text{ не выполняется}\}$. Тогда $M_{q,\widetilde{w}}(|\mathcal{E}_\xi|) = 0$, значит, в силу известного критерия (см. [10, теорема 2]) найдется функция $f \in L_{+}^{q,\widetilde{w}}$, для которой

$$\int\limits_G f|\nabla u|\,dx = \infty \quad \text{для всех} \quad |\nabla u| \in |\mathcal{E}_\xi|.$$

С другой стороны, неравенство Гельдера дает оценку

$$\int\limits_G f|\nabla u|\,dx \le \Bigg(\int\limits_G f^q\ \widetilde{w}\,dx\Bigg)^{\frac{1}{q}} \cdot \Bigg(\int\limits_G |\nabla u|^p w\,dx\Bigg)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Следовательно, $\mathcal{E}_\xi = \varnothing$ для каждого ξ из определения $M_{\mathcal{B},q}(\nabla\mathcal{D}^*)$.

Приведем несколько результатов из выпуклого анализа (см. [11, глава IV]). Функцию $L(u,\xi)$, определенную на произведении пространств, будем называть функцией Лагранжа. Пару $(\overline{u},\overline{\xi}) \in A \times B$ назовем седловой точкой функции L на $A \times B$, если

$$L(\overline{u},\xi) \le L(\overline{u},\overline{\xi}) \le L(u,\overline{\xi}), \quad \forall u \in A, \quad \forall \xi \in B.$$

Предложение 3. *Если функция Лагранжа L определена на $A \times B$ и принимает вещественные значения, то*

$$\sup_{\xi \in B}\ \inf_{u \in A} L(u,\xi) \le \inf_{u \in A}\ \sup_{\xi \in B} L(u,\xi).$$

Предложение 4. *Если $(\overline{u},\overline{\xi})$ – седловая точка для L, то*

$$\begin{aligned} L(\overline{u},\overline{\xi}) &= \min_{u \in A}\sup_{\xi \in B} L(u,\xi) = \inf_{u \in A}\sup_{\xi \in B} L(u,\xi) \\ &= \max_{\xi \in B}\inf_{u \in A} L(u,\xi) = \sup_{\xi \in B}\inf_{u \in A} L(u,\xi). \end{aligned}$$

Предложение 5. *Если существуют $u_0 \in A$, $\xi_0 \in B$ и число α такие, что*

$$L(u_0,\xi) \le \alpha \ \ \forall \xi \in B, \quad L(u,\xi_0) \le \alpha \ \ \forall u \in A,$$

то (u_0,ξ_0) – седловая точка L и $\alpha = \inf\limits_{u \in A}\ \sup\limits_{\xi \in B} L(u,\xi)$.

§2. Соотношения между емкостью конденсатора и модулями $M_{\mathcal{B},q}(\nabla\mathcal{D}^*)$, $M_q(|\sqrt{\mathcal{A}}\nabla\Sigma|)$, $M_{\mathcal{B},q}(\nabla\Sigma)$

Нам потребуется следующий факт.

Предложение 6. $C^*_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G/E) < \infty$.

Доказательство. Возьмем компакт $\sigma \in (F_0, F_1, R^n/E)$, и пусть $0 < \varepsilon < d(\sigma, F_0 \cup F_1 \cup E)$. Пусть $U(\sigma, \varepsilon) = \bigcup\limits_{x\in\sigma} B(x, \varepsilon)$ – ε-окрестность компакта σ. Тогда $\overline{U}(\sigma, \varepsilon) \in \Sigma(F_0, F_1, R^n/E)$, значит, $R^n \setminus \overline{U}(\sigma, \varepsilon) = A \cup B$, где A, B – открытые множества и $F_0 \subset A$, $F_1 \subset B$, $A \cap B = \varnothing$. Пусть $E_0 = A \cap E$, $E_1 = B \cap E$, тогда $E = E_0 \cup E_1$ и $d(E_0 \cup F_0, E_1 \cup F_1) \geq 2\varepsilon$. Очевидно, что $\overline{U}(E_1 \cup F_1, \varepsilon/3) \subset U(E_1 \cup F_1, \varepsilon/2)$ и $U(E_0 \cup F_0, \varepsilon/2) \subset R^n \setminus \overline{U}(E_1 \cup F_1, \varepsilon/2)$. Существует функция $u \in C^\infty(R^n)$ (см. [12, теорема 2.6]) такая, что u равна 1 на $\overline{U}(E_1 \cup F_1, \varepsilon/3)$ и равна 0 вне $U(E_1 \cup F_1, \varepsilon/2)$. По построению, $u \in \operatorname{adm}_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G/E)$, следовательно,

$$C^*_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G/E) \leq \mathcal{A}_p(\nabla u)^p \leq c_0^p \int\limits_G |\nabla u|^p \, w \, dx < \infty,$$

где c_0 – постоянная из (1).

Предложение 7. *Для $C^*_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G/E)$ существует экстремальная функция $u_0 \in \mathcal{D}^*(F_0, F_1, G/E)$ такая, что*

$$C^*_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G/E) = \mathcal{A}_p(\nabla u_0)^p.$$

Доказательство. В силу предложения 6 и определения $C^*_{\mathcal{A},p}$, найдется последовательность $u_k \in \operatorname{adm}_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G/E)$, для которой

$$C^*{}_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G/E)^{\frac{1}{p}} \leq \mathcal{A}_p(\nabla u_k) < C^*{}_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G/E)^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{k}.$$

В силу рефлексивности (см. [13]) пространства $L^p(G, R^n)$, из последовательности $\nabla u_k \cdot w^{\frac{1}{p}} \in L^p(G, R^n)$ можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к $v_0 \cdot w^{\frac{1}{p}} \in L^p(G, R^n)$. Не ограничивая общности, можно считать, что сама последовательность $\nabla u_k \cdot w^{\frac{1}{p}}$,

$k \geq 1$, слабо сходится к $v_0 \cdot w^{\frac{1}{p}} \in L^p(G, R^n)$. Тогда (см. [14]) существует последовательность $v_k \cdot w^{\frac{1}{p}}$, $k \geq 1$, которая сходится в $L^p(G, R^n)$ к функции $v_0 \cdot w^{\frac{1}{p}}$, и $v_k \cdot w^{\frac{1}{p}}$ является выпуклой комбинацией $\nabla u_1 \cdot w^{\frac{1}{p}}, \dots, \nabla u_k \cdot w^{\frac{1}{p}}$, т.е. для каждого $k \in \mathbb{N}$ существуют неотрицательные числа $c_1^k, \dots, c_k^k$ такие, что

$$\sum_{j=1}^{k} c_j^k = 1, \quad v_k = \sum_{j=1}^{k} c_j^k \nabla u_j, \quad \sum_{j=1}^{k} c_j^k u_j \in \operatorname{adm}_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G/E),$$

$$\mathcal{A}_p(v_k) \leq \sum_{j=1}^{k} c_j^k \mathcal{A}_p(\nabla u_j) \leq \max_j \mathcal{A}_p(\nabla u_j).$$

Таким же свойством будут обладать последовательности $\nabla u_k w^{\frac{1}{p}}$, $k \geq l$, для всех $l \in \mathbb{N}$. Построим для них соответствующие последовательности выпуклых комбинаций, сходящихся в $L^p(G, R^n)$ к $v_0 w^{\frac{1}{p}}$. Выберем затем из каждой такой последовательности элемент $\widetilde{v}_l w^{\frac{1}{p}}$, для которого $\|\widetilde{v}_l w^{\frac{1}{p}} - v_0 w^{\frac{1}{p}}\|_{L^p(G,R^n)} < \frac{1}{l}$. Для новой последовательности $\{\widetilde{v}_l w^{\frac{1}{p}}\}$ выполнено условие : $\widetilde{v}_l = \nabla \widetilde{u}_l$, $\widetilde{u}_l \in \operatorname{adm}_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G/E)$,

$$C^*{}_{\mathcal{A},p}\bigl(F_0, F_1, G/E\bigr)^{\frac{1}{p}} \leq \mathcal{A}_p(\nabla \widetilde{u}_l) < C^*{}_{\mathcal{A},p}\bigl(F_0, F_1, G/E\bigr)^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{l},$$

$$\int\limits_G \bigl|\nabla \widetilde{u}_l - \nabla \widetilde{u}_m\bigr|^p \, w \, dx \to 0 \quad \text{при} \quad l, m \to \infty.$$

Тогда (см. [5, теорема 4.4.4]) $\widetilde{u}_l \to u_0$ в $L^1_{p,w}(G)$. По построению, $u_0 \in \mathcal{D}^*(F_0, F_1, G/E)$, $\nabla u_0 = v_0$ в G и $\mathcal{A}_p(\nabla u_0)^p = C^*{}_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G/E)$.

Предложение 8. Пусть $u \in \mathcal{D}^*(F_0, F_1, G/E)$ и u_0 – экстремальная функция для емкости $C^*{}_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G/E)$ из предложения 7. Тогда

$$\int\limits_G \Bigl|\sqrt{\mathcal{A}} \cdot \nabla u_0\Bigr|^{p-2} \Bigl(\sqrt{\mathcal{A}} \nabla u_0, \sqrt{\mathcal{A}} \nabla (u - u_0)\Bigr) dx = 0.$$

Доказательство. Пусть $v = u_0 \pm \varepsilon(u - u_0)$. Тогда в силу условия $u, v, u_0 \in \mathcal{D}^*(F_0, F_1, G/E)$ имеем $\mathcal{A}_p(\nabla u_0)^p \leq \mathcal{A}_p(\nabla(u_0 \pm \varepsilon(v - v_0)))^p = \Phi(\varepsilon)$. Дифференцируя $\Phi(\varepsilon)$ по ε при $\varepsilon = 0$ и применяя рассуждения из [2, теорема 3], получим требуемое равенство в предложении 8.

Теорема 1.

$$C^*{}_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G/E)^{\frac{1}{p}} \cdot M_{\mathcal{B},q}(\nabla \mathcal{D}^*)^{\frac{1}{q}} = 1,$$

где при $C^*_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G/E) = 0$ *модуль* $M_{\mathcal{B},q}(\nabla \mathcal{D}^*)$ *равен* ∞.

Доказательство. Зададим билинейный функционал

$$\Phi(u, \xi) = \int \nabla u \cdot \xi \, dx$$

на произведении $\mathcal{D}^* \times \Xi$, где $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}^*(F_0, F_1, G/E)$, $\Xi = \{\xi : B_q(\xi) \leq 1\}$. Покажем, что для этого функционала, вообще говоря, выполняется предложение 5. Покажем сначала, что $\sup\limits_{\xi \in \Xi} \int \nabla u \, \xi \, dx = \mathcal{A}_p(\nabla u)$. По неравенству Гельдера для $\xi \in \Xi$, имеем

$$\int_G \nabla u \; \xi \, dx = \int_G \sqrt{\mathcal{A}} \nabla u \cdot \sqrt{\mathcal{B}} \xi \, dx \leq \mathcal{A}_p(\nabla u) \cdot \mathcal{B}_q(\xi) \leq \mathcal{A}_p(\nabla u). \qquad (4)$$

Обратно, пусть $\xi = \mathcal{A}_p(\nabla u)^{1-p} |\sqrt{\mathcal{A}} \nabla u|^{p-2} \mathcal{A} \nabla u$. Тогда $\mathcal{B}_q(\xi) = 1$ и $\int_G \nabla u \, \xi \, dx = \mathcal{A}_p(\nabla u)$. Учитывая (4) и определение емкости $C^*_{\mathcal{A},p} = C^*_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G/E)$, получим, что

$$\inf_{u \in \mathcal{D}^*} \sup_{\xi \in \Xi} \Phi(u, \xi) = C^*_{\mathcal{A},p}{}^{\frac{1}{p}}.$$

В силу предложения 3,

$$\sup_{\xi \in \Xi} \inf_{u \in \mathcal{D}^*} \Phi(u, \xi) \leq C^*_{\mathcal{A},p}{}^{\frac{1}{p}}.$$

Отсюда, если $C^*_{\mathcal{A},p} = 0$, то $\inf\limits_{u \in \mathcal{D}^*} \int_G \nabla u \; \xi \, dx = 0$ для всех $\xi \in \Xi$. Значит, не существует такого ξ, что $\mathcal{B}_q(\xi) < \infty$ и $\xi \wedge \mathcal{D}^*$. Следовательно, $M_{\mathcal{B},q}(\nabla \mathcal{D}^*) = \infty$, что влечет справедливость теоремы 1 для $C^*_{\mathcal{A},p} = 0$.

Пусть теперь $C^*_{\mathcal{A},p} > 0$ и u_0 – экстремальная функции для $C^*_{\mathcal{A},p}$. Тогда

$$\int_G \nabla u_0 \; \xi \, dx \leq \int_G |\sqrt{\mathcal{A}} \nabla u_0| \cdot |\sqrt{\mathcal{B}} \xi| \, dx \leq C^*_{\mathcal{A},p}{}^{\frac{1}{p}} \qquad (5)$$

для всех $\xi \in \Xi$. С другой стороны, для функции

$$\xi_0 = |\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u_0|^{p-2}\mathcal{A}_p(\nabla u_0)^{1-p}\mathcal{A}\nabla u_0, \quad \mathcal{B}_q(\xi_0) = 1,$$

и любой функции $u \in \mathcal{D}^*$ имеем

$$\int\limits_G \nabla u\ \xi_0\,dx = {C^*_{\mathcal{A},p}}^{-\frac{1}{q}} \int\limits_G |\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u_0|(\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u_0, \sqrt{\mathcal{A}}\nabla u)\,dx.$$

В силу предложения 8, интеграл справа равен $\int\limits_G |\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u_0|^p\,dx = C^*_{\mathcal{A},p}$. Тогда

$$\int\limits_G \nabla u\ \xi_0\,dx = {C^*_{\mathcal{A},p}}^{\frac{1}{p}}$$

для всех $u \in \mathcal{D}^*$. Ввиду предложения 5, из (5), (6) следует, что (u_0, ξ_0) – седловая точка для $\Phi(u,\xi)$. Значит,

$$\inf_{u\in\mathcal{D}^*}\sup_{\xi\in\ \Xi}\int\limits_G \nabla u\ \xi\,dx = \sup_{\xi\in\ \Xi}\inf_{u\in\mathcal{D}^*}\int\limits_G \nabla u\ \ \xi\,dx.$$

Покажем, что отсюда следует утверждение теоремы 1. Действительно, возьмем $\xi \wedge \nabla\mathcal{D}^*$ (см. предложение 2). Тогда $1 \le \int\limits_G \nabla u\ \xi\,dx$ для всех $u \in \mathcal{D}^*$. Если теперь $\widetilde{\xi} = \frac{\xi}{\mathcal{B}_q(\xi)}$, то $\mathcal{B}_q(\widetilde{\xi}) = 1$ и

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathcal{B}_q(\xi)} &\le \inf_{u\in\mathcal{D}^*}\int\limits_G \nabla u\ \widetilde{\xi}\,dx \le \sup_{\eta\in\Xi}\inf_{u\in\mathcal{D}^*}\int\limits_G \nabla u\ \eta\,dx\\ &= \inf_{u\in\mathcal{D}^*}\int\limits_G \nabla u\ \widetilde{\xi}_0\,dx = {C^*_{\mathcal{A},p}}^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Следовательно, $\mathcal{B}_q(\xi)^q \ \ge\ {C^*_{\mathcal{A},p}}^{-\frac{q}{p}}$ для всех $\xi \wedge \nabla\mathcal{D}^*$. Отсюда $M_{\mathcal{B},q}(\nabla\mathcal{D}^*) \ge {C^*_{\mathcal{A},p}}^{-\frac{q}{p}}$. Поскольку $\widetilde{\xi}_0 = \xi_0 {C^*_{\mathcal{A},p}}^{-\frac{1}{p}} \wedge \nabla\mathcal{D}^*$ и $(\mathcal{B}_q(\widetilde{\xi}_0))^q = {C^*_{\mathcal{A},p}}^{-\frac{q}{p}}$, то $M_{\mathcal{B},q}(\nabla\mathcal{D}^*) = \mathcal{B}_q(\widetilde{\xi}_0)^q$. Тем самым теорема доказана.

Следствие. *Если* $C^*_{\mathcal{A},p} > 0$, *то экстремальная вектор-функция* $\widetilde{\xi}_0$ *для* $M_{\mathcal{B},q}(\nabla\mathcal{D}^*)$: $\widetilde{\xi}_0\wedge\nabla\mathcal{D}^*$, $\mathcal{B}_q(\widetilde{\xi}_0)^q = M_{\mathcal{B},q}(\nabla\mathcal{D}^*)$, *равна* $\frac{|\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u_0|^{p-2}}{C^*_{\mathcal{A},p}}\mathcal{A}\nabla u_0$. *Здесь* u_0 *– экстремальная функция для* $C^*_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G/E)$.

Предложение 9. $M_{\mathcal{B},q}(\nabla\Sigma(G)) \geq M_q(|\sqrt{\mathcal{A}}\nabla\Sigma(G)|)$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $M_{\mathcal{B},q}(\nabla\Sigma(G)) < \infty$. Пусть $\xi\wedge\nabla\chi_{B(\sigma)}$ для $(q,\widetilde{w})$–п.в. $\nabla\chi_{B(\sigma)} \in \nabla\Sigma(G)$. Тогда существует $(q,\widetilde{w})$-искл. множество $\mathcal{E}_0$ из $\nabla\Sigma(G)$ такое, что $\xi \wedge \nabla\chi_{B(\sigma)}$ выполняется для каждого $\nabla\chi_{B(\sigma)} \in \nabla\Sigma(G) \setminus \mathcal{E}_0$. По определению, $M_{q,\widetilde{w}}(|\mathcal{E}_0|) = 0$. Это влечет равенство $M_q(\{|\sqrt{\mathcal{A}}\nabla\chi_{B(\sigma)}| : \nabla\chi_{B(\sigma)} \in \mathcal{E}_0\}) = 0$. Действительно, для данного $\varepsilon > 0$ найдется функция $\rho \in L^{q,\widetilde{w}}_+(G)$ такая, что $\rho \wedge |\mathcal{E}_0|$ и $\int\limits_G \rho^q\, \widetilde{w}\, dx < \varepsilon$. Следовательно,

$$1 \leq \int\limits_G \rho\, |\nabla\chi_{B(\sigma)}| = \int\limits_G \rho\, w^{-\frac{1}{p}}\, w^{\frac{1}{p}}\, |\nabla\chi_{B(\sigma)}| \leq c_0 \int\limits_G \rho\, w^{-\frac{1}{p}}\, |\mathcal{A}\nabla\chi_{B(\sigma)}|$$

для всех $\nabla\chi_{B(\sigma)} \in \mathcal{E}_0$. Поэтому

$$M_q(\{|\sqrt{\mathcal{A}}\nabla\chi_{B(\sigma)}| : \nabla\chi_{B(\sigma)} \in \mathcal{E}_0\}) \leq \int\limits_G (c_0\rho w^{-\frac{1}{p}})^q\, dx \leq c_0^q\varepsilon.$$

В силу произвола в выборе $\varepsilon > 0$,

$$M_q\Big(\big\{|\sqrt{\mathcal{A}}\nabla\chi_{B(\sigma)}| : \nabla\chi_{B(\sigma)} \in \mathcal{E}_0\big\}\Big) = 0.$$

Для $\nabla\chi_{B(\sigma)} \in \nabla\Sigma(G) \setminus \mathcal{E}_0$ имеем

$$1 \leq \int\limits_G \xi\nabla\chi_{B(\sigma)} = \int\limits_G \sqrt{\mathcal{B}}\xi\sqrt{\mathcal{A}}\nabla\chi_{B(\sigma)} \leq \int\limits_G |\sqrt{\mathcal{B}}\xi||\sqrt{\mathcal{A}}\nabla\chi_{B(\sigma)}|.$$

Другими словами, $|\sqrt{\mathcal{B}}\xi|\wedge|\sqrt{\mathcal{A}}\nabla\chi_{B(\sigma)}|$ (q)-п.в. Переходя к инфимуму относительно ξ, имеем

$$M_{\mathcal{B},q}(\nabla\Sigma(G)) = \inf_\xi \mathcal{B}_q(\xi)^q = \inf_\xi \int\limits_G |\sqrt{\mathcal{B}}\xi|^q\, dx \geq M_q(|\sqrt{\mathcal{A}}\nabla\Sigma(G)|).$$

Предложение 10. $M_q(|\sqrt{\mathcal{A}}\nabla\Sigma(G)|) \geq M_{\mathcal{B},q}(\nabla\mathcal{D}^*) > 0$.

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что $M_q(|\sqrt{\mathcal{A}}\nabla\Sigma(G)|) < \infty$. Неравенство $M_{\mathcal{B},q}(\nabla\mathcal{D}^*) > 0$ следует из предложения 6 и теоремы 1. Для справедливости предложения 10 достаточно установить, что

$$C^*_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G/E)^{\frac{1}{p}} \cdot M_q(|\sqrt{\mathcal{A}}\nabla\Sigma(G)|)^{\frac{1}{q}} \geq 1.$$

Пусть $u \in \mathrm{adm}_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G/E)$. Положим $N_t = \{x \in G : u(x) > t\}$, и покажем, что $\nabla\chi_{N_t} \in \nabla\Sigma(G)$ для $\mathcal{L}_1$-почти всех (сокращенно, $\mathcal{L}_1$-п.в.) t из (0,1). Из определения $u \in \mathrm{adm}_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G/E)$ следует существование конечного числа непересекающихся областей O_i, $i = 1, \ldots, m$, для которых $E \cup F_0 \cup F_1 \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} O_i$, $u\Big|_{O_i} = c_i, i = 1, \ldots, m$. По теореме Кронрода—Федерера (см. [15, раздел 2.5]),

$$\int\limits_G |\nabla u|\, dx = \int\limits_0^1 dt \int\limits_{E_t} d\mathcal{H}_{n-1}(x),$$

где $E_t = \{x \in G : u(x) = t\}$, что влечет $\mathcal{H}_{n-1}(E_t) < \infty$ для $\mathcal{L}_1$-почти всех t из (0,1). Кроме того, по известной теореме Сарда, множество E_t для $\mathcal{L}_1$-п.в. t из $(0, 1) \setminus \{c_i, i = 1, \ldots, m\}$ является гладким многообразием.

Применение формулы Гаусса–Остроградского дает

$$\int\limits_{N_t} \mathrm{div}\ u\, dx = -\int\limits_{E_t} u \cdot \vec{n}\, d\mathcal{H}_{n-1} \quad \text{для всех } u \in C_0^\infty(G, R^n),$$

$|u| \leq 1$, где $\vec{n} = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$ – нормальный вектор к E_t, направленный внутрь $N_t = \{x \in G : u(x) > t\}$. В силу утверждения 1, это означает (см. [6, замечание 1.8]), что

$$P_G(N_t) \leq \mathcal{H}_{n-1}(E_t) < \infty, \quad \nabla\chi_{N_t} = \vec{n}\, d\mathcal{H}_{n-1}(x)\Big|_{N_t}, \quad \nabla\chi_{N_t} \in \nabla\Sigma(G)$$

для $\mathcal{L}_1$-п.в. t из (0,1). Поскольку $M_q(|\sqrt{\mathcal{A}}\nabla\Sigma(G)|) < \infty$, то найдется функция $\rho \in L_1^q(G)$ такая, что $\rho \wedge |\sqrt{\mathcal{A}}\nabla\Sigma(G)|$ и $\|\rho\|_q < \infty$. Тогда

$1 \le \int\limits_{N_t} \rho|\sqrt{\mathcal{A}}\vec{n}|\, d\mathcal{H}_{n-1}(x)$ для $\mathcal{L}_1$-п.в. t из (0,1). По теореме Кронрода–Федерера,

$$1 \le \int\limits_0^1 dt \int\limits_{N_t} \rho|\sqrt{\mathcal{A}}\vec{n}|\, d\mathcal{H}_{n-1} = \int\limits_0^1 dt \int\limits_{N_t} \rho \frac{|\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u|}{|\nabla u|}\, d\mathcal{H}_{n-1}$$
$$= \int\limits_G \rho|\sqrt{\mathcal{A}}\nabla n|\, dx \le \mathcal{A}_p(\nabla u) \cdot \|\rho\|_q.$$

Переходя к инфимуму относительно ρ, u, получим требуемое неравенство
$$C^*_{\mathcal{A},p}{}^{\frac{1}{p}} \cdot M_q(|\sqrt{A}\nabla\Sigma(G)|)^{\frac{1}{q}} \ge 1.$$

Предложение 11. *Пусть* $\widetilde{F}_0 = F_0 \cap \overline{G}$, $\widetilde{F}_1 = F_1 \cap \overline{G}$. *Тогда*

$$C^*_{\mathcal{A},p}(\widetilde{F}_0, \widetilde{F}_1, G/E) = C^*_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G/E),$$
$$M_{\mathcal{B},q}\big(\nabla\Sigma(\widetilde{F}_0, \widetilde{F}_1, G/E)\big) = M_{\mathcal{B},q}\big(\nabla\Sigma(F_0, F_1, G/E)\big),$$
$$M_q\big(|\sqrt{\mathcal{A}}\nabla\Sigma(\widetilde{F}_0, \widetilde{F}_1, G/E)|\big) = M_q\big(|\sqrt{\mathcal{A}}\nabla\Sigma(F_0, F_1, G/E)|\big).$$

Доказательство проведем для первого равенства, для остальных оно проводится по той же схеме. По определению, $C^*_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G/E) \ge C^*_{\mathcal{A},p}(\widetilde{F}_0, \widetilde{F}_1, G/E)$. Обратно, пусть $u \in \mathrm{adm}_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G/E)$ и D'_j – окрестность компакта $\widetilde{F}_j$, в которой u равна j, $j = 0, 1$. Тогда (см. [2, лемма 2]) найдется открытое множество $\widetilde{D}_j$, $\widetilde{F}_j \subset \widetilde{D}_j \subset D'_j$, такое, что $\partial\widetilde{D}_j \cap E = \varnothing$, $j = 0, 1$. В силу выбора $\widetilde{D}_j$, $F_j \setminus \widetilde{D}_j$ – компакт, $d(F_j \setminus \widetilde{D}_j, \overline{G}) = \varepsilon_1 > 0$, $d(\widetilde{F}_0 \cup \widetilde{F}_1, \partial\widetilde{D}_0 \cup \partial\widetilde{D}_1) = \varepsilon_2 > 0$. Построим теперь в ε-окрестности, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, компакта F_j открытое множество D_j, $F_j \subset D_j$, такое, что $\partial D_j \cap E = \varnothing$. Положим $\widetilde{u}$ равной 0 на $D_0 \cup \widetilde{D}_0$ и 1 на $D_1 \cup \widetilde{D}_1$, $\widetilde{u} = u$ в остальных точках области определения u. По построению, $\widetilde{u} = u$ на G и $u \in \mathrm{adm}_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G/E)$. Поэтому $\mathcal{A}_p(\nabla u)^p = \mathcal{A}_p(\nabla\widetilde{u})^p \ge C^*_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G/E)$. Отсюда, в силу произвола в выборе $u \in \mathrm{adm}_{\mathcal{A},p}(\widetilde{F}_0, \widetilde{F}_1, G/E)$, следует требуемое равенство предложения 11.

Замечание. В силу предложения 11 будем считать, что $F_0 \cup F_1 \subset \overline{G}$.

Положим

$$M_{\mathcal{B},q}(\nabla\mathcal{D}^*(F_0,F_1,G/E)) = M^*_{\mathcal{B},q}(F_0,F_1,G/E),$$
$$M_{\mathcal{B},q}(\nabla\Sigma(F_0,F_1,G/E)) = M_{\mathcal{B},q}(F_0,F_1,G/E).$$

Предложение 12. *Пусть G_1 – открытое подмножество G такое, что $F_0\cup F_1\subset\overline{G}_1$, тогда*

$$M^*_{\mathcal{B},q}(F_0,F_1,G_1/E)) \geq M^*_{\mathcal{B},q}(F_0,F_1,G/E).$$

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что $M^*_{\mathcal{B},q}(F_0,F_1,G_1/E)<\infty$. Пусть $\xi\wedge\nabla\mathcal{D}^*(F_0,F_1,G_1/E)$. Положим $\widetilde{\xi}=\xi$ на G_1 и $\widetilde{\xi}=0$ для $x\notin G_1$. Тогда

$$\int\limits_G \widetilde{\xi}\ \nabla u\ dx = \int\limits_{G_1}\xi\ \nabla u\, dx \geq 1 \quad \text{для} \quad u\in\mathcal{D}^*(F_0,F_1,G/E)$$

по той причине, что сужение $u\big|_{G_1}$ одновременно принадлежит классу $\mathcal{D}^*(F_0,F_1,G_1/E)$. Отсюда

$$\int\limits_{G_1}\mathcal{B}[\xi]^q\,dx = \mathcal{B}_q(\widetilde{\xi})^q \geq M^*_{\mathcal{B},q}(F_0,F_1,G/E).$$

Переходя здесь к инфимуму относительно ξ, получим утверждение предложения 12.

Ввиду монотонности, установленной в предложении 12, введем следующее определение.

Определение 5. *Пусть $F_0,F_1\subset G$, $\partial G\cap E=\varnothing$. Будем говорить, что модуль $M^*_{\mathcal{B},q}(F_0,F_1,G/E)$ аппроксимируем изнутри, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать открытое множество G_1 такое, что*

$$F_0,F_1\subset G_1\subset\overline{G}_1\subset G,\quad \partial G_1\cap E=\varnothing$$

и

$$M^*_{\mathcal{B},q}(F_0,F_1,G/E)\leq M^*_{\mathcal{B},q}(F_0,F_1,G_1/E)\leq M^*_{\mathcal{B},q}(F_0,F_1,G/E)+\varepsilon.$$

Предложение 13. *Пусть* $F_0, F_1 \subset G_1 \subset \overline{G}_1 \subset G, \partial G \cap E = \varnothing$ *и* $M^*_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G_1/E) < \infty$. *Тогда найдется открытое множество* $G_2, \overline{G}_1 \subset G_2 \subset G, \overline{G \setminus G_2} \cap E = \varnothing$, *для которого модуль* $M^*_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G_2/E)$ *аппроксимируем изнутри.*

Доказательство. Для $0 < r < d(\partial G, E)$ положим $G(r) = \{x \in G : d(x, \partial G) > r\}$. Очевидно, что $G(r) \uparrow G$, когда $r \to 0$, и существует $r_1 > 0$, для которого $G_1 \subset G(r_1)$. Положим $\varphi(r) = M^*_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G(r)/E)$. В силу предложения 12, $\varphi(r)$ – неубывающая функция, $0 < \varphi(r) \le \varphi(r_1) \le M^*_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G_1/E) < \infty$ для $0 < r < r_1$. Тогда $\varphi(r)$ – непрерывная функция справа на $(0, r_1)$, исключая счетное множество значений r. Поэтому существует $r_2 \in (0, r_1)$ такое, что $\lim\limits_{r \to r_2 + 0} \varphi(r) = \varphi(r_2)$. Следовательно, для $G_2 = G(r_2)$ модуль $M^*_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G_2/E)$ аппроксимируем изнутри.

Предложение 14. *Пусть* F_0, $F_1 \subset G$, $E \cap \partial G = \varnothing$, $E_0 = E \cap G$; $\{F_0^j\}$, $\{F_1^j\}$ – *убывающие последовательности компактов такие, что* $F_0^j \downarrow F_0 \subset G$, $F_1^j \downarrow F_1 \subset G$, F_0^j, F_1^j *являются замыканиями объединений конечного числа непересекающихся областей,* $F_0^j \cap F_1^j = \varnothing$, $\mathcal{H}_{n-1}(\partial F_0^j \cup \partial F_1^j) < \infty$, $F_0^{j+1} \Subset F_0^j$, $F_1^{j+1} \Subset F_1^j$, $\partial F_0^j \cap E = \varnothing$, $\partial F_1^j \cap E = \varnothing$. *Пусть* $\{E^j\}$ – *последовательность компактов такая, что* E^j *является замыканием объединения конечного числа непересекающихся областей,* $\mathcal{H}_{n-1}(\partial E^j) < \infty$ *и* $E^j \subset G \setminus (F_0^j \cup F_1^j)$, $E_0 \setminus (F_0^j \cup F_1^j) \Subset E_0^j$, $\partial E^j \cap E = \varnothing$, $E^j \cup F_0^j \cup F_1^j \downarrow F_0 \cup F_1 \cup E_0$. *Тогда*

$$M_{\mathcal{B},q}(F_0^j, F_1^j, G/E^j) \uparrow M_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G/E_0) = M_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G/E).$$

Доказательство. Построение указанных последовательностей F_0^j, F_1^j, E_0^j проводится по схеме, предложенной в [2, лемма 3]. Равенство $M_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G/E) = M_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G/E_0)$ очевидно в силу того, что для любого $\sigma \in \Sigma(F_0, F_1, R^n/E)$ имеем $\partial\big(G \cap B(\sigma)\big) \in \Sigma(F_0, F_1, R^n/E)$ и $\partial\big(G \cap B(\sigma)\big) \cap G \subset G \cap \sigma$. По условию, $\nabla\Sigma(F_0^j, F_1^j, G/E^j) \uparrow \nabla\Sigma(F_0, F_1, G/E)$ при $j \to \infty$. Ввиду монотонности модуля $M_{\mathcal{B},q}$ (см. [1, предложение 1]),

$$M_{\mathcal{B},q}(F_0^j, F_1^j, G/E^j) \uparrow M_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G/E),$$

что доказывает наше предложение.

Положим теперь E_0 равным объединению всех компонент связности множества E, имеющих общие точки с $\overline{G}$. По построению, E_0 – замкнутое относительно $R^n \backslash (F_0 \cup F_1)$ множество и $M_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G/E) = M_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G/E_0)$, $M^*_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G/E) = M^*_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G/E_0)$. Пусть $F_0^j, F_1^j, E_0^j, j \geq 1$, выбираются как и в предложении 14. А именно, F_0^j, F_1^j, E_0^j – попарно непересекающиеся компакты такие, что $F_0^j \downarrow F_0$, $F_1^j \downarrow F_1$, $F_0^j \cup F_1^j \cup E_0^j \downarrow F_0 \cup F_1 \cup E_0$, $(\partial F_0^j \cup \partial F_1^j \cup \partial E_0^j) \cap E = \varnothing$; F_0^j, F_1^j, E_0^j – объединения конечного числа непересекающихся замкнутых областей с конечной $\mathcal{H}_{n-1}$-границей. Положим $G^j = G \cup (\operatorname{int} F_0^j) \cup (\operatorname{int} F_1^j) \cup (\operatorname{int} E_0^j)$.

Предложение 15.

$$M_{\mathcal{B},q}(F_0^j, F_1^j, G/E_0^j) \uparrow M_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G/E) = M_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G/E_0),$$

$$M^*_{\mathcal{B},q}(F_0^j, F_1^j, G/E_0^j) \uparrow M^*_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G/E) = M^*_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G/E_0).$$

Доказательство. Заметим, что $\nabla\Sigma^j = \nabla\Sigma(F_0^j, F_1^j, G/E_0^j) \uparrow \nabla\Sigma = \nabla\Sigma(F_0, F_1, G/E)$. Действительно, возьмем функцию $u = \chi_{B(\sigma)\cap G^j}$, $\nabla\chi_{B(\sigma)\cap G^j} \in \nabla\Sigma^j$ и обозначим через $\nabla_{G^j} u$ обобщенный градиент функции u в G^j. По определению, $\nabla_{G^j} u$ как заряд сосредоточен на $G^j \setminus \left(F_0^j \cup F_1^j \cup E_0^j\right) \subset G$, значит, $\nabla_{G^j} u = \nabla_{G^{j+1}}(u\big|_{G^{j+1}}) = \nabla_G(u\big|_G)$. Поэтому $\nabla\Sigma^j \uparrow$ при $j \to \infty$ и $\bigcup\limits_{j\geq 1} \nabla\Sigma^j \subset \nabla\Sigma$. Обратно, для $u = \chi_{B(\sigma)\cap G}$, $\nabla\chi_{B(\sigma)\cap G} \in \nabla\Sigma(G)$ положим

$$\overline{u} = \begin{cases} u & \text{на } \ G, \\ u = 1 & \text{на } \ F_1^j \cup \left(E_0^j \cap B(\sigma)\right), \\ u = 0 & \text{на } \ F_0^j \cup \left(E_0^j \setminus B(\sigma)\right), \\ u = 0 & \text{в остальных точках } \ R^n. \end{cases}$$

Тогда для достаточно больших j заряд $\nabla_{G^j}\overline{u}$ сосредоточен на $G \setminus (F_0^j \cup F_1^j \cup E_0^j)$ и $\nabla_{G^j}\overline{u} = \nabla_G u$. Поэтому $\nabla_G u \in \nabla\Sigma^j$, что в силу монотонности модуля доказывает первое соотношение в предложении 15. Второе соотношение в предложении 15 следует из определения емкости $C^*_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G/E)$ и теоремы 1. Аналогично устанавливается следующее утверждение.

Предложение 16. *Пусть в условиях предложения* 15 *для фиксированного* $j = j_0$ *компакты* $F^{j_0}_{0,k}$, $F^{j_0}_{1,k}$, $E^{j_0}_{0,k}$, $k \geq 1$, *выбираются аналогично* F^j_0, F^j_1, E^j_0 *с той лишь разницей, что* $F^{j_0}_{0,k} \downarrow F^{j_0}_0$, $F^{j_0}_{1,k} \downarrow F^{j_0}_1$, $F^{j_0}_{0,k} \cup F^{j_0}_{1,k} \cup E^{j_0}_{0,k} \downarrow F^{j_0}_0 \cup F^{j_0}_1 \cup E^{j_0}_0$. *Положим* $G^{j_0}_k = G^{j_0} \cup (\operatorname{int} F^{j_0}_{0,k}) \cup (\operatorname{int} F^{j_0}_{1,k}) \cup (\operatorname{int} E^{j_0}_{0,k})$. *Тогда при* $k \to \infty$

$$M_{\mathcal{B},q}(F^{j_0}_0, F^{j_0}_1, G^{j_0}_k / E^{j_0}_0) \uparrow M_{\mathcal{B},q}(F^{j_0}_0, F^{j_0}_1, G^{j_0} / E^{j_0}_0),$$

$$M^*_{\mathcal{B},q}(F^{j_0}_0, F^{j_0}_1, G^{j_0}_k / E^{j_0}_0) \uparrow M^*_{\mathcal{B},q}(F^{j_0}_0, F^{j_0}_1, G^{j_0} / E^{j_0}_0).$$

Возьмем теперь какое-нибудь множество $G^{j_0}_k$ из предложения 16. По построению, $\partial G^{j_0}_k \cap \big(E \cup F^{j_0}_0 \cup F^{j_0}_1\big) = \varnothing$. Выберем последовательность открытых множеств $G^{j_0}_{k,l}$, $l \geq 1$, исчерпывающих изнутри $G^{j_0}_k$, такую, что $G^{j_0}_{k,l} \Subset G^{j_0}_{k,l+1}$, $F^{j_0}_0 \cup F^{j_0}_1 \cup E^{j_0}_0 \subset G^{j_0}_{k,l}$, $\mathcal{H}_{n-1}(\partial G^{j_0}_{k,l}) < \infty$. Тогда имеет место следующее утверждение.

Предложение 17.

$$\lim_{l\to\infty} M^*_{\mathcal{B},q}(F^{j_0}_0, F^{j_0}_1, G^{j_0}_{k,l}/E^{j_0}_0) \leq M^*_{\mathcal{B},q}(F^{j_0+1}_0, F^{j_0+1}_1, G^{j_0}_k / E^{j_0+1}_0).$$

Доказательство. В силу предложения 12

$$M^*_l = M^*_{\mathcal{B},q}(F^{j_0}_0, F^{j_0}_1, G^{j_0}_{k,l}/E^{j_0}_0)$$

– убывающая последовательность, следовательно, $\lim\limits_{l\to\infty} M^*_l$ существует. Пусть теперь функция $u_l \in \operatorname{adm}_{\mathcal{A},p}(F^{j_0}_0, F^{j_0}_1, G^{j_0}_{k,l}/E^{j_0}_0)$ такая, что $\mathcal{A}_p(\nabla u_l)^p < C^*_{\mathcal{A},p}(F^{j_0}_0, F^{j_0}_1, G^{j_0}_{k,l}/E^{j_0}_0) + \frac{1}{l}$. По построению, согласно предложению 6, $C^*_{\mathcal{A},p}(F^{j_0}_0, F^{j_0}_1, G^{j_0}_{k,l}/E^{j_0}_0) \leq C^*_{\mathcal{A},p}(F^{j_0}_0, F^{j_0}_1, G^{j_0}_k / E^{j_0}_0) < \infty$. Применяя к последовательности u_l, $l \geq 1$, рассуждения из доказательства предложения 7, получим подпоследовательность u_{l_s} такую, что $u = \lim\limits_{s\to\infty} u_{l_s}$ в $L^1_{p,w}(G^{j_0}_k)$ принадлежит $\mathcal{D}^*(F^{j_0+1}_0, F^{j_0+1}_1, G^{j_0}_k / E^{j_0+1}_0)$, значит,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_p(\nabla u)^p &= \lim_{l\to\infty} C^*_{\mathcal{A},p}(F^{j_0}_0, F^{j_0}_1, G^{j_0}_{k,l}/E^{j_0}_0)\\ &\geq C^*_{\mathcal{A},p}(F^{j_0+1}_0, F^{j_0+1}_1, G^{j_0}_k / E^{j_0+1}_0).\end{aligned}$$

По теореме 1 это равносильно требуемому неравенству в предложении 17.

Предложение 18. *Пусть* F_0, $F_1 \subset G$, $E \cap \partial G = \varnothing$ *и модуль* $M_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G/E)$ *аппроксимируем изнутри. Тогда*

$$M_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G/E) \le M^*_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G/E).$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. По условию, найдется открытое множество G_1 такое, что $\overline{G}_1 \subset G$, F_0, $F_1 \subset G_1$, $\overline{G \setminus G_1} \cap E = \varnothing$,

$$M^*_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G_1/E) \le M^*_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G/E) + \varepsilon. \tag{7}$$

Ввиду предложения 14, в G найдутся непересекающиеся компакты F_0^1, F_1^1, E_0^1 такие, что $F_0 \subset \operatorname{int} F_0^1 \subset F_0^1$,] $F_1 \subset \operatorname{int} F_1^1 \subset F_1^1$, $(\partial F_0^1 \cup \partial F_1^1) \cap E_0^1 = \varnothing$, $E_0 \setminus (F_0^1 \cup F_1^1) \subset \operatorname{int} E_0^1$,

$$M_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G/E) \le M_{\mathcal{B},q}(F_0^1, F_1^1, G/E_0^1) + \varepsilon. \tag{8}$$

Покажем, что

$$M_{\mathcal{B},q}(F_0^1, F_1^1, G/E_0^1) \le M^*_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G_1/E). \tag{9}$$

Не ограничивая общности, будем считать, что $M^*_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G_1/E) < \infty$.

Пусть $\xi \wedge \nabla\mathcal{D}^*(F_0, F_1, G_1/E)$. Положим $\overline{\xi} = \xi$ на G_1 и $\overline{\xi} = 0$ для $x \in R^n \setminus \big(G_1 \setminus (F_0 \cup F_1 \cup E)\big)$. Пусть $\xi_r = \int\limits_{|y|<1} \overline{\xi}(x + ry)\psi(y)\,dy$, где $\psi(x) = \psi_1(|x|)$, $\psi_1(r)$ – неотрицательная функция на $0 \le r < \infty$, $\psi_1 = 0$ на $1 \le r < \infty$, $\psi(x) \in C_0^\infty(R^n)$, $\int\limits_{R^n} \psi(x)\,dx = 1$. Пусть

$$G_2 = \left\{ x \in G : d(x, \partial G) > \frac{1}{2} d(\overline{G_1}, \partial G) \right\}$$

и

$$r_0 = \min\left\{ d(\partial F_0 \cup \partial F_1 \cup \partial E, \partial F_0^1 \cup \partial F_1^1 \cup \partial E_0^1), \frac{1}{2} d(\overline{G_1}, \partial G_2) \right\}.$$

Тогда (см. [7, п. 1.1.5]) $\xi_r \in C_0^\infty(G_2, R^n)$ для $0 < r < r_0$. Кроме того, $\xi_r \wedge \nabla\mathcal{D}^*(F_0^1, F_1^1, G/E_0^1)$. Действительно,

$$\begin{aligned}\int\limits_G \xi_r \nabla u\,dx &= \int\limits_{|y|<1} \psi(y)\,dy \int\limits_G \overline{\xi}(x + ry)\nabla u(x)\,dx \\ &= \int\limits_{|y|<1} \psi(y)\,dy \int\limits_{G_1} \xi(x)\nabla u(x - ry)\,dx.\end{aligned}$$

По построению, $u(x-ry)\big|_{G_1} \in \mathcal{D}^*(F_0, F_1, G_1/E)$ для $|y|<1$. Поэтому $\int\limits_{G_1} \xi\ \nabla u(x-ry)\,dx \ge 1$, что влечет неравенство $\int\limits_G \xi_r(x)\ \nabla u(x)\,dx \ge 1$, значит, $\xi_r \wedge \nabla\mathcal{D}^*(F_0^1, F_1^1, G/E_0^1)$.

Покажем теперь, что

$$\xi_r \wedge \nabla\Sigma(F_0^1, F_1^1, G/E_0^1). \tag{10}$$

Известно, что функция ограниченной вариации аппроксимируется гладкими функциями (см. [7, теорема 6.1.2]), образованными подходящими усреднениями этой функции (типа ξ_r). Пусть

$$\nabla\chi_{B(\sigma)} \in \Sigma(F_0^1, F_1^1, G/E_0^1), \quad \sigma \in \Sigma(F_0^1, F_1^1, R^n/E_0^1).$$

Тогда, в силу $0 \le \chi_{B(\sigma)\cap G} \le 1$, существует последовательность гладких функций $u_j \in C^\infty(G)$, $0 \le u_j \le 1$ таких, что $u_j = 0$ в окрестности $F_0^1 \cup (E_0^1 \cap (R^n \setminus \overline{B}(\sigma)))$ и $u_j = 1$ в окрестности $F_1^1 \cup (E_0^1 \cap \overline{B}(\sigma))$, $u_j \to u = \chi_{B(\sigma)}$ в $L^1(G)$, $\|u_j\|_{BV(G)} \to \|\chi_{B(\sigma)}\|_{BV(G)}$ и $\nabla u_j \to \nabla\chi_{B(\sigma)}$ слабо, т.е. $\int\limits_G \varphi\cdot\nabla u_j\,dx \to \int\limits_G \varphi\cdot\nabla u$ для всех $\varphi \in C_0^\infty(G, R^n)$. Возьмем теперь функцию $f \in C_0^\infty(G)$ такую, что $0 \le f \le 1$, $f = 1$ на G_2. Тогда $f\cdot u_j \in C_0^\infty(G)$ и $f\cdot u_j \in \mathcal{D}^*(F_0^1, F_1^1, G/E_0^1)$. Поскольку $\xi_r \in C_0^\infty(G_2, R^n)$ и $\xi_r \wedge \nabla\mathcal{D}^*(F_0^1, F_1^1, G/E_0^1)$, то

$$1 \le \int\limits_G \xi_r\ \nabla(fu_j)\,dx = \int\limits_{G_2} \xi_r\ \nabla u_j\,dx = \int\limits_G \xi_r\ \nabla u_j\,dx \to \int\limits_G \xi_r\ \nabla\chi_{B(\sigma)}.$$

Тем самым (10) установлено. Из (10) сразу следует, что

$$M_{\mathcal{B},q}(F_0^1, F_1^1, G/E_0^1) \le \mathcal{B}_q(\xi_r)^q.$$

При $r \to 0$ также имеем

$$M_{\mathcal{B},q}(F_0^1, F_1^1, G/E_0^1) \le \mathcal{B}_q(\xi)^q.$$

Беря здесь инфимум относительно ξ, получим (9). Соединение (7), (8) и (9) и произвол в выборе $\varepsilon > 0$ приводят к предложению 18.

Предложение 19. $M^*_{\mathcal{B},q}(F_0,F_1,G/E) \geq M_{\mathcal{B},q}(F_0,F_1,G/E)$.

Доказательство. Не ограничивая общности, считаем, что

$$M^*_{\mathcal{B},q}(F_0,F_1,G/E) < \infty.$$

Используя обозначения из предложений 16, 17, для заданного $\varepsilon > 0$ выберем $j_0 \in \mathbb{N}$ таким, что для $j \geq j_0$, в силу предложения 16, выполняются неравенства

$$\begin{aligned} M^*_{\mathcal{B},q}(F_0,F_1,G/E) - \frac{\varepsilon}{3} &\leq M^*_{\mathcal{B},q}(F_0^j,F_1^j,G^j/E_0^j) \\ &\leq M^*_{\mathcal{B},q}(F_0,F_1,G/E) + \frac{\varepsilon}{3}, \\ M_{\mathcal{B},q}(F_0,F_1,G/E) - \frac{\varepsilon}{3} &\leq M_{\mathcal{B},q}(F_0^j,F_1^j,G^j/E_0^j) \\ &\leq M_{\mathcal{B},q}(F_0,F_1,G/E) + \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned} \tag{11}$$

Для каждого такого j, согласно предложению 16, можно найти k, для которого будут справедливы соотношения

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B},q}(F_0^j,F_1^j,G^j/E_0^j) - \frac{\varepsilon}{3} &\leq M_{\mathcal{B},q}(F_0^j,F_1^j,G_k^j/E_0^j) \\ &\leq M_{\mathcal{B},q}(F_0^j,F_1^j,G^j/E_0^j) + \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned} \tag{12}$$

Ввиду предложений 16, 17, при достаточно больших l имеем

$$\begin{aligned} M^*_{\mathcal{B},q}(F_0^j,F_1^j,G_{kl}^j/E_0^j) - \frac{\varepsilon}{3} &\leq M^*_{\mathcal{B},q}(F_0^{j+1},F_1^{j+1},G_k^j/E_0^{j+1}) \\ &\leq M^*_{\mathcal{B},q}(F_0^{j+1},F_1^{j+1},G^{j+1}/E_0^{j+1}). \end{aligned} \tag{13}$$

Применяя предложение 13, найдем открытое множество G_2, $G_{kl}^j \Subset G_2 \Subset G_k^j$, для которого

$$\begin{aligned} &M_{\mathcal{B},q}(F_0^j,F_1^j,G_k^j/E_0^j) \leq M_{\mathcal{B},q}(F_0^j,F_1^j,G_2/E_0^j) \\ &\quad \leq M^*_{\mathcal{B},q}(F_0^j,F_1^j,G_2/E_0^j) \leq M^*_{\mathcal{B},q}(F_0^j,F_1^j,G_{kl}^j/E_0^j). \end{aligned} \tag{14}$$

Соединяя (11)–(13) с неравенствами (14), приходим к неравенству

$$M_{\mathcal{B},q}(F_0,F_1,G/E) - \frac{2\varepsilon}{3} \leq M^*_{\mathcal{B},q}(F_0,F_1,G/E) + \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Отсюда, учитывая произвол в выборе ε, получим справедливость утверждения 19.

Объединим результаты предложений 9, 10, 19 в виде теоремы.

Теорема 2. $M_{\mathcal{B},q}(\nabla\Sigma(G)) = M_q(|\sqrt{A}\nabla\Sigma(G)|) = M_{\mathcal{B},q}(\nabla\mathcal{D}^*)$.

Используем теперь обозначения из предложений 14, 15 и доказательства предложения 19, где для удобства положим $G^j_{k,l} = G_j$, $G^j_{k,l+1} = \widetilde{G}_j$. Отметим, что, по построению, $G_j \Subset \widetilde{G}_j$, $\mathcal{H}_{n-1}(\partial G_j) < \infty$, $\mathcal{H}_{n-1}(\partial\widetilde{G}_j) < \infty$, $F^j_0 \cup F^j_1 \cup E^j_0 \subset G_j$, $E \cap \partial G = \varnothing$. Номера k, l выбираются по заданному j так, чтобы выполнялись соотношения (12), (13). Тогда при $\varepsilon \to 0$ из доказательства предложения 19 следует еще одно утверждение.

Предложение 20.

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty} M_{\mathcal{B},q}(F^j_0, F^j_1, G^j/E^j_0) &= \lim_{j\to\infty} M_{\mathcal{B},q}(F^j_0, F^j_1, \widetilde{G}_j/E^j_0) \\ &= M_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G/E_0) = M_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G/E).\end{aligned}$$

Замечание. Пусть

$$\Sigma_j = \left\{\sigma \in \Sigma(F_0, F_1, R^n/E), d(\sigma, F_0 \cup F_1 \cup E) > \frac{1}{j}\right\}$$

для $j \in \mathbb{N}$. Тогда выбор в предложениях 19, 20 конденсаторов $(F^j_0, F^j_1, G^j/E^j_0)$, $(F^j_0, F^j_1, \widetilde{G}^j/E^j_0)$ можно осуществить таким образом, что

$$\sigma \cap G_j \subset \sigma \cap G, \sigma \cap \widetilde{G}_j \subset \sigma \cap G, d(\sigma \cap \widetilde{G}_j, \partial G) \geq d(G_j, \partial G) > 0,$$

$$d(\sigma, F^j_0 \cup F^j_1 \cup E^j_0) > \frac{1}{2j} \text{ для всех } \sigma \in \Sigma_j.$$

§3. Достаточность семейства полиэдральных поверхностей

Как известно [16], при вычислении модуля семейства кривых, соединяющих пластины конденсатора, можно ограничиться рассмотрением семейства ломаных, соединяющих эти пластины (свойство достаточности семейства ломаных). Это позволяет в некоторых случаях довольно эффективно описать устранимые множества (см. [16, теоремы 3.2–3.4]) для указанных модулей.

Имея целью в следующих публикациях получить точные характеристики устранимых множеств для модуля $M_{\mathcal{B},q}(\nabla\Sigma(G))$, установим достаточность семейства полиэдральных поверхностей (см. теорему 4) при вычислении $M_{\mathcal{B},q}(\nabla\Sigma(G))$.

Пусть D – открытое множество и $\xi \wedge \nabla\Sigma^0(F_0, F_1, D/E) - (q, w)$-п.в., $\xi = (0, \dots, 0)$ на $R^n \setminus \big(D \setminus (F_0 \cup F_1 \cup E)\big)$. Положим для $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$

$$\xi_r(x) = \frac{1}{|B(0,r)|} \int\limits_{B(0,r)} \xi(x+y)\,dy, \quad \text{где} \quad |B(x,r)| = \mathcal{L}_n(B(x,r)),$$
$$\xi_{i,r}(x) = \frac{1}{|B(0,r)|} \int\limits_{B(0,r)} \xi_i(x+y)\,dy, \quad i = 1, \dots, n.$$

Отметим, что, по построению, $|\xi_{i,r}(x)| \le M(\xi_i(x))$, где $M(\xi_i(x))$ – максимальная функция Харди для $\xi_i(x)$.

Как известно [5, теорема 5.11], $\|M(\xi_i(x))\|_{q,\widetilde{w}} \le \text{const}\, \|\xi_i(x)\|_{q,\widetilde{w}}$,

$$\int\limits_{R^n} |\xi_{i,r}(x) - \xi_i(x)|^q \; \widetilde{w}\,dx \to 0 \;\; \text{при} \;\; r \to 0 \;\; \text{для} \;\; i = 1, \dots, n,$$

что дает
$$\int\limits_{R^n} |\xi_r - \xi|^q \; \widetilde{w}\,dx \to 0 \;\; \text{при} \;\; r \to 0.$$

Теорема 3. *Пусть F_0, $F_1 \subset G$, $\partial G \cap E = \varnothing$, $\mathcal{H}_{n-1}(\partial G) < \infty$ и D – открытое множество такое, что $D \Subset G$, $F_0 \cup F_1 \subset D$. Если $\xi \wedge \nabla\Sigma^0(F_0, F_1, D/E) - (q, w)$-п.в., то $\xi \wedge \nabla\Sigma(F_0, F_1, G/E) - (q, w)$-п.в.*

Доказательство. Введем для $k \in \mathbb{N}$.

$$\Sigma_k(R^n) = \left\{\sigma : \sigma \in \Sigma(F_0, F_1, R^n/E) \;\; \text{и} \;\; d(\sigma, F_0 \cup F_1 \cup E)) > \frac{1}{k}\right\},$$
$$\Sigma_k^0(R^n) = \big\{\sigma : \sigma \in \Sigma^0(F_0, F_1, R^n/E) \cap \Sigma_k(R^n)\big\},$$
$$\nabla\Sigma_k(G) = \big\{\nabla\chi_{B(\sigma)} : \sigma \in \Sigma_k(R^n), \nabla\chi_{B(\sigma)} \in BV(G)\big\},$$
$$\nabla\Sigma_k^0(G) = \big\{\nabla\chi_{B(\sigma)} : \sigma \in \Sigma_k^0(R^n)\big\}.$$

По построению,
$$\nabla\Sigma(G) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Sigma_k(G)$$
и $M_{\mathcal{B},q}(\nabla\Sigma(G)) = \lim\limits_{k\to\infty} M_{\mathcal{B},q}(\nabla\Sigma_k(G))$.

Пусть $\xi \wedge \nabla\Sigma^0(F_0, F_1, D/E) - (q,w)$-п.в. и в определении $\xi_r(x)$ положим $0 < r < \min\left\{\frac{1}{k}, d(D,\partial G)\right\}$. Покажем, что $\xi \wedge \nabla\Sigma_k(G)$. Действительно, рассмотрим интеграл $\int\limits_G \xi_r \nabla\chi_{B(\sigma)}$, $\nabla\chi_{B(\sigma)} \in \nabla\Sigma_k^0(G)$. В силу предложения 1, утверждения 1 и определений (2)

$$\begin{aligned}\int\limits_G \xi_r \nabla\chi_{B(\sigma)} &= \int\limits_{\sigma\cap G} \xi_r \nu \, d\mathcal{H}_{n-1} = \int\limits_{\sigma} \xi_r \nu \, d\mathcal{H}_{n-1} \\ &= \int\limits_{\sigma} \left(\frac{1}{|B(0,r)|} \int\limits_{B(0,r)} \xi(x+y) dy \right) \nu \, d\mathcal{H}_{n-1}.\end{aligned} \tag{15}$$

Отметим, что $\nabla\chi_{B(\sigma)} = \nabla\chi_{B(\sigma),R^n}\big|_G$ – сужение заряда $\nabla\chi_{B(\sigma),R^n}$ на G. Поскольку $\xi_r(x)$ непрерывна на R^n, $\operatorname{supp}\xi_{i,r}(x) \Subset G$ для $i = 1,\dots,n$, то повторный интеграл в (15) равномерно ограничен при всех r, достаточно близких к 0. Аналогичное рассуждение справедливо и для

$$\int\limits_{\sigma} \left(\frac{1}{|B(0,r)|} \int\limits_{B(0,r)} \xi(x+y)\, dy \right) d\mathcal{H}_{n-1}. \tag{16}$$

По определению, σ состоит из конечного числа $(n-1)$-мерных симплексов Π_l, $l = 1,\dots,m$, расположенных на гиперплоскостях и, возможно, попарно пересекающихся по множествам $\mathcal{H}_{n-1}$-меры 0.

Установим, что в (15) можно поменять порядок интегрирования. Для этого достаточно показать справедливость данного свойства, когда в роли $\sigma = \bigcup\limits_{l=1}^{m} \Pi_l$ в (15) берется Π_l, $l = 1,\dots,m$. В этом случае $\nu = \mathrm{const}$ и является единичным вектором нормали к гиперплоскости, на которой лежит Π_l, и ν можно вынести за знак повторного интеграла в (15). Положим для $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$, $\xi_i = \xi_i^+ - \xi_i^-$, где $\xi_i^+ = \max\{\xi_i, 0\}$, $\xi_i^- = \max\{-\xi_i, 0\}$, $i = 1,\dots,n$.

Ввиду ограниченности повторного интеграла в (16), повторные интегралы

$$\int\limits_{\sigma} \frac{1}{|B(0,r)|} \int\limits_{B(0,r)} \xi_i^{\pm} \, d\mathcal{H}_{n-1}. \tag{17}$$

конечны и по теореме Фубини для неотрицательных функций (см. [14, теорема 1.12]) в (17) можно изменить порядок интегрирования.

Отсюда следует, что и в (15) можно изменить порядок интегрирования:

$$\int_\sigma \left(\frac{1}{|B(0,r)|}\int_{B(0,r)} \xi(x+y)\,dy\right)\nu\,d\mathcal{H}_{n-1} = \frac{1}{|B(0,r)|}\int_{B(0,r)} dy\int_{\sigma_y}\xi(z)\nu(z)\,d\mathcal{H}_{n-1}, \tag{18}$$

где σ_y – результат переноса σ на вектор $y \in B(0,r)$. Пусть теперь $\mathcal{E}$ обозначает $(q,\widetilde{w})$-исключительное семейство зарядов $\nabla\chi_{B(\sigma_y),D}$, $\sigma \in \Sigma_k^0(R^n)$. Соответственно, для каждого $\sigma \in \Sigma_k^0(R^n)$ рассмотрим множество Y векторов $y \in B(0,r)$, для которых $\nabla\chi_{B(\sigma_y),D} \in \mathcal{E}$. Покажем, что $\mathcal{L}_n(Y) = 0$. Ввиду определения $(q,\widetilde{w})$-исключительного множества, по теореме Фюгледе (см. [8,теорема 2]) найдется функция $h \in L_+^{q,\widetilde{w}}(R^n)$, $h = 0$ на $R^n \setminus D$ такая, что $\int\limits_D h|\nabla\chi_{B(\sigma_y),D}| = \infty$. Для произвольного вектора $y \in B(0,r)$, согласно (3), имеем

$$\int_D h|\nabla\chi_{B(\sigma_y),D}| = \int_{\sigma_y} h|\nabla\chi_{B(\sigma_y),D}| = \int_{\sigma_y} h\,d\mathcal{H}_{n-1} = \int_\sigma h(x+y)\,d\mathcal{H}_{n-1}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{|B(0,r)|}\int_{B(0,r)} dy\int_\sigma h(x+y)\,d\mathcal{H}_{n-1} = \int_\sigma\left(\frac{1}{|B(0,r)|}\int_{B(0,r)} h(x+y)\,dy\right)d\mathcal{H}_{n-1} < \infty$$

поскольку внутренний интеграл справа – непрерывная функция на R^n. Следовательно, $\int\limits_{\sigma_y} h\,d\mathcal{H}_{n-1} < \infty$ для $\mathcal{L}_n$-почти всех ($\mathcal{L}_n$-п.в.) $y \in B(0,r)$. Тем самым в (18) с учетом того, что $\sigma_y \in \Sigma^0(F^0,F^1,R^n/E)$, внутренний интеграл $\int\limits_{\sigma_y}\xi(z)\nu(z)\,d\mathcal{H}_{n-1} = \int\limits_{\sigma_y}\xi\ \nabla\chi_{B(\sigma_y),D} \geq 1$ для $\mathcal{L}_n$-п.в. $y \in B(0,r)$. Поэтому $\xi_r \wedge \nabla\Sigma_k^0(G)$. Пусть теперь $\nabla\chi_{B(\sigma)} \in \nabla\Sigma(G)$. Тогда можно указать $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\nabla\chi_{B(\sigma)} \in \nabla\Sigma_k(G)$ для всех $k \geq k_0$. Поскольку $F_0, F_1 \subset G$, $\partial G \cap E = \varnothing$, то $\partial(B(\sigma)\cap G) \in$

$\Sigma(F_0, F_1, R^n/E)$ и $\partial(B(\sigma)\cap G)\cap G \subset \sigma\cap G$. Более того, для любого компакта $K \subset R^n$: $\mathcal{H}^{n-1}\Big(K\cap\partial_*(B(\sigma)\cap G)\Big) \le \mathcal{H}^{n-1}\big(\partial G\big)+\mathcal{H}^{n-1}\Big(\partial_*(B(\sigma)\cap G)\cap G\Big) < \infty$, что в силу критерия конечного периметра ([8, теорема 1, с. 72]) дает соотношение $\chi_{B(\sigma)\cap G} \in BV(R^n)$.

По теореме Федерера и Флеминга [17], найдется последовательность n-мерных полиэдров P_i таких, что

1. $P_i \subset \Big\{x : d\big(x, B(\sigma)\cap G\big) < \frac{1}{i}\Big\}$;
2. $\mathcal{L}(\partial P_i) \to \mathcal{H}_{n-1}\big(\partial^*(B(\sigma)\cap G)\big)$ при $i\to\infty$;
3. $\mathcal{H}_{n-1}(\partial P_i) \to \mathcal{H}_{n-1}\big(\partial^*(B(\sigma)\cap G)\big)$ при $i\to\infty$;
4. $\partial P_i \subset \{x : d\big(x, \partial^*(B(\sigma)\cap G)\big) < \frac{1}{i}\}$;
5. $\nabla\chi_{P_i,R^n} \to \nabla\chi_{B(\sigma)\cap G,R^n}$ слабо, когда $i\to\infty$, т.е. $\int f\nabla\chi_{P_i,R^n} \to \int f\nabla\chi_{B(\sigma)\cap G,R^n}$ для любой непрерывной функции $f : R^n \to R^n$ с компактным носителем.

По построению, для достаточно больших i справедливо $\partial P_i \in \Sigma_k^0(R^n)$. Поэтому

$$\int\limits_G \xi_r\nabla\chi_{P_i} \to \int\limits_G \xi_r\nabla\chi_{B(\sigma)} \ge 1. \tag{19}$$

Поскольку $\int\limits_G |\xi_r - \xi|^q\widetilde{w}\,dx \to 0$ при $r\to 0$, то по теореме Фюгледе (см. [8, теорема 3])

$$\int\limits_G |\xi_{r_i} - \xi||\nabla\chi_{B(\sigma)}| \to 0 \text{ для } (q,\widetilde{w})\text{-п.в. } \ |\nabla\chi_{B(\sigma)}| \in |\nabla\Sigma(G)|$$

для некоторой последовательности $r_i \downarrow 0$. Ввиду известной оценки модуля интеграла (см. §1), это дает для соответствующих зарядов $\nabla\chi_{B(\sigma)}$ следующее равенство

$$\lim_{r_i\to 0}\Big|\int \xi_{r_i}\nabla\chi_{B(\sigma)} - \int \xi\nabla\chi_{B(\sigma)}\Big| = 0.$$

Соединяя это с (19), приходим к нужному свойству в теореме 3: $\xi \wedge \nabla\Sigma(G)$ $(q,\widetilde{w})$- п.в.

Используем теперь обозначения из предложения 20 и замечания к нему. Положим $\Sigma^0(F_0^j, F_1^j, G^j/E_0^j,) = \Sigma^{0,j}$, $j = 1, 2, \ldots$. Тогда свойство достаточности семейства полиэдральных поверхностей в проблеме модуля $M_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G/E)$ можно сформулировать следующим образом.

Теорема 4. $\lim\limits_{j\to\infty} M_{\mathcal{B},q}(\nabla\Sigma^{0,j}) = M_{\mathcal{B},q}(\nabla\Sigma(G))$.

Доказательство. Пусть $\xi \wedge \nabla\Sigma^{0,j}$ $(q, \widetilde{w})$-п.в. По теореме 3, $\xi \wedge \nabla\Sigma(F_0^j, F_1^j, \widetilde{G}_j/E_0^j)$ $(q, \widetilde{w})$-п.в. Поскольку $\nabla\Sigma^{0,j} \subset \nabla\Sigma(F_0^j, F_1^j, G_j/E_0^j)$, то в силу произвола в выборе ξ имеем

$$M_{\mathcal{B},q}(F_0^j, F_1^j, \widetilde{G}_j/E_0^j) \leq M_{\mathcal{B},q}(\nabla\Sigma^{0,j}) \leq M_{\mathcal{B},q}(F_0^j, F_1^j, G_j/E_0^j).$$

Ввиду предложения 20, при $j \to \infty$ эти соотношения приводят к теореме 4.

Положим $\nabla\Sigma_j^{0,j} = \left\{\nabla\chi_{B(\sigma)\cap G_j} \in \nabla\Sigma^{0,j}, d(\sigma, F_0, F_1 \cup E) > \frac{1}{j}\right\}$ и напомним (см. доказательство теоремы 3), что

$$\nabla\Sigma_j(G) = \left\{\nabla\chi_{B(\sigma)} \in \nabla\Sigma(G) \ \text{ и } \ d(\sigma, F_0 \cup F_1 \cup E) > \frac{1}{j}\right\}.$$

Учитывая замечание к предложению 20 и равенство $M_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G/E) = \lim\limits_{j\to\infty} M_{\mathcal{B},q}(\nabla\Sigma_j(G))$, результат теоремы 4 можно дополнить следующим образом.

Теорема 5. $\lim\limits_{j\to\infty} M_{\mathcal{B},q}(\nabla\Sigma_j^{0,j}) = M_{\mathcal{B},q}(\nabla\Sigma(G))$.

Литература

1. H. Aikawa, M. Ohtsuka, *Extremal length of vector measures.* — Ann. Acad. Sci. Fenn. Math **24** (1999), 61–88.
2. В. А. Шлык, *Емкость конденсатора и модуль семейства разделяющих поверхностей.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **185** (1990), 168–182.
3. B. Muckenhoupt, *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal functions.* — Trans. Amer. Math. Soc. **192** (1972), 207–226.
4. И. Н. Дёмшин, В. А. Шлык, *Критерии устранимых множеств для пространств* $L^1_{p,w}$, $FD^{p,w}$. — Докл. РАН **343** (1995), No. 5, 550–552.
5. M. Ohtsuka, *Extremal length and precise functions.* — GAKUTO International Journal, Advances in Math. Sciences and Appl. **19** (2003), 1–343.

6. Э. Джусти, *Минимальные поверхности и функции ограниченной вариации.* М., 1989.
7. В. Г. Мазья, *Пространства С. Л. Соболева.* Л., 1985.
8. Л. К. Эванс, Р. Ф. Гариепи, *Теория меры и тонкие свойства функций.* Новосибирск, 2002.
9. W. P. Ziemer, *Extremal length and conformal capacity.* — Trans. Amer. Math. Soc. **126**, No 3 (1967), 460–473.
10. B. Fuglede, *Extremal length and functional completion.* — Acta Math. **126**, No. 3 (1957), 171–219.
11. И. Экланд, Р. Темам, *Выпуклый анализ и вариационные проблемы.* М., 1979.
12. В. М. Гольдштейн, Ю. Г.Решетняк, *Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения.* М., 1983.
13. Н. Бурбаки, *Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара.* М., Наука, 1970.
14. Э. Либ, М. Лосс, *Анализ.* Новосибирск, 1998.
15. В. М. Миклюков, *Введение в негладкий анализ.* Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2008.
16. В. В. Асеев *NED-множества, лежащие в гиперплоскости.* — Сиб. мат. ж., **50(5)** (2009), 760–775.
17. H. Federer, W. H. Fleming, *Normal and integral currents.* — Ann. Math. **72** (1960), 458–520.

Pugach P. A., Shlyk V. A. Generalized capacities and polyhedral surfaces.

In the paper, we apply the theory of extremal length of vector measures to establish that the generalized condenser capacity in the sense of Aikawa and Ohtsuka is related to the module of a family of surfaces separating the condenser's plates and no intersecting prescribed set. We prove that the system of the polyhedral surfaces from the above family is sufficient to approximate the module of this family.

Владивостокский филиал
Российской Таможенной Академии,
ул. Стрелковая, 16в,
690034 Владивосток, Россия
E-mail: 679097@mail.ru

Поступило 11 мая 2010 г.

Дальневосточный
государственный университет,
ул. Суханова, 8,
690950 Владивосток, Россия
E-mail: shlyknv@yandex.ru