



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Т. Асанова, Д. С. Джумабаев, Корректная разрешимость нелокальных краевых задач для систем гиперболических уравнений, *Дифференц. уравнения*, 2005, том 41, номер 3, 337–346

<https://www.mathnet.ru/de11241>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.173

24 апреля 2025 г., 06:58:43



УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.3

КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛОКАЛЬНЫХ
КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ
ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

© 2005 г. А. Т. Асанова, Д. С. Джумабаев

В области $\bar{\Omega} = [0, \omega] \times [0, T]$ рассматривается краевая задача с данными на характеристиках для системы гиперболических уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + B(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} + C(x, t)u + f(x, t), \quad (1)$$

$$u(0, t) = \psi(t), \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

$$P_2(x) \frac{\partial u(x, 0)}{\partial x} + P_1(x) \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} + P_0(x)u(x, 0) + S_2(x) \frac{\partial u(x, T)}{\partial x} + S_1(x) \frac{\partial u(x, T)}{\partial t} + S_0(x)u(x, T) = \varphi(x), \quad x \in [0, \omega], \quad (3)$$

где $u = \text{colon}(u_1, u_2, \dots, u_n)$, $n \times n$ -матрицы $A(x, t)$, $B(x, t)$, $C(x, t)$, $P_2(x)$, $P_1(x)$, $P_0(x)$, $S_2(x)$, $S_1(x)$, $S_0(x)$, n -вектор-функции $f(x, t)$, $\varphi(x)$ непрерывны на $\bar{\Omega}$, $[0, \omega]$ соответственно и n -вектор-функция $\psi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0, T]$.

Через $C(\bar{\Omega}, R^n)$ (соответственно $C([0, \omega], R^n)$, $C([0, T], R^n)$) обозначим пространство непрерывных на $\bar{\Omega}$ функций $u : \bar{\Omega} \rightarrow R^n$ ($\varphi : [0, \omega] \rightarrow R^n$, $\psi : [0, T] \rightarrow R^n$) с нормой $\|u\|_0 = \max_{(x,t) \in \bar{\Omega}} \|u(x, t)\|$ ($\|\varphi\|_1 = \max_{x \in [0, \omega]} \|\varphi(x)\|$, $\|\psi\|_2 = \max_{t \in [0, T]} \|\psi(t)\|$),

$$\|u(x, t)\| = \max_{i=1, n} |u_i(x, t)|, \quad \|A\|_0 = \max_{(x,t) \in \bar{\Omega}} \|A(x, t)\| = \max_{(x,t) \in \bar{\Omega}} \max_{i=1, n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}(x, t)|,$$

$L(X, Y)$ – пространство линейных ограниченных операторов $H : X \rightarrow Y$ с индуцированной нормой, X , Y – банаховы пространства.

Функция $u(x, t) \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, имеющая частные производные $\partial u(x, t)/\partial x \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, $\partial u(x, t)/\partial t \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, $\partial^2 u(x, t)/\partial t \partial x \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, называется классическим решением задачи (1)–(3), если она удовлетворяет системе (1) при всех $(x, t) \in \bar{\Omega}$ и выполнены краевые условия (2), (3).

Нелокальные краевые задачи для систем гиперболических уравнений изучались многими авторами (отметим лишь работы [1–8], где можно найти библиографию по этим задачам). Различными методами установлены достаточные условия существования, единственности решения таких задач. В работах [9–11] задача (1)–(3) и ее частные случаи исследовались методом введения функциональных параметров. Этот метод является модификацией метода параметризации [12], разработанного для решения двухточечных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Методом введения функциональных параметров в терминах специальной матрицы, составляемой по матрицам $A(x, t)$, $P_2(x)$, $S_2(x)$, получены достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1)–(3) и построены примеры, показывающие существенность налагаемых требований на данные задачи. В работе [13] установлено, что эти требования являются также необходимыми для корректной разрешимости задачи (1)–(3), где $P_i(x)$, $S_i(x)$, $i = 0, 1$, – нулевые матрицы. В работе [14] исследована корректность начально-краевой задачи для линейного гиперболического уравнения высших порядков с двумя независимыми переменными, которую путем замены можно привести к системе вида (1). Доказана эквивалентность корректности рассматриваемой задачи единственности тривиального решения соответствующей краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения

высокого порядка, зависящего от параметра. В терминах фундаментальной системы решений обыкновенного дифференциального уравнения высокого порядка получены необходимые и достаточные условия корректности указанной задачи.

В настоящей работе устанавливаются коэффициентные необходимые и достаточные условия корректной, однозначной разрешимости задачи (1)–(3). Необходимые и достаточные условия корректной разрешимости задачи (1)–(3) анонсированы в [15].

Введем новые неизвестные функции $v(x, t) = \partial u(x, t)/\partial x$, $w(x, t) = \partial u(x, t)/\partial t$ и задачу (1)–(3) сведем к следующей эквивалентной задаче:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(x, t)v + F(x, t, w(x, t), u(x, t)), \quad (4)$$

$$P_2(x)v(x, 0) + S_2(x)v(x, T) = \Phi(x, w(x, 0), u(x, 0), w(x, T), u(x, T)), \quad x \in [0, \omega], \quad (5)$$

$$u(x, t) = \psi(t) + \int_0^x v(\xi, t)d\xi, \quad w(x, t) = \dot{\psi}(t) + \int_0^x \frac{\partial v(\xi, t)}{\partial t} d\xi, \quad (6)$$

где $(x, t) \in \bar{\Omega}$, $F(x, t, w(x, t), u(x, t)) = B(x, t)w(x, t) + C(x, t)u(x, t) + f(x, t)$,

$$\begin{aligned} & \Phi(x, w(x, 0), u(x, 0), w(x, T), u(x, T)) = \\ & = \varphi(x) - P_1(x)w(x, 0) - P_0(x)u(x, 0) - S_1(x)w(x, T) - S_0(x)u(x, T). \end{aligned}$$

В задаче (4)–(6) условие $u(0, t) = \psi(t)$ учтено в соотношениях (6). Тройка непрерывных на $\bar{\Omega}$ функций $\{v(x, t), u(x, t), w(x, t)\}$ называется решением задачи (4)–(6), если функция $v(x, t) \in C(\bar{\Omega}, R^n)$ имеет непрерывную на $\bar{\Omega}$ производную по t и удовлетворяет однопараметрическому семейству двухточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (4), (5), где функции $u(x, t)$, $w(x, t)$ связаны с $v(x, t)$, $\partial v(x, t)/\partial t$ функциональными соотношениями (6).

Пусть функция $u(x, t)$ – классическое решение задачи (1)–(3). Составим тройку непрерывных на $\bar{\Omega}$ функций $\{v(x, t), u(x, t), w(x, t)\}$, где $v(x, t) = \partial u(x, t)/\partial x$, $w(x, t) = \partial u(x, t)/\partial t$. Тогда

$$u(x, t) = u(0, t) + \int_0^x \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial \xi} d\xi = \psi(t) + \int_0^x v(\xi, t)d\xi$$

и, учитывая, что $u(x, t)$ – решение задачи (1)–(3), имеем

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t \partial x},$$

$$w(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial u(0, t)}{\partial t} + \int_0^x \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial \xi \partial t} d\xi = \frac{\partial u(0, t)}{\partial t} + \int_0^x \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial t \partial \xi} d\xi = \dot{\psi}(t) + \int_0^x \frac{\partial v(\xi, t)}{\partial t} d\xi,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + B(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} + C(x, t)u + f(x, t) = A(x, t)v + F(x, t, w(x, t), u(x, t)),$$

$$\begin{aligned} P_2(x)v(x, 0) + S_2(x)v(x, T) &= P_2(x) \frac{\partial u(x, 0)}{\partial x} + S_2(x) \frac{\partial u(x, T)}{\partial x} = \\ &= \varphi(x) - P_1(x) \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} - P_0(x)u(x, 0) - S_1(x) \frac{\partial u(x, T)}{\partial t} - S_0(x)u(x, T) = \\ &= \Phi(x, w(x, 0), u(x, 0), w(x, T), u(x, T)), \end{aligned}$$

т.е. составленная таким образом тройка является решением задачи (4)–(6).

Наоборот, если тройка функций $\{v(x, t), u(x, t), w(x, t)\}$ – решение задачи (4)–(6), то из функциональных соотношений (6) следует, что функция $u(x, t)$ удовлетворяет условию $u(0, t) = \psi(t)$ и имеет непрерывные частные производные первого порядка

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = v(x, t), \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \dot{\psi}(t) + \int_0^x \frac{\partial v(\xi, t)}{\partial t} d\xi = w(x, t),$$

непрерывные смешанные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t \partial x} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial t}.$$

Подставляя их в (4), (5), получаем, что функция $u(x, t)$ удовлетворяет системе гиперболических уравнений (1), краевым условиям (3) соответственно при всех $(x, t) \in \bar{\Omega}$, $x \in [0, \omega]$. Так как она также удовлетворяет начальному условию (2), то $u(x, t)$ является классическим решением задачи (1)–(3).

При фиксированных $w(x, t)$, $u(x, t)$ в задаче (4), (5) требуется найти решение из $C(\bar{\Omega}, R^n)$ однопараметрического семейства двухточечных краевых задач систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому рассмотрим задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(x, t)v + F(x, t), \tag{7}$$

$$P_2(x)v(x, 0) + S_2(x)v(x, T) = \Phi(x), \quad x \in [0, \omega], \tag{8}$$

где $F(x, t) \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, $\Phi(x) \in C([0, \omega], R^n)$. Задача (7), (8) при фиксированном $x \in [0, \omega]$ является двухточечной краевой задачей для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Изменяя x на интервале $[0, \omega]$, получаем однопараметрическое семейство двухточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Непрерывная функция $v : \bar{\Omega} \rightarrow R^n$, имеющая непрерывную на $\bar{\Omega}$ производную по t , называется решением краевой задачи (7), (8), если она удовлетворяет системе (7) и условиям (8) соответственно при всех $(x, t) \in \bar{\Omega}$, $x \in [0, \omega]$.

Используя матрицу $A(x, t)$ и число $h > 0$ такое, что $Nh = T$, построим следующую $nN \times nN$ -матрицу

$$Q_\nu(h, x) = \begin{pmatrix} P_2(x)h & 0 & 0 & \dots & 0 & -S_2(x)[I + D_{\nu, N}(h, x)]h \\ I + D_{\nu, 1}(h, x) & -I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I + D_{\nu, 2}(h, x) & -I & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I + D_{\nu, N-1}(h, x) & -I \end{pmatrix},$$

где I – единичная матрица размерности n ,

$$D_{\nu, r}(h, x) = \int_{(r-1)h}^{rh} A(x, \tau_1) d\tau_1 + \int_{(r-1)h}^{rh} A(x, \tau_1) \int_{(r-1)h}^{\tau_1} A(x, \tau_2) d\tau_2 d\tau_1 + \dots + \int_{(r-1)h}^{rh} A(x, \tau_1) \dots \int_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} A(x, \tau_\nu) d\tau_\nu \dots d\tau_1.$$

Достаточные условия однозначной разрешимости задачи (7), (8) и оценку решения дает

Теорема 1. Пусть при некоторых $h > 0$, таких, что $Nh = T$, и ν , $\nu = 1, 2, \dots$, матрица $Q_\nu(h, x)$ обратима для всех $x \in [0, \omega]$ и выполняются неравенства
 а) $\| [Q_\nu(h, x)]^{-1} \| \leq \gamma_\nu(h, x)$,

b) $q_\nu(h, x) = \gamma_\nu(h, x) \max(1, h \|S_2(x)\|) \left[e^{\alpha(x)h} - \sum_{j=0}^{\nu} \frac{[\alpha(x)h]^j}{j!} \right] \leq \beta < 1$, где $\gamma_\nu(h, x)$ – непрерывная на $[0, \omega]$ функция при фиксированных ν, h , $\alpha(x) = \max_{t \in [0, T]} \|A(x, t)\|$, $\beta = \text{const}$.

Тогда задача (7), (8) имеет единственное решение $v^*(x, t)$ и для него справедлива оценка

$$\max_{t \in [0, T]} \|v^*(x, t)\| \leq [k_1(x, h, \nu) + k_2(x, h, \nu)] \max(\max_{t \in [0, T]} \|F(x, t)\|, \|\Phi(x)\|), \quad (9)$$

где

$$k_1(x, h, \nu) = \frac{\gamma_\nu(h, x)}{1 - q_\nu(h, x)} \max(1, h \|S_2(x)\|) \frac{[\alpha(x)h]^\nu}{\nu!} k_0(x, h, \nu) +$$

$$+ h \gamma_\nu(h, x) \max \left\{ 1 + h \|S_2(x)\| \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}, \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{[\alpha(x)h]^j}{j!} \right\},$$

$$k_0(x, h, \nu) = [e^{\alpha(x)h} - 1] \gamma_\nu(h, x) \max \left\{ 1 + h \|S_2(x)\| \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}, \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{[\alpha(x)h]^j}{j!} \right\} h + h e^{\alpha(x)h},$$

$$k_2(x, h, \nu) = \left\{ [e^{\alpha(x)h} - 1] \frac{\gamma_\nu(h, x)}{1 - q_\nu(h, x)} \max(1, h \|S_2(x)\|) \frac{[\alpha(x)h]^\nu}{\nu!} + 1 \right\} k_0(x, h, \nu).$$

Доказательство. Существование, единственность и оценка (9) при фиксированном $x \in [0, \omega]$ следуют из теоремы 1 [12]. Непрерывность решения $v^*(x, t)$ на Ω вытекает из (9) в силу непрерывности функций $k_i(x, h, \nu)$, $i = 1, 2$, $\Phi(x)$ и $F(x, t)$ соответственно на $[0, \omega]$, Ω . Теорема доказана.

Определение 1. Краевая задача (7), (8) называется корректно разрешимой, если для любых функций $F(x, t)$, $\Phi(x)$ она имеет единственное решение $v(x, t)$ и для него справедлива оценка

$$\max_{t \in [0, T]} \|v(x, t)\| \leq K(x) \max(\max_{t \in [0, T]} \|F(x, t)\|, \|\Phi(x)\|), \quad (10)$$

где $K(x)$ – непрерывная на $[0, \omega]$ функция, не зависящая от $F(x, t)$, $\Phi(x)$.

Функция $K(x, h, \nu) = k_1(x, h, \nu) + k_2(x, h, \nu)$ в неравенстве (9) ограничена на $[0, \omega]$ при фиксированных $h > 0$, $\nu = 1, 2, \dots$ и не зависит от функций $F(x, t)$, $\Phi(x)$. Поэтому при условиях теоремы 1 краевая задача (7), (8) корректно разрешима.

Теорема 2. Задача (7), (8) корректно разрешима тогда и только тогда, когда при некоторых $h > 0$, таких, что $Nh = T$, и ν , $\nu = 1, 2, \dots$, матрица $Q_\nu(h, x)$ обратима для всех $x \in [0, \omega]$ и выполняются неравенства а), б) теоремы 1.

Доказательство. При выполнении условий корректная разрешимость задачи (7), (8) следует из теоремы 1.

Пусть задача (7), (8) корректно разрешима и $K(x)$ – непрерывная на $[0, \omega]$ функция, удовлетворяющая неравенству (10). Переходя в матрице $Q_\nu(h, x)$ к пределу при $\nu \rightarrow \infty$, найдем $Q_*(h, x) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} Q_\nu(h, x)$. Возьмем число $\alpha > 0$, ограниченное сверху $\|A\|_0$, и выберем число $h_0 > 0$, удовлетворяющее неравенству $(\alpha h_0)^{-1} [e^{\alpha h_0} - 1 - \alpha h_0] \leq 1/6$. При каждом фиксированном $x \in [0, \omega]$, используя доказательство теоремы 3 из [12], устанавливаем обратимость матрицы $Q_*(h, x)$ для всех $h \in (0, h_0]$ и оценку $\| [Q_*(h, x)]^{-1} \| \leq 2K_0/h$, где $K_0 = \max_{x \in [0, \omega]} K(x)$.

Принимая во внимание неравенство

$$\|Q_*(h, x) - Q_\nu(h, x)\| \leq \max(1, h \|S_2\|_1) \left[e^{\alpha h} - \sum_{j=0}^{\nu} \frac{[\alpha h]^j}{j!} \right]$$

и выбирая $\tilde{h} \in (0, h_0]$, удовлетворяющим неравенству

$$\frac{2K_0}{h} \max(1, h\|S_2\|_1) \left[e^{\alpha h} - \sum_{j=0}^{\nu} \frac{[\alpha h]^j}{j!} \right] \leq \frac{1}{3},$$

по теореме о малых возмущениях ограниченных обратимых операторов [16, с. 142] для любого $\nu \in N$ имеем $\| [Q_\nu(h, x)]^{-1} \| \leq 3K_0/h$, $q_\nu(h, x) \leq 1/2 < 1$, т.е. выполнены условия а), б) теоремы 1. Теорема 2 доказана.

Определение 2. Краевая задача (1)–(3) называется корректно разрешимой, если для любых $f(x, t)$, $\psi(t)$, $\varphi(x)$ она имеет единственное классическое решение $u(x, t)$ и справедливо неравенство

$$\max \left(\|u\|_0, \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_0, \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_0 \right) \leq K \max(\|f\|_0, \|\psi\|_2, \|\dot{\psi}\|_2, \|\varphi\|_1), \tag{11}$$

где константа K не зависит от $f(x, t)$, $\psi(t)$, $\varphi(x)$.

Теорема 3. Краевая задача (1)–(3) корректно разрешима тогда и только тогда, когда корректно разрешима задача (7), (8).

Доказательство. Пусть задача (1)–(3) корректно разрешима. Тогда для любых функций $f(x, t) \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, $\varphi(x) \in C([0, \omega], R^n)$, $\psi(t) = 0$, $t \in [0, T]$, существует единственное решение задачи (1)–(3) и для него справедливо неравенство

$$\max \left(\|u\|_0, \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_0, \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_0 \right) \leq K \max(\|f\|_0, \|\varphi\|_1).$$

Из наших предположений следует оценка

$$\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right\|_0 \leq K_1 \max(\|f\|_0, \|\varphi\|_1),$$

$K_1 = (\|A\|_0 + \|B\|_0 + \|C\|_0)K + 1$. Поэтому существуют операторы $U \in L(C(\bar{\Omega}, R^n), C(\bar{\Omega}, R^n))$, $V \in L(C([0, \omega], R^n), C(\bar{\Omega}, R^n))$, определяющие решение задачи (1)–(3) – функцию $u(x, t) = Uf(x, t) + V\varphi(x)$, и $U_i \in L(C(\bar{\Omega}, R^n), C(\bar{\Omega}, R^n))$, $V_i \in L(C([0, \omega], R^n), C(\bar{\Omega}, R^n))$, $i = 1, 2$, где операторы

$$U_1 = \frac{\partial}{\partial x} \circ U, \quad U_2 = \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \circ U, \quad V_1 = \frac{\partial}{\partial x} \circ V, \quad V_2 = \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \circ V$$

являются суперпозицией операторов дифференцирования и U , V . Возьмем пару функций $(F(x, t), \Phi(x))$, принадлежащих прямой сумме двух пространств $Z_1 = C(\bar{\Omega}, R^n) \dot{+} C([0, \omega], R^n)$ [16, с. 162] с нормой $\|(F, \Phi)\|_{Z_1} = \max(\|F\|_0, \|\Phi\|_1)$. Пару функций $(f(x, t), \varphi(x))$ из Z_1 определим из систем функциональных уравнений

$$B(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + C(x, t)u(x, t) + f(x, t) = F(x, t), \tag{12}$$

$$\varphi(x) - P_1(x) \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} - P_0(x)u(x, 0) - S_1(x) \frac{\partial u(x, T)}{\partial t} - S_0(x)u(x, T) = \Phi(x), \tag{13}$$

где $u(x, t)$ – решение задачи (1)–(3) при функциях $f(x, t)$, $\varphi(x)$ и $\psi(t) = 0$. Так как

$$u(x, t) = 0 + \int_0^x \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial \xi} d\xi = \int_0^x [U_1 f(\xi, t) + V_1 \varphi(\xi)] d\xi,$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 0 + \int_0^x \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial \xi \partial t} d\xi = \int_0^x \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial t \partial \xi} d\xi = \int_0^x [U_2 f(\xi, t) + V_2 \varphi(\xi)] d\xi,$$

то, подставляя их в (5), (6), получаем систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно пары функций $(f(x, t), \varphi(x))$

$$f(x, t) + B(x, t) \int_0^x [U_2 f(\xi, t) + V_2 \varphi(\xi)] d\xi + C(x, t) \int_0^x [U_1 f(\xi, t) + V_1 \varphi(\xi)] d\xi = F(x, t), \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \varphi(x) - P_1(x) \int_0^x [U_2 f(\xi, t) + V_2 \varphi(\xi)]|_{t=0} d\xi - S_1(x) \int_0^x [U_2 f(\xi, t) + V_2 \varphi(\xi)]|_{t=T} d\xi - \\ - P_0(x) \int_0^x [U_1 f(\xi, t) + V_1 \varphi(\xi)]|_{t=0} d\xi - S_0(x) \int_0^x [U_1 f(\xi, t) + V_1 \varphi(\xi)]|_{t=T} d\xi = \Phi(x), \end{aligned} \quad (15)$$

$(x, t) \in \bar{\Omega}$, $x \in [0, \omega]$. При изменении $t \in [0, T]$ получаем однопараметрическое семейство систем интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Взяв за начальное приближение пару $(F(x, t), \Phi(x)) \in Z_1$, последующие приближения определим из систем уравнений

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x, t) = \\ = F(x, t) - B(x, t) \int_0^x [U_2 f^{(k-1)}(\xi, t) + V_2 \varphi^{(k-1)}(\xi)] d\xi - C(x, t) \int_0^x [U_1 f^{(k-1)}(\xi, t) + V_1 \varphi^{(k-1)}(\xi)] d\xi, \\ \varphi^{(k)}(x) = \Phi(x) + P_1(x) \int_0^x [U_2 f^{(k-1)}(\xi, t) + V_2 \varphi^{(k-1)}(\xi)]|_{t=0} d\xi + \\ + S_1(x) \int_0^x [U_2 f^{(k-1)}(\xi, t) + V_2 \varphi^{(k-1)}(\xi)]|_{t=T} d\xi + P_0(x) \int_0^x [U_1 f^{(k-1)}(\xi, t) + V_1 \varphi^{(k-1)}(\xi)]|_{t=0} d\xi + \\ + S_0(x) \int_0^x [U_1 f^{(k-1)}(\xi, t) + V_1 \varphi^{(k-1)}(\xi)]|_{t=T} d\xi, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Несложно установить, что последовательность пар $(f^{(k)}(x, t), \varphi^{(k)}(x))$ при $k \rightarrow \infty$ в норме Z_1 сходится к единственному решению системы (14), (15) – паре $(f(x, t), \varphi(x)) \in Z_1$ – и справедлива оценка

$$\max(\|f\|_0, \|\varphi\|_1) \leq K_2 \max(\|F\|_0, \|\Phi\|_1), \quad (16)$$

где $K_2 = \exp\{2 \max(\|B\|_0 K_1 + \|C\|_0 K, [\|P_1\|_1 + \|S_1\|_1] K_1 + [\|P_0\|_1 + \|S_0\|_1] K) \omega\}$.

Пусть $u(x, t)$ – решение задачи (1)–(3) при найденной паре функций $(f(x, t), \varphi(x))$. Тогда функция $v(x, t) = \partial u(x, t) / \partial x$ будет решением задачи (7), (8) при выбранной паре $(F(x, t), \Phi(x))$. Действительно, в силу (3), (12), (13) имеем

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + B(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} + C(x, t) u + f(x, t) = A(x, t) v + F(x, t),$$

$$P_2(x) v(x, 0) + S_2(x) v(x, T) = P_2(x) \frac{\partial u(x, 0)}{\partial x} + S_2(x) \frac{\partial u(x, T)}{\partial x} = \Phi(x)$$

при всех $(x, t) \in \bar{\Omega}$, $x \in [0, \omega]$, причем из корректной разрешимости задачи (1)–(3) и неравенства (16) следует оценка

$$\|v\|_0 = \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_0 \leq K \max(\|f\|_0, \|\varphi\|_1) \leq K K_2 \max(\|F\|_0, \|\Phi\|_1). \quad (17)$$

Установим единственность решения задачи (7), (8). Пусть $v(x, t)$ – решение задачи (7), (8) при $F(x, t) = 0$, $\Phi(x) = 0$. С помощью функции $v(x, t)$ и матриц $B(x, t)$, $C(x, t)$, $P_1(x)$, $P_0(x)$, $S_1(x)$, $S_0(x)$ построим функции

$$\tilde{u}(x, t) = \int_0^x v(\xi, t) d\xi, \quad \tilde{f}(x, t) = -B(x, t) \int_0^x \frac{\partial v(\xi, t)}{\partial t} d\xi - C(x, t) \int_0^x v(\xi, t) d\xi,$$

$$\tilde{\varphi}(x) = P_1(x) \int_0^x \frac{\partial v(\xi, 0)}{\partial t} d\xi + S_1(x) \int_0^x \frac{\partial v(\xi, T)}{\partial t} d\xi + P_0(x) \int_0^x v(\xi, 0) d\xi + S_0(x) \int_0^x v(\xi, T) d\xi.$$

Покажем, что функция $\tilde{u}(x, t)$ является решением задачи (1)–(3) при $f(x, t) = \tilde{f}(x, t)$, $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x)$, $\psi(t) = 0$. Из определения функции $\tilde{u}(x, t)$ следует существование непрерывных частных производных первого порядка

$$\frac{\partial \tilde{u}(x, t)}{\partial x} = v(x, t), \quad \frac{\partial \tilde{u}(x, t)}{\partial t} = \int_0^x \frac{\partial v(\xi, t)}{\partial t} d\xi \quad \text{для всех } (x, t) \in \bar{\Omega} \text{ и } \tilde{u}(0, t) = 0 \text{ при } t \in [0, T].$$

Учитывая, что $v(x, t)$ – решение задачи (7), (8) при $F(x, t) = 0$, $\Phi(x) = 0$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{u}(x, t)}{\partial t \partial x} &= \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = A(x, t)v(x, t) = \\ &= A(x, t) \frac{\partial \tilde{u}(x, t)}{\partial x} + B(x, t) \frac{\partial \tilde{u}(x, t)}{\partial t} + C(x, t)\tilde{u}(x, t) - B(x, t) \frac{\partial \tilde{u}(x, t)}{\partial t} - C(x, t)\tilde{u}(x, t) = \\ &= A(x, t) \frac{\partial \tilde{u}(x, t)}{\partial x} + B(x, t) \frac{\partial \tilde{u}(x, t)}{\partial t} + C(x, t)\tilde{u}(x, t) - B(x, t) \int_0^x \frac{\partial v(\xi, t)}{\partial t} d\xi - C(x, t) \int_0^x v(\xi, t) d\xi = \\ &= A(x, t) \frac{\partial \tilde{u}(x, t)}{\partial x} + B(x, t) \frac{\partial \tilde{u}(x, t)}{\partial t} + C(x, t)\tilde{u}(x, t) + \tilde{f}(x, t), \\ P_2(x) \frac{\partial \tilde{u}(x, 0)}{\partial x} + S_2(x) \frac{\partial \tilde{u}(x, T)}{\partial x} &= P_2(x)v(x, 0) + S_2(x)v(x, T) = 0 = -P_1(x) \frac{\partial \tilde{u}(x, 0)}{\partial t} - \\ - S_1(x) \frac{\partial \tilde{u}(x, T)}{\partial t} - P_0(x)\tilde{u}(x, 0) - S_0(x)\tilde{u}(x, T) &+ P_1(x) \frac{\partial \tilde{u}(x, 0)}{\partial t} + S_1(x) \frac{\partial \tilde{u}(x, T)}{\partial t} + P_0(x)\tilde{u}(x, 0) + \\ + S_0(x)\tilde{u}(x, T) &= -P_1(x) \frac{\partial \tilde{u}(x, 0)}{\partial t} - S_1(x) \frac{\partial \tilde{u}(x, T)}{\partial t} - P_0(x)\tilde{u}(x, 0) - S_0(x)\tilde{u}(x, T) + \\ + P_1(x) \int_0^x \frac{\partial v(\xi, 0)}{\partial t} d\xi + S_1(x) \int_0^x \frac{\partial v(\xi, T)}{\partial t} d\xi &+ P_0(x) \int_0^x v(\xi, 0) d\xi + S_0(x) \int_0^x v(\xi, T) d\xi = \\ &= -P_1(x) \frac{\partial \tilde{u}(x, 0)}{\partial t} - S_1(x) \frac{\partial \tilde{u}(x, T)}{\partial t} - P_0(x)\tilde{u}(x, 0) - S_0(x)\tilde{u}(x, T) + \tilde{\varphi}(x), \end{aligned}$$

т.е. функция $\tilde{u}(x, t)$ является решением задачи (1)–(3) при $f(x, t) = \tilde{f}(x, t)$, $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x)$, $\psi(t) = 0$.

Так как

$$v(\xi, t) = \frac{\partial \tilde{u}(\xi, t)}{\partial \xi} = U_1 \tilde{f}(\xi, t) + V_1 \tilde{\varphi}(\xi), \quad \frac{\partial v(\xi, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \tilde{u}(\xi, t)}{\partial t \partial \xi} = U_2 \tilde{f}(\xi, t) + V_2 \tilde{\varphi}(\xi),$$

то пара функций $(\tilde{f}(x, t), \tilde{\varphi}(x))$, по построению принадлежащих Z_1 , является решением однородной системы интегральных уравнений Вольтерра второго рода

$$\tilde{f}(x, t) + B(x, t) \int_0^x [U_2 \tilde{f}(\xi, t) + V_2 \tilde{\varphi}(\xi)] d\xi + C(x, t) \int_0^x [U_1 \tilde{f}(\xi, t) + V_1 \tilde{\varphi}(\xi)] d\xi = 0, \quad (x, t) \in \bar{\Omega}, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \tilde{\varphi}(x) - P_1(x) \int_0^x [U_2 \tilde{f}(\xi, t) + V_2 \tilde{\varphi}(\xi)]|_{t=0} d\xi - S_1(x) \int_0^x [U_2 \tilde{f}(\xi, t) + V_2 \tilde{\varphi}(\xi)]|_{t=T} d\xi - \\ & - P_0(x) \int_0^x [U_1 \tilde{f}(\xi, t) + V_1 \tilde{\varphi}(\xi)]|_{t=0} d\xi - S_0(x) \int_0^x [U_1 \tilde{f}(\xi, t) + V_1 \tilde{\varphi}(\xi)]|_{t=T} d\xi = 0, \quad x \in [0, \omega]. \quad (19) \end{aligned}$$

Поскольку система уравнений (18), (19) в пространстве Z_1 имеет только нулевое решение, получаем, что $\tilde{f}(x, t) = 0$, $\tilde{\varphi}(x) = 0$ и

$$v(x, t) = \frac{\partial \tilde{u}(x, t)}{\partial \xi} = U_1 \tilde{f}(x, t) + V_1 \tilde{\varphi}(x) = U_1 0 + V_1 0 = 0$$

для всех $(x, t) \in \bar{\Omega}$. Таким образом, из корректной разрешимости задачи (1)–(3) следует корректная разрешимость задачи (7), (8). Теперь предположим, что задача (7), (8) корректно разрешима. В силу эквивалентности задач (1)–(3) и (4)–(6) достаточно показать корректную разрешимость задачи (4)–(6).

Решение задачи (4)–(6) – тройку функций $\{v(x, t), u(x, t), w(x, t)\}$ – найдем методом последовательных приближений. За нулевое приближение по $u(x, t)$, $w(x, t)$ возьмем соответственно $\psi(t)$, $\dot{\psi}(t)$, а $v^{(0)}(x, t)$ найдем как решение задачи

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(x, t)v + B(x, t)\dot{\psi}(t) + C(x, t)\psi(t) + f(x, t), \quad (x, t) \in \bar{\Omega}, \quad (20)$$

$$P_2(x)v(x, 0) + S_2(x)v(x, T) = \varphi(x) - P_1(x)\dot{\psi}(0) - P_0(x)\psi(0) - S_1(x)\dot{\psi}(T) - S_0(x)\psi(T), \quad x \in [0, \omega]. \quad (21)$$

По предположению задача (20), (21) имеет единственное решение $v^{(0)}(x, t)$ и

$$\|v^{(0)}\|_0 \leq K_0 \max\{\|B\dot{\psi} + C\psi + f\|_0, \|\varphi - P_1\dot{\psi}(0) - P_0\psi(0) - S_1\dot{\psi}(T) - S_0\psi(T)\|_1\},$$

$$\|\partial v^{(0)}/\partial t\|_0 \leq (\|A\|_0 K_0 + 1) \max\{\|B\dot{\psi} + C\psi + f\|_0, \|\varphi - P_1\dot{\psi}(0) - P_0\psi(0) - S_1\dot{\psi}(T) - S_0\psi(T)\|_1\}.$$

Если известны $u^{(k-1)}(x, t)$, $w^{(k-1)}(x, t)$, то $v^{(k)}(x, t)$ найдем, решая задачу (4), (5), где в правых частях уравнения $w(x, t) = w^{(k-1)}(x, t)$, $u(x, t) = u^{(k-1)}(x, t)$, $k = 1, 2, \dots$. При найденном $v^{(k)}(x, t)$ следующие приближения по $u(x, t)$, $w(x, t)$ определим из соотношений (6)

$$u^{(k)}(x, t) = \psi(t) + \int_0^x v^{(k)}(\xi, t) d\xi, \quad w^{(k)}(x, t) = \dot{\psi}(t) + \int_0^x \frac{\partial v^{(k)}(\xi, t)}{\partial t} d\xi.$$

Составим разности $\Delta v^{(k)}(x, t) = v^{(k)}(x, t) - v^{(k-1)}(x, t)$, $\Delta u^{(k)}(x, t) = u^{(k)}(x, t) - u^{(k-1)}(x, t)$, $\Delta w^{(k)}(x, t) = w^{(k)}(x, t) - w^{(k-1)}(x, t)$ и для них с помощью корректной разрешимости задачи (7), (8) установим оценки

$$\max(\max_{t \in [0, T]} \|\Delta v^{(k+1)}(x, t)\|, \max_{t \in [0, T]} \|\partial \Delta v^{(k+1)}(x, t)/\partial t\|) \leq$$

$$\leq \max(K_0, \|A\|_0 K_0 + 1)(\|B\|_0 + \|C\|_0) \max(\max_{t \in [0, T]} \|\Delta w^{(k)}(x, t)\|, \max_{t \in [0, T]} \|\Delta u^{(k)}(x, t)\|), \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \max(\max_{t \in [0, T]} \|\Delta w^{(k)}(x, t)\|, \max_{t \in [0, T]} \|\Delta u^{(k)}(x, t)\|) \leq \\ & \leq \int_0^x \max(\max_{t \in [0, T]} \|\Delta v^{(k)}(\xi, t)\|, \max_{t \in [0, T]} \|\partial \Delta v^{(k)}(\xi, t) / \partial t\|) d\xi. \end{aligned} \quad (23)$$

Отсюда следует основное неравенство

$$\begin{aligned} & \max(\max_{t \in [0, T]} \|\Delta v^{(k+1)}(x, t)\|, \max_{t \in [0, T]} \|\partial \Delta v^{(k+1)}(x, t) / \partial t\|) \leq \\ & \leq \max(K_0, \|A\|_0 K_0 + 1)(\|B\|_0 + \|C\|_0) \int_0^x \max(\max_{t \in [0, T]} \|\Delta v^{(k)}(\xi, t)\|, \max_{t \in [0, T]} \|\partial \Delta v^{(k)}(\xi, t) / \partial t\|) d\xi. \end{aligned} \quad (24)$$

Из (24) вытекает равномерная сходимость последовательностей $\{v^{(k)}(x, t)\}$, $\{\partial v^{(k)}(x, t) / \partial t\}$ в норме пространства $C(\bar{\Omega}, R^n)$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда равномерная сходимость последовательностей $\{u^{(k)}(x, t)\}$, $\{w^{(k)}(x, t)\}$ вытекает из оценки (23). При этом предельные функции $v^*(x, t)$, $\{\partial v^*(x, t) / \partial t\}$, $u^*(x, t)$, $w^*(x, t)$ непрерывны на $\bar{\Omega}$ и тройка функций $\{v^*(x, t), u^*(x, t), w^*(x, t)\}$ является решением задачи (4)–(6). Используя оценки (22)–(24), получаем

$$\max(\|v^*\|_0, \|u^*\|_0, \|w^*\|_0) \leq \tilde{K} \max(\|f\|_0, \|\psi\|_2, \|\dot{\psi}\|_2, \|\varphi\|_1), \quad (25)$$

где

$$\tilde{K} = \max(1 + e^{\tilde{K}_0} [\tilde{K}_0 + \omega \max(K_0, \alpha K_0 + 1)], e^{\tilde{K}_0}),$$

$$\tilde{K}_0 = \omega \max(K_0, \alpha K_0 + 1) \max[\|B\|_0 + \|C\|_0, \|P_1\|_1 + \|S_1\|_1 + \|P_0\|_1 + \|S_0\|_1]$$

и не зависит от f, ψ, φ .

Пусть теперь тройка $\{\tilde{v}(x, t), \tilde{u}(x, t), \tilde{w}(x, t)\}$ – решение задачи (4)–(6), где $f(x, t) = 0$, $\psi(t) = 0$, $\varphi(x) = 0$ для всех $(x, t) \in \bar{\Omega}$. Тогда из корректной разрешимости задачи (7), (8) и соотношений (6) вытекают равенства $\tilde{v}(x, t) = 0$, $\tilde{u}(x, t) = 0$, $\tilde{w}(x, t) = 0$ для всех $(x, t) \in \bar{\Omega}$. Отсюда и из оценки (25) следует корректная разрешимость задачи (1)–(3). Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Краевая задача (1)–(3) корректно разрешима тогда и только тогда, когда при некоторых $h > 0$, таких, что $Nh = T$, и $\nu, \nu = 1, 2, \dots$, матрица $Q_\nu(h, x)$ обратима для всех $x \in [0, \omega]$ и выполняются неравенства а), б) теоремы 1.*

Доказательство. Необходимость. Пусть задача (1)–(3) корректно разрешима. Тогда из теоремы 3 следует корректная разрешимость задачи (7), (8). Используя теорему 2, устанавливаем существование чисел $h > 0$, $\nu, \nu = 1, 2, \dots$, при которых матрица $Q_\nu(h, x)$ обратима для всех $x \in [0, \omega]$ и выполняются неравенства а), б) теоремы 1.

Достаточность следует из теорем 2 и 3. Теорема 4 доказана.

Через $C^{(1+1)}(\bar{\Omega}, R^n)$ обозначим пространство функций $u(x, t) \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, имеющих непрерывные на $\bar{\Omega}$ частные производные $\partial u(x, t) / \partial x$, $\partial u(x, t) / \partial t$, $\partial^2 u(x, t) / \partial t \partial x$ с нормой

$$\|u\|_{(1+1)} = \max(\|u\|_0, \|\partial u / \partial x\|_0, \|\partial u / \partial t\|_0, \|\partial^2 u / \partial t \partial x\|_0),$$

а через $C^{(1)}([0, T], R^n)$ – пространство дифференцируемых функций $\psi : [0, T] \rightarrow R^n$, принадлежащих $C([0, T], R^n)$ вместе со своей производной $\dot{\psi}(t)$, и с нормой $\|\psi\|_{(1)} = \max(\|\psi\|_2, \|\dot{\psi}\|_2)$.

Лемма. *Если краевая задача (1)–(3) для любых функций $f(x, t)$, $\psi(t)$, $\varphi(x)$ имеет единственное решение, то она корректно разрешима.*

Доказательство. Если функция $u(x, t) \in C^{(1+1)}(\bar{\Omega}, R^n)$ удовлетворяет краевой задаче (1)–(3), то из наших предположений следует, что ее частные производные $\partial u(x, t) / \partial x$,

$\partial u(x, t)/\partial t$, $\partial^2 u(x, t)/\partial t \partial x$ принадлежат $C(\bar{\Omega}, R^n)$. Поэтому краевая задача (1)–(3) эквивалентна операторному уравнению $U_3 u = \tilde{F}$, где $U_3 : C^{(1+1)}(\bar{\Omega}, R^n) \rightarrow Z_3$, $Z_3 = Z_2 \dot{+} C([0, \omega], R^n)$, $Z_2 = C(\bar{\Omega}, R^n) \dot{+} C^{(1)}([0, T], R^n)$, и определяется равенством

$$U_3 = \left[\begin{array}{c} I \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} - A(x, t) \frac{\partial}{\partial x} - B(x, t) \frac{\partial}{\partial t} - C(x, t) \\ J_0 \\ P_2(x) J_0 \frac{\partial}{\partial x} + P_1(x) J_0 \frac{\partial}{\partial t} + P_0(x) J_0 + S_2(x) J_T \frac{\partial}{\partial x} + S_1(x) J_T \frac{\partial}{\partial t} + S_0(x) J_T \end{array} \right],$$

$$\tilde{F}(x, t) = [f(x, t), \psi(t), \varphi(x)]^T.$$

Здесь

$$J^0 : C(\bar{\Omega}, R^n) \rightarrow C([0, T], R^n), \quad J_0 : C(\bar{\Omega}, R^n) \rightarrow C([0, \omega], R^n), \quad J_T : C(\bar{\Omega}, R^n) \rightarrow C([0, \omega], R^n)$$

и определяются равенствами $J^0 u(x, t) = u(0, t)$, $J_0 u(x, t) = u(x, 0)$, $J_T u(x, t) = u(x, T)$. По условию леммы оператор U_3 имеет обратный U_3^{-1} и этот оператор определен на всем банаховом пространстве Z_3 . Применяя теорему Банаха [16, с. 134], устанавливаем ограниченность оператора $U_3^{-1} : Z_3 \rightarrow C^{(1+1)}(\bar{\Omega}, R^n)$, откуда следует корректная разрешимость задачи (1)–(3). Лемма доказана.

Имеет место

Следствие. Условия теоремы 4 необходимы и достаточны для однозначной разрешимости краевой задачи (1)–(3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cesari L. // Тр. междунар. симп. по нелинейным колебаниям. Т. 2. Киев, 1961. С. 440–457.
2. Aziz A.K. // Proc. Amer. Math. Soc. 1966. V. 17. № 3. P. 557–566.
3. Vejvoda O., Herrmann L., Lovicar V. et al. Partial differential equations: time – periodic solutions. Hague; Boston; London, 1982.
4. Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. Киев, 1984.
5. Митропольский Ю.А., Хома Г.П., Громяк М.И. Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. Киев, 1991.
6. Кигурадзе Т.И. // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 2. С. 281–297.
7. Kiguradze T. // Memoirs Differential Equations and Mathematical Physics. 1994. V. 1. P. 1–144.
8. Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова РАН. 1998. Т. 222.
9. Джумабаев Д.С., Асанова А.Т. // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. 2001. № 1. С. 23–29.
10. Асанова А.Т., Джумабаев Д.С. // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2002. Т. 42. № 11. С. 1673–1685.
11. Асанова А.Т., Джумабаев Д.С. // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 10. С. 1343–1354.
12. Джумабаев Д.С. // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1989. Т. 29. № 1. С. 50–66.
13. Асанова А.Т., Джумабаев Д.С. // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. 2002. № 3. С. 20–26.
14. Кигурадзе Т.И., Кусано Т. // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 4. С. 516–526.
15. Асанова А.Т., Джумабаев Д.С. // Докл. РАН. 2003. Т. 391. № 3. С. 295–297.
16. Треногин В.А. Функциональный анализ. М., 1980.

Институт математики Министерства образования и науки
Республики Казахстан, г. Алматы

Поступила в редакцию
05.09.2003 г.