



Общероссийский математический портал

М. А. Скворцова, Т. Ыскак, Асимптотическое поведение решений в одной модели
«хищник-жертва» с запаздыванием,
Сиб. матем. журн., 2021, том 62, номер 2, 402–416

<https://www.mathnet.ru/smj7563>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.84

23 апреля 2025 г., 17:54:48



АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ
РЕШЕНИЙ В ОДНОЙ МОДЕЛИ
«ХИЩНИК–ЖЕРТВА» С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

М. А. Скворцова, Т. Ыскак

Аннотация. Рассматривается система дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, описывающая взаимодействие популяций хищников и жертв и учитывающая возрастную структуру популяции хищников. Изучаются асимптотические свойства решений данной системы. Установлены оценки, характеризующие скорость стабилизации решений на бесконечности, и оценки областей притяжения асимптотически устойчивых положений равновесия. Результаты получены с использованием функционалов Ляпунова — Красовского.

DOI 10.33048/smzh.2021.62.211

Ключевые слова: модель «хищник-жертва», уравнения с запаздывающим аргументом, асимптотическая устойчивость, оценки решений, область притяжения, функционалы Ляпунова — Красовского.

§ 1. Введение

При описании многих биологических процессов часто используются дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом (см., например, монографии [1–4] и имеющуюся там библиографию). В настоящее время имеется огромное количество моделей, при этом их число постоянно увеличивается. В основе многих моделей с запаздыванием, описывающих динамику популяций, лежит классическая модель «хищник-жертва», состоящая из двух обыкновенных дифференциальных уравнений и появившаяся независимо в работах Лотки [5] и Вольтерра [6]. Обзор результатов для моделей «хищник-жертва» с запаздыванием содержится, в частности, в [7, 8].

Настоящая работа посвящена исследованию одной модели «хищник-жертва», предложенной в [9] и учитывающей возрастную структуру популяции хищников. Модель описывается системой дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = x(t)(r - ax(t) - bz(t)), \\ \frac{d}{dt}y(t) = kbx(t - \tau)z(t - \tau) - (D + \mu)y(t), \\ \frac{d}{dt}z(t) = Dy(t) - \nu z(t), \end{cases} \quad (1)$$

где $x(t)$ — численность популяции жертв, $y(t)$ — численность популяции незрелых хищников, $z(t)$ — численность популяции зрелых хищников. Все коэффициенты системы и параметр запаздывания τ предполагаются положительными

Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075–15–2019–1613.

и имеют следующий смысл: $r > 0$ — коэффициент прироста популяции жертв, $a > 0$ — коэффициент, отвечающий за ограниченность ресурсов на территории, $b > 0$ — коэффициент взаимодействия жертв и зрелых хищников, $k > 0$ — коэффициент рождаемости хищников, $\tau > 0$ — срок беременности хищника, $D > 0$ — коэффициент взросления хищников, $\mu > 0$ — коэффициент смертности незрелых хищников, $\nu > 0$ — коэффициент смертности зрелых хищников.

Вместе с системой (1) рассмотрим начальные условия:

$$\begin{cases} x(t) = \varphi(t), & z(t) = \psi(t), & t \in [-\tau, 0], \\ x(+0) = \varphi(0), & y(+0) = \eta, & z(+0) = \psi(0), \end{cases} \quad (2)$$

где $\varphi, \psi \in C([-\tau, 0])$ — заданные непрерывные функции. Учитывая биологический смысл модели, естественно рассматривать начальную задачу с неотрицательными начальными условиями:

$$\varphi(t) \geq 0, \quad \psi(t) \geq 0, \quad t \in [-\tau, 0], \quad \eta \geq 0. \quad (3)$$

Как отмечено в [9], в этом случае решение определено при всех $t > 0$, при этом компоненты решения $x(t), y(t), z(t)$ будут неотрицательными и ограниченными сверху. Всюду далее предполагаем, что условие (3) выполнено.

Выпишем все положения равновесия системы (1) с неотрицательными компонентами, указанные в [9].

(1) Если выполнено условие $kbrD \leq a\nu(D + \mu)$, то в системе (1) имеются два положения равновесия: $(0, 0, 0)$ и $(\frac{r}{a}, 0, 0)$. Положение равновесия $(0, 0, 0)$ соответствует полному вымиранию популяций, положение равновесия $(\frac{r}{a}, 0, 0)$ соответствует выживанию только популяции жертв.

(2) Если выполнено условие $kbrD > a\nu(D + \mu)$, то в системе (1) имеются три положения равновесия: $(0, 0, 0)$, $(\frac{r}{a}, 0, 0)$ и (x_0, y_0, z_0) , где

$$x_0 = \frac{\nu(D + \mu)}{kbD}, \quad y_0 = \frac{\nu(kbrD - a\nu(D + \mu))}{kb^2D^2}, \quad z_0 = \frac{(kbrD - a\nu(D + \mu))}{kb^2D}. \quad (4)$$

Положение равновесия (x_0, y_0, z_0) соответствует совместному сосуществованию популяций хищников и жертв.

В [9] изучались качественные свойства решений системы (1), в частности, получены первые результаты об асимптотической устойчивости положений равновесия. В [10] предложено обобщение модели (1), для которой также были получены результаты об асимптотической устойчивости. Приведем утверждения, вытекающие из результатов работ [9, 10].

(1) Положение равновесия $(0, 0, 0)$ системы (1) неустойчиво [9].

(2) Если

$$kbrD < a\nu(D + \mu), \quad (5)$$

то положение равновесия $(\frac{r}{a}, 0, 0)$ системы (1) асимптотически устойчиво, при этом все решения системы (1) с положительными компонентами стремятся при $t \rightarrow \infty$ к данному положению равновесия [9]. Если $kbrD > a\nu(D + \mu)$, то положение равновесия $(\frac{r}{a}, 0, 0)$ неустойчиво [9].

(3) Если

$$a\nu(D + \mu) < kbrD < 3a\nu(D + \mu), \quad (6)$$

то положение равновесия (x_0, y_0, z_0) системы (1) асимптотически устойчиво при любом запаздывании $\tau > 0$ [10]. Если $kbrD > 3a\nu(D + \mu)$, то условия асимптотической устойчивости данного положения равновесия зависят от параметра запаздывания τ [10].

Отметим, что наряду с исследованием устойчивости важным вопросом также является получение оценок, характеризующих скорость стабилизации решений на бесконечности, и нахождение областей притяжения положений равновесия, т. е. допустимых условий на начальные данные, при которых происходит стабилизация решений. Этот вопрос в [9, 10] не рассматривался.

Целью настоящей работы является нахождение областей притяжения асимптотически устойчивых положений равновесия системы (1) и получение оценок, характеризующих скорость сходимости решений к данным положениям равновесия.

Отметим, что для общих классов систем с запаздыванием при проведении исследований в данном направлении активно применяются функционалы Ляпунова — Красовского (см., например, [11–24]). Для определенных классов систем, возникающих в биологических моделях, оценки также могут быть получены с использованием М-матриц (см., например, [25, 26]).

В настоящей работе используются функционалы Ляпунова — Красовского, при этом все величины, отвечающие за скорости убывания и области притяжения, указаны в явном виде через коэффициенты системы (1). Оценки, характеризующие скорость сходимости решений с положительными компонентами к положению равновесия $(\frac{r}{a}, 0, 0)$, получены в § 2 при условии (5). Оценки решений и оценки на область притяжения положения равновесия (x_0, y_0, z_0) получены в § 3 при условии (6). Вопрос о получении оценок решений и нахождении области притяжения положения равновесия (x_0, y_0, z_0) в случае, когда условие (6) нарушено, пока остается открытым.

Данная работа продолжает исследования [27–32] асимптотических свойств решений биологических моделей.

§ 2. Глобальные оценки скорости сходимости к положению равновесия $(\frac{r}{a}, 0, 0)$

В данном параграфе будем предполагать, что выполнено условие (5). В этом случае у системы (1) существуют только два положения равновесия с неотрицательными компонентами $(0, 0, 0)$ и $(\frac{r}{a}, 0, 0)$, причем второе положение равновесия $(\frac{r}{a}, 0, 0)$ асимптотически устойчиво. Получим оценки, характеризующие скорость сходимости решений системы (1) к данному положению равновесия.

Приведем вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть $(x(t), y(t), z(t))^T$ — решение начальной задачи (1), (2) с неотрицательными начальными условиями (3). Тогда для первой компоненты решения $x(t)$ имеют место следующие утверждения:

- (1) если $\varphi(0) = 0$, то $x(t) = 0$ при всех $t > 0$;
- (2) если $\varphi(0) > 0$, то

$$0 < x(t) \leq \frac{r}{a} + \left(\varphi(0) - \frac{r}{a} \right) e^{-rt}, \quad t > 0; \quad (7)$$

- (3) если $0 < \varphi(0) \leq \frac{r}{a}$, то

$$0 < x(t) \leq \frac{r}{a}, \quad t > 0. \quad (8)$$

Доказательство. Заметим, что из первого уравнения системы (1) вытекает, что если $\varphi(0) = 0$, то $x(t) = 0$ при всех $t > 0$, а если $\varphi(0) > 0$, то $x(t) > 0$

при всех $t > 0$. Далее, поскольку $z(t) \geq 0$, из данного уравнения следует неравенство

$$\frac{d}{dt}x(t) \leq x(t)(r - ax(t)),$$

откуда нетрудно установить (7). Если при этом $\varphi(0) \leq \frac{r}{a}$, то из (7) вытекает (8). Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $(x(t), y(t), z(t))^T$ — решение начальной задачи (1), (2) с неотрицательными начальными условиями (3). Тогда при $t \in [0, \tau]$ для второй и третьей компонент решения $y(t)$ и $z(t)$ имеют место следующие оценки:

$$y(t) \leq \left(\eta + \int_{-\tau}^0 kbe^{(D+\mu)(\tau+\xi)} \varphi(\xi) \psi(\xi) d\xi \right) e^{-(D+\mu)t}, \quad t \in [0, \tau], \quad (9)$$

$$z(t) \leq \psi(0)e^{-\nu t} + D\tau \left(\eta + \int_{-\tau}^0 kbe^{(D+\mu)(\tau+\xi)} \varphi(\xi) \psi(\xi) d\xi \right) e^{-\min\{\nu, (D+\mu)\}t}, \quad t \in [0, \tau]. \quad (10)$$

Доказательство. Пусть $t \in [0, \tau]$. Из второго уравнения системы (1) вытекает представление для функции $y(t)$:

$$y(t) = \left(\eta + \int_0^t kbe^{(D+\mu)s} \varphi(s-\tau) \psi(s-\tau) ds \right) e^{-(D+\mu)t}.$$

Проводя замену $s = \tau + \xi$ в интеграле и учитывая, что $t \leq \tau$, отсюда нетрудно получить (9).

Из третьего уравнения системы (1) вытекает представление для функции $z(t)$:

$$z(t) = \psi(0)e^{-\nu t} + \int_0^t Dy(s)e^{-\nu(t-s)} ds.$$

Используя оценку (9), получим неравенство

$$z(t) \leq \psi(0)e^{-\nu t} + D \left(\eta + \int_{-\tau}^0 kbe^{(D+\mu)(\tau+\xi)} \varphi(\xi) \psi(\xi) d\xi \right) \int_0^t e^{-(D+\mu)s} e^{-\nu(t-s)} ds.$$

Учитывая, что при $s \in [0, t]$ имеет место оценка

$$e^{-(D+\mu)s} e^{-\nu(t-s)} \leq e^{-\min\{\nu, (D+\mu)\}t},$$

и используя неравенство $t \leq \tau$, приходим к оценке (10).

Лемма доказана.

Следствие. Пусть $(x(t), y(t), z(t))^T$ — решение начальной задачи (1), (2) с неотрицательными начальными условиями (3). Тогда при $t \in [0, \tau]$ для третьей компоненты решения $z(t)$ справедлива оценка

$$z(t) \leq Z, \quad Z = \psi(0) + D\tau \left(\eta + \int_{-\tau}^0 kbe^{(D+\mu)(\tau+\xi)} \varphi(\xi) \psi(\xi) d\xi \right), \quad t \in [0, \tau]. \quad (11)$$

Получим оценки для $y(t)$ и $z(t)$ при $t \geq \tau$. Рассмотрим функционал Ляпунова — Красовского следующего вида:

$$V(t, y, z) = hy^2(t) + z^2(t) + \int_{t-\tau}^t \gamma e^{-\varkappa(t-s)} z^2(s) ds, \quad (12)$$

где $\varkappa > 0$ удовлетворяет неравенству

$$e^{\varkappa\tau/2} kbrD < a\nu(D + \mu), \quad (13)$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \left(-(D + \mu - \nu) + \sqrt{4e^{\varkappa\tau/2} \frac{kbrD}{a} + (D + \mu - \nu)^2} \right), \quad (14)$$

$$h = e^{-\varkappa\tau/2} \frac{aD}{kbr}. \quad (15)$$

Теорема 1. Пусть выполнено условие (5) и $(x(t), y(t), z(t))^T$ — решение начальной задачи (1), (2) с неотрицательными начальными условиями (3). Тогда если $\varphi(0) > 0$, то при $t \geq \tau$ для второй и третьей компонент решения $y(t)$ и $z(t)$ справедливы оценки

$$y(t) \leq \sqrt{h^{-1}pV(\tau, y, z)} e^{-\delta(t-\tau)/2}, \quad t \geq \tau, \quad (16)$$

$$z(t) \leq \sqrt{pV(\tau, y, z)} e^{-\delta(t-\tau)/2}, \quad t \geq \tau, \quad (17)$$

где

$$\delta = \min\{c, \varkappa\}, \quad (18)$$

$$c = (D + \mu + \nu) - \sqrt{4e^{\varkappa\tau/2} \frac{kbrD}{a} + (D + \mu - \nu)^2} > 0, \quad (19)$$

$$p = e^J, \quad J = e^{\varkappa\tau/2} \frac{akbD}{2r^2\gamma} \left(\varphi(0) - \frac{r}{a} \right) \left(\varphi(0) + \frac{3r}{a} \right). \quad (20)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Неравенство $c > 0$ вытекает из условия (13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функционал Ляпунова — Красовского (12). Проинтегрируем его вдоль решения начальной задачи (1), (2):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(t, y, z) &= -2h(D + \mu)y^2(t) + 2Dy(t)z(t) - (2\nu - \gamma)z^2(t) \\ &\quad + 2hkba(t - \tau)z(t - \tau)y(t) - \gamma e^{-\varkappa\tau} z^2(t - \tau) - \varkappa \int_{t-\tau}^t \gamma e^{-\varkappa(t-s)} z^2(s) ds. \end{aligned}$$

В силу неравенства

$$2hkba(t - \tau)z(t - \tau)y(t) - \gamma e^{-\varkappa\tau} z^2(t - \tau) \leq h^2 e^{\varkappa\tau} \frac{k^2 b^2 x^2(t - \tau)}{\gamma} y^2(t)$$

получим оценку

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(t, y, z) &\leq - \left\langle R \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &\quad + h^2 e^{\varkappa\tau} \frac{k^2 b^2}{\gamma} \left(x^2(t - \tau) - \frac{r^2}{a^2} \right) y^2(t) - \varkappa \int_{t-\tau}^t \gamma e^{-\varkappa(t-s)} z^2(s) ds, \end{aligned}$$

где

$$R = \begin{pmatrix} (2h(D + \mu) - h^2 e^{\varkappa\tau} \frac{k^2 b^2 r^2}{a^2 \gamma}) & -D \\ -D & (2\nu - \gamma) \end{pmatrix}$$

и символом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначено скалярное произведение векторов. Учитывая явный вид величин h, γ, c (см. формулы (14), (15), (19)), нетрудно убедиться в том, что выполнено неравенство

$$\left\langle R \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle \geq c \left\langle \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle, \quad y, z \in \mathbb{R}.$$

Отсюда следует оценка

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(t, y, z) &\leq -c(hy^2(t) + z^2(t)) \\ &\quad + h^2 e^{\varkappa\tau} \frac{k^2 b^2}{\gamma} \left(x^2(t - \tau) - \frac{r^2}{a^2} \right) y^2(t) - \varkappa \int_{t-\tau}^t \gamma e^{-\varkappa(t-s)} z^2(s) ds. \end{aligned}$$

Используя обозначение (18) величины δ и определение (12) функционала $V(t, y, z)$, получим неравенство

$$\frac{d}{dt} V(t, y, z) \leq -\delta V(t, y, z) + h^2 e^{\varkappa\tau} \frac{k^2 b^2}{\gamma} \left(x^2(t - \tau) - \frac{r^2}{a^2} \right) y^2(t).$$

Поскольку $\varphi(0) > 0$, в силу леммы 1 выполнена оценка (7). Учитывая данную оценку, обозначение величины h и определение функционала $V(t, y, z)$, при $t \geq \tau$ получим

$$\frac{d}{dt} V(t, y, z) \leq \left[-\delta + e^{\varkappa\tau/2} \frac{akbD}{r\gamma} \left(\left(\frac{r}{a} + \left(\varphi(0) - \frac{r}{a} \right) e^{-r(t-\tau)} \right)^2 - \frac{r^2}{a^2} \right) \right] V(t, y, z).$$

Отсюда в силу определения p из (20) имеем

$$V(t, y, z) \leq pV(\tau, y, z) e^{-\delta(t-\tau)}, \quad t \geq \tau.$$

Учитывая определение функционала $V(t, y, z)$, из данной оценки получаем неравенства (16) и (17).

Теорема доказана.

Следствие. Пусть выполнено условие (5) и $(x(t), y(t), z(t))^T$ — решение начальной задачи (1), (2) с неотрицательными начальными условиями (3). Тогда если $0 < \varphi(0) \leq \frac{r}{a}$, то при $t \geq \tau$ для третьей компоненты решения $z(t)$ справедлива оценка

$$z(t) \leq \sqrt{V(\tau, y, z)} e^{-\delta(t-\tau)/2}, \quad t \geq \tau, \quad (21)$$

где $V(\tau, y, z)$ определено в (12), δ — в (18).

Получим оценки, характеризующие скорость сходимости первой компоненты решения $x(t)$ к величине $\frac{r}{a}$.

Теорема 2. Пусть выполнено условие (5) и $(x(t), y(t), z(t))^T$ — решение начальной задачи (1), (2) с неотрицательными начальными условиями (3). Тогда для первой компоненты решения $x(t)$ имеют место следующие утверждения:

(1) если $0 < \varphi(0) \leq \frac{r}{a}$, то справедливы оценки

$$\max \left\{ 0, \frac{r}{a} - X_1(t - \tau) e^{-\min\{r, (\delta/2)\}(t-\tau)} \right\} \leq x(t) \leq \frac{r}{a}, \quad t \geq \tau, \quad (22)$$

где δ определено в (18),

$$X_1(t) = \frac{1}{\varphi(0)} \frac{r}{a} \exp \left(b \left(Z\tau + \frac{2}{\delta} \sqrt{V(\tau, y, z)} \right) \right) \times \left(\left(\frac{r}{a} - \varphi(0) \right) e^{-r\tau} + \varphi(0) b (Z\tau + \sqrt{V(\tau, y, z)} t) \right), \quad (23)$$

Z определено в (11), $V(\tau, y, z)$ — в (12);

(2) если $\varphi(0) > \frac{r}{a}$, то справедливы оценки

$$\max \left\{ 0, \frac{r}{a} - X_2(t - \tau) e^{-\min\{r, (\delta/2)\}(t-\tau)} \right\} \leq x(t) \leq \frac{r}{a} + \left(\varphi(0) - \frac{r}{a} \right) e^{-rt}, \quad t \geq \tau, \quad (24)$$

где

$$X_2(t) = \exp \left(b \left(Z\tau + \frac{2}{\delta} \sqrt{pV(\tau, y, z)} \right) \right) \varphi(0) b (Z\tau + \sqrt{pV(\tau, y, z)} t), \quad (25)$$

p определено в (20).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что в формулах (22) и (24) оценки сверху на функцию $x(t)$ следуют из леммы 1. Получим оценки снизу. Из первого уравнения системы (1) вытекает представление для функции $x(t)$:

$$x(t) = \frac{r}{a} - \frac{r}{a} \left(\frac{r}{a} - \varphi(0) + \varphi(0) \int_0^t bz(s) e^{rs} \exp \left(- \int_0^s bz(\xi) d\xi \right) ds \right) \times \left(\frac{r}{a} + \varphi(0) \int_0^t r e^{rs} \exp \left(- \int_0^s bz(\xi) d\xi \right) ds \right)^{-1}.$$

Отсюда нетрудно получить неравенство

$$\frac{r}{a} - x(t) \leq \frac{r}{a} \left(\frac{r}{a} - \varphi(0) + \varphi(0) \int_0^t bz(s) e^{rs} ds \right) \times \left(\frac{r}{a} + \varphi(0) \int_0^t r e^{rs} \exp \left(- \int_0^s bz(\xi) d\xi \right) ds \right)^{-1}. \quad (26)$$

(I) Сначала рассмотрим случай, когда $0 < \varphi(0) \leq \frac{r}{a}$. Воспользуемся следующей оценкой:

$$\begin{aligned} & \frac{r}{a} + \varphi(0) \int_0^t r e^{rs} \exp \left(- \int_0^s bz(\xi) d\xi \right) ds \\ & \geq \exp \left(- \int_0^t bz(\xi) d\xi \right) \left(\frac{r}{a} + \varphi(0) \int_0^t r e^{rs} ds \right) \geq \exp \left(- \int_0^t bz(\xi) d\xi \right) \varphi(0) e^{rt}. \end{aligned} \quad (27)$$

Тогда из (26) получим неравенство

$$\frac{r}{a} - x(t) \leq \frac{1}{\varphi(0)} \frac{r}{a} \exp \left(\int_0^t bz(\xi) d\xi \right) \left(\left(\frac{r}{a} - \varphi(0) \right) e^{-rt} + \varphi(0) \int_0^t bz(s) e^{-r(t-s)} ds \right). \quad (28)$$

Оценим интегралы, зависящие от функции $z(t)$. Для этого воспользуемся оценками (11), (21). Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^t bz(\xi) d\xi &\leq b \left(Z\tau + \sqrt{V(\tau, y, z)} \int_{\tau}^t e^{-\delta(\xi-\tau)/2} d\xi \right) \\ &\leq b \left(Z\tau + \frac{2}{\delta} \sqrt{V(\tau, y, z)} \right), \quad t \geq \tau. \end{aligned} \quad (29)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \int_0^t bz(s) e^{-r(t-s)} ds &\leq b \left(Z\tau e^{-r(t-\tau)} + \sqrt{V(\tau, y, z)} \int_{\tau}^t e^{-\delta(s-\tau)/2} e^{-r(t-s)} ds \right) \\ &\leq b(Z\tau + \sqrt{V(\tau, y, z)} (t - \tau)) e^{-\min\{r, (\delta/2)\}(t-\tau)}, \quad t \geq \tau. \end{aligned} \quad (30)$$

С учетом неравенств (29) и (30) из неравенства (28) получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} \frac{r}{a} - x(t) &\leq \frac{1}{\varphi(0)} \frac{r}{a} \exp \left(b \left(Z\tau + \frac{2}{\delta} \sqrt{V(\tau, y, z)} \right) \right) \\ &\times \left(\left(\frac{r}{a} - \varphi(0) \right) e^{-rt} + \varphi(0) b(Z\tau + \sqrt{V(\tau, y, z)} (t - \tau)) e^{-\min\{r, (\delta/2)\}(t-\tau)} \right) \\ &\leq X_1(t - \tau) e^{-\min\{r, (\delta/2)\}(t-\tau)}, \end{aligned}$$

где $X_1(t)$ определено в (23). Отсюда непосредственно вытекает оценка (22).

(II) Теперь рассмотрим случай, когда $\varphi(0) > \frac{r}{a}$. В этом случае из неравенства (26) следует оценка

$$\frac{r}{a} - x(t) \leq \frac{r}{a} \varphi(0) \int_0^t bz(s) e^{rs} ds \left(\frac{r}{a} + \varphi(0) \int_0^t r e^{rs} \exp \left(- \int_0^s bz(\xi) d\xi \right) ds \right)^{-1}.$$

По аналогии с оценкой (27) нетрудно получить неравенство

$$\frac{r}{a} + \varphi(0) \int_0^t r e^{rs} \exp \left(- \int_0^s bz(\xi) d\xi \right) ds \geq \exp \left(- \int_0^t bz(\xi) d\xi \right) \frac{r}{a} e^{rt},$$

откуда

$$\frac{r}{a} - x(t) \leq \exp \left(\int_0^t bz(\xi) d\xi \right) \varphi(0) \int_0^t bz(s) e^{-r(t-s)} ds.$$

Оценим интегралы, зависящие от функции $z(t)$. Для этого воспользуемся оценками (11), (17). По аналогии с неравенствами (29) и (30) установим следующие оценки:

$$\int_0^t bz(\xi) d\xi \leq b \left(Z\tau + \frac{2}{\delta} \sqrt{pV(\tau, y, z)} \right),$$

$$\int_0^t bz(s)e^{-r(t-s)} ds \leq b(Z\tau + \sqrt{pV(\tau, y, z)}(t - \tau))e^{-\min\{r, (\delta/2)\}(t-\tau)}, \quad t \geq \tau.$$

Отсюда получим неравенство

$$\frac{r}{a} - x(t) \leq X_2(t - \tau)e^{-\min\{r, (\delta/2)\}(t-\tau)},$$

где $X_2(t)$ определено в (25). Из этой оценки вытекает (24).

Теорема доказана.

§ 3. Область притяжения и оценки скорости сходимости к положению равновесия (x_0, y_0, z_0)

В данном параграфе будем предполагать, что выполнено условие (6), гарантирующее асимптотическую устойчивость положения равновесия (x_0, y_0, z_0) системы (1) при любом запаздывании $\tau > 0$. Получим оценки на область притяжения данного положения равновесия и оценки решений, характеризующие скорость стабилизации на бесконечности.

Для этого сначала сведем задачу об исследовании устойчивости положения равновесия (x_0, y_0, z_0) к исследованию устойчивости нулевого решения. Замена

$$x(t) = x_0 + \hat{x}(t), \quad y(t) = y_0 + \hat{y}(t), \quad z(t) = z_0 + \hat{z}(t) \quad (31)$$

приводит систему (1) к виду

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{y}}(t) = A\hat{\mathbf{y}}(t) + B\hat{\mathbf{y}}(t - \tau) + F(\hat{\mathbf{y}}(t)) + G(\hat{\mathbf{y}}(t - \tau)), \quad (32)$$

где $\hat{\mathbf{y}}(t) = (\hat{x}(t), \hat{y}(t), \hat{z}(t))^T$,

$$A = \begin{pmatrix} -ax_0 & 0 & -bx_0 \\ 0 & -(D + \mu) & 0 \\ 0 & D & -\nu \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu(D+\mu)}{D} \frac{z_0}{x_0} & 0 & \frac{\nu(D+\mu)}{D} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (33)$$

$$F(\hat{\mathbf{y}}(t)) = \begin{pmatrix} -a\hat{x}^2(t) - b\hat{x}(t)\hat{z}(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad G(\hat{\mathbf{y}}(t - \tau)) = \begin{pmatrix} 0 \\ kb\hat{x}(t - \tau)\hat{z}(t - \tau) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Рассмотрим функционал Ляпунова – Красовского, предложенный в [11]:

$$V(t, \hat{\mathbf{y}}) = \langle H\hat{\mathbf{y}}(t), \hat{\mathbf{y}}(t) \rangle + \int_{t-\tau}^t \langle K(t-s)\hat{\mathbf{y}}(s), \hat{\mathbf{y}}(s) \rangle ds, \quad (35)$$

где

$$H = H^* > 0, \quad K(s) \in C^1([0, \tau]), \quad (36)$$

$$K(s) = K^*(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad s \in [0, \tau]. \quad (37)$$

(Неравенство $S > 0$ (< 0) означает, что матрица S является положительно (отрицательно) определенной.) Отметим, что помимо условий (36) и (37) из [11] также вытекает дополнительное условие на матрицы H и $K(s)$, гарантирующее асимптотическую устойчивость нулевого решения систем вида (32):

$$C = - \begin{pmatrix} HA + A^*H + K(0) & HB \\ B^*H & -K(\tau) \end{pmatrix} > 0. \quad (38)$$

Первая наша задача — подобрать матрицы H и $K(s)$ так, чтобы выполнялись условия (36)–(38).

Положим

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{12} & h_{22} & h_{23} \\ h_{13} & h_{23} & h_{33} \end{pmatrix}, \quad K(s) = e^{-ms}(B^*B + Q), \quad m > 0, \quad Q = Q^* > 0. \quad (39)$$

Принимая во внимание, что $B^*H = B^*\tilde{H}$, где

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ h_{12} & h_{22} & h_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (40)$$

условие (38) можно переписать в виде

$$C = \begin{pmatrix} L - Q & 0 \\ 0 & e^{-m\tau}Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{m\tau}\tilde{H}^*\tilde{H} & -\tilde{H}^*B \\ -B^*\tilde{H} & e^{-m\tau}B^*B \end{pmatrix} > 0, \quad (41)$$

где

$$L = -(HA + A^*H + B^*B + e^{m\tau}\tilde{H}^*\tilde{H}) = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{12} & l_{22} & l_{23} \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Из представления (41) вытекает, что если матрица L положительно определенная, а норма матрицы Q достаточно мала, то матрица C также положительно определенная.

Подберем величины h_{ij} и $m > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $L > 0$. В силу обозначений (33), (39), (40) элементы матрицы L имеют следующий вид:

$$\begin{cases} l_{11} = 2h_{11}ax_0 - \frac{\nu^2(D+\mu)^2}{D^2} \left(\frac{z_0}{x_0}\right)^2 - e^{m\tau}h_{12}^2, \\ l_{12} = h_{12}(ax_0 + D + \mu) - h_{13}D - e^{m\tau}h_{12}h_{22}, \\ l_{13} = h_{11}bx_0 + h_{13}(ax_0 + \nu) - \frac{\nu^2(D+\mu)^2}{D^2} \frac{z_0}{x_0} - e^{m\tau}h_{12}h_{23}, \\ l_{22} = 2h_{22}(D + \mu) - 2h_{23}D - e^{m\tau}h_{22}^2, \\ l_{23} = h_{12}bx_0 + h_{23}(D + \mu + \nu) - h_{33}D - e^{m\tau}h_{22}h_{23}, \\ l_{33} = 2h_{13}bx_0 + 2h_{33}\nu - \frac{\nu^2(D+\mu)^2}{D^2} - e^{m\tau}h_{23}^2. \end{cases}$$

Полагая

$$h_{22} = e^{-m\tau}(D + \mu), \quad h_{23} = 0, \quad h_{12} = h_{13} \frac{D}{ax_0}, \quad (43)$$

$$h_{11} = \frac{1}{bx_0} \left(\frac{\nu^2(D + \mu)^2}{D^2} \frac{z_0}{x_0} - h_{13}(ax_0 + \nu) \right), \quad (44)$$

$$h_{33} = e^{-m\tau} \frac{\nu(D + \mu)^2}{D^2} + h_{13} \frac{b}{a}, \quad (45)$$

будем иметь

$$\begin{cases} l_{11} = \frac{\nu^2(D+\mu)^2}{D^2} \frac{z_0}{x_0} \left(\frac{2ax_0 - bz_0}{bx_0} \right) - 2h_{13}(ax_0 + \nu) \frac{a}{b} - e^{m\tau}h_{13}^2 \frac{D^2}{(ax_0)^2}, \\ l_{12} = l_{13} = 0, \quad l_{22} = e^{-m\tau}(D + \mu)^2, \quad l_{23} = -e^{-m\tau} \frac{\nu(D+\mu)^2}{D}, \\ l_{33} = e^{-m\tau} \frac{\nu^2(D+\mu)^2}{D^2} - \frac{\nu^2(D+\mu)^2}{D^2} (1 - e^{-m\tau}) + 2h_{13}(ax_0 + \nu) \frac{b}{a}. \end{cases}$$

Положительная определенность матрицы L эквивалентна условиям

$$\begin{cases} h_{13} < e^{-m\tau}(ax_0 + \nu) \frac{a}{b} \frac{(ax_0)^2}{D^2} \left(\sqrt{1 + e^{m\tau} \frac{bz_0(2ax_0 - bz_0)\nu^2(D+\mu)^2}{(ax_0)^4(ax_0+\nu)^2}} - 1 \right), \\ h_{13} > (1 - e^{-m\tau}) \frac{a}{2b} \frac{\nu^2(D+\mu)^2}{(ax_0+\nu)D^2}. \end{cases} \quad (46)$$

Отсюда вытекает условие на величину $m > 0$:

$$e^{m\tau} < 1 + 2 \frac{(ax_0 + \nu)^2}{\nu^2(D + \mu)^2} \left(\sqrt{(ax_0 - bz_0)^4 + bz_0(2ax_0 - bz_0) \frac{\nu^2(D + \mu)^2}{(ax_0 + \nu)^2} - (ax_0 - bz_0)^2} \right). \quad (47)$$

Заметим, что выполнение неравенств (46) и (47) возможно только при условии $0 < bz_0 < 2ax_0$. Нетрудно видеть, что в силу обозначений (4) это условие эквивалентно (6). Итак, матрица L положительно определенная.

Покажем положительную определенность матрицы H . Действительно, поскольку все собственные числа матрицы A отрицательны и в силу (42) имеет место неравенство

$$HA + A^*H \leq -L < 0,$$

то H является решением матричного уравнения Ляпунова $HA + A^*H = -S$, где $S = S^* > 0$. Известно, что в этом случае матрица H положительно определенная.

Осталось определить матрицу Q . Положим

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad 0 < \alpha < \frac{h_{\min}\beta}{2}, \quad (48)$$

где $h_{\min} > 0$ — минимальное собственное значение матрицы H , а число $\beta > 0$ такое, что выполнено неравенство

$$L \geq \beta H. \quad (49)$$

В качестве β можно взять, например, $\beta = \|L^{-1/2}HL^{-1/2}\|^{-1}$ (здесь используется спектральная норма матрицы).

ЗАМЕЧАНИЕ. Матрица Q из (48) не положительно определенная. Как будет видно из доказательства теоремы 3, неотрицательной определенности достаточно для асимптотической устойчивости нулевого решения системы (32).

Итак, матрицы $H = H^* > 0$ и $K(s) = K^*(s) \geq 0$ построены.

Сформулируем и докажем основной результат настоящего параграфа.

Теорема 3. Пусть выполнено условие (6) и $\mathbf{y}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$ — решение начальной задачи (1), (2) с неотрицательными начальными данными (3). Если начальные данные удовлетворяют условиям

$$\max_{t \in [-\tau, 0]} |\varphi(t) - x_0| \leq \theta, \quad (50)$$

$$\sqrt{V(0, \varphi - \mathbf{y}_0)} < \frac{\varepsilon}{q}, \quad \frac{1}{\sqrt{h_{\min}}} \frac{\sqrt{V(0, \varphi - \mathbf{y}_0)}}{\left(1 - \frac{q}{\varepsilon} \sqrt{V(0, \varphi - \mathbf{y}_0)}\right)} \leq \theta, \quad (51)$$

где

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \eta \\ \psi(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix},$$

$$\theta = \frac{e^{-m\tau/2}\alpha}{kb\sqrt{h_{22}h_{\min}}}, \quad \varepsilon = \min \left\{ \beta - \frac{2\alpha}{h_{\min}}, m \right\}, \quad q = \frac{\sqrt{h_{11}}}{h_{\min}}(a + \sqrt{a^2 + b^2}), \quad (52)$$

то справедлива оценка

$$\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_0\| \leq \frac{1}{\sqrt{h_{\min}}} \frac{\sqrt{V(0, \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{y}_0)}}{\left(1 - \frac{q}{\varepsilon} \sqrt{V(0, \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{y}_0)}\right)} e^{-\varepsilon t/2}, \quad t > 0. \quad (53)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим начальную задачу (1), (2) с неотрицательными начальными условиями (3). С помощью замены (31) перейдем к системе (32) с начальными условиями

$$\begin{cases} \hat{x}(t) = \varphi(t) - x_0, & \hat{z}(t) = \psi(t) - z_0, & t \in [-\tau, 0], \\ \hat{x}(+0) = \varphi(0) - x_0, & \hat{y}(+0) = \eta - y_0, & \hat{z}(+0) = \psi(0) - z_0. \end{cases} \quad (54)$$

Рассмотрим функционал Ляпунова – Красовского (35), в котором элементы матрицы H определены в (43)–(46), матрица $K(s)$ имеет вид $K(s) = e^{-ms}(B^*B + Q)$, где $m > 0$ определено в (47), а матрица Q определена в (48). Дифференцируя функционал (35) вдоль решения начальной задачи (32), (54), получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(t, \hat{\mathbf{y}}) = & - \left\langle C \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{y}}(t) \\ \hat{\mathbf{y}}(t - \tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{y}}(t) \\ \hat{\mathbf{y}}(t - \tau) \end{pmatrix} \right\rangle + 2\langle H\hat{\mathbf{y}}(t), F(\hat{\mathbf{y}}(t)) \rangle \\ & + 2\langle H\hat{\mathbf{y}}(t), G(\hat{\mathbf{y}}(t - \tau)) \rangle - m \int_{t-\tau}^t \langle K(t-s)\hat{\mathbf{y}}(s), \hat{\mathbf{y}}(s) \rangle ds, \end{aligned}$$

где матрица C определена в (38). В силу представления (41) и неравенства (49) отсюда следует оценка

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(t, \hat{\mathbf{y}}) \leq & -\beta\langle H\hat{\mathbf{y}}(t), \hat{\mathbf{y}}(t) \rangle + \langle Q\hat{\mathbf{y}}(t), \hat{\mathbf{y}}(t) \rangle - e^{-m\tau}\langle Q\hat{\mathbf{y}}(t - \tau), \hat{\mathbf{y}}(t - \tau) \rangle \\ & + 2\langle H\hat{\mathbf{y}}(t), F(\hat{\mathbf{y}}(t)) \rangle + 2\langle H\hat{\mathbf{y}}(t), G(\hat{\mathbf{y}}(t - \tau)) \rangle - m \int_{t-\tau}^t \langle K(t-s)\hat{\mathbf{y}}(s), \hat{\mathbf{y}}(s) \rangle ds. \end{aligned} \quad (55)$$

Оценим $2\langle H\hat{\mathbf{y}}(t), F(\hat{\mathbf{y}}(t)) \rangle$. Учитывая явный вид (34) вектор-функции $F(\hat{\mathbf{y}}(t))$, будем иметь

$$\begin{aligned} 2\langle H\hat{\mathbf{y}}(t), F(\hat{\mathbf{y}}(t)) \rangle & \leq 2\sqrt{\langle HF(\hat{\mathbf{y}}(t)), F(\hat{\mathbf{y}}(t)) \rangle} \sqrt{\langle H\hat{\mathbf{y}}(t), \hat{\mathbf{y}}(t) \rangle} \\ & \leq \sqrt{h_{11}}(a + \sqrt{a^2 + b^2})(\hat{x}^2(t) + \hat{z}^2(t))\sqrt{H\hat{\mathbf{y}}(t), \hat{\mathbf{y}}(t)} \leq qV^{3/2}(t, \hat{\mathbf{y}}), \end{aligned} \quad (56)$$

где q определено в (52).

Оценим

$$w(t) = \langle Q\hat{\mathbf{y}}(t), \hat{\mathbf{y}}(t) \rangle - e^{-m\tau}\langle Q\hat{\mathbf{y}}(t - \tau), \hat{\mathbf{y}}(t - \tau) \rangle + 2\langle H\hat{\mathbf{y}}(t), G(\hat{\mathbf{y}}(t - \tau)) \rangle.$$

Используя явный вид (48) матрицы Q и явный вид (34) вектор-функции $G(\hat{\mathbf{y}}(t - \tau))$, получим неравенство

$$\begin{aligned} w(t) & \leq \alpha\hat{z}^2(t) - \alpha e^{-m\tau}\hat{z}^2(t - \tau) + 2\sqrt{\langle HG(\hat{\mathbf{y}}(t - \tau)), G(\hat{\mathbf{y}}(t - \tau)) \rangle} \sqrt{\langle H\hat{\mathbf{y}}(t), \hat{\mathbf{y}}(t) \rangle} \\ & \leq \frac{\alpha}{h_{\min}}\langle H\hat{\mathbf{y}}(t), \hat{\mathbf{y}}(t) \rangle - \alpha e^{-m\tau}\hat{z}^2(t - \tau) + 2kb\sqrt{h_{22}}|\hat{x}(t - \tau)||\hat{z}(t - \tau)|\sqrt{\langle H\hat{\mathbf{y}}(t), \hat{\mathbf{y}}(t) \rangle} \\ & \leq \frac{\alpha}{h_{\min}} \left(1 + \frac{\hat{x}^2(t - \tau)}{\theta^2} \right) \langle H\hat{\mathbf{y}}(t), \hat{\mathbf{y}}(t) \rangle, \end{aligned} \quad (57)$$

где θ определено в (52).

В силу неравенств (56) и (57) из (55) получим оценку

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(t, \hat{\mathbf{y}}) &\leq -\left(\beta - \frac{2\alpha}{h_{\min}}\right)\langle H\hat{\mathbf{y}}(t), \hat{\mathbf{y}}(t)\rangle + qV^{3/2}(t, \hat{\mathbf{y}}) \\ &\quad - \frac{\alpha}{h_{\min}}\left(1 - \frac{\hat{x}^2(t-\tau)}{\theta^2}\right)\langle H\hat{\mathbf{y}}(t), \hat{\mathbf{y}}(t)\rangle - m \int_{t-\tau}^t \langle K(t-s)\hat{\mathbf{y}}(s), \hat{\mathbf{y}}(s)\rangle ds. \end{aligned}$$

С учетом обозначения (52) величины ε и определения (35) функционала $V(t, \hat{\mathbf{y}})$ отсюда следует неравенство

$$\frac{d}{dt}V(t, \hat{\mathbf{y}}) \leq -\varepsilon V(t, \hat{\mathbf{y}}) + qV^{3/2}(t, \hat{\mathbf{y}}) - \frac{\alpha}{h_{\min}}\left(1 - \frac{\hat{x}^2(t-\tau)}{\theta^2}\right)\langle H\hat{\mathbf{y}}(t), \hat{\mathbf{y}}(t)\rangle. \quad (58)$$

Сначала рассмотрим случай $t \in [0, \tau]$. В силу условия (50) из оценки (58) вытекает неравенство

$$\frac{d}{dt}V(t, \hat{\mathbf{y}}) \leq -\varepsilon V(t, \hat{\mathbf{y}}) + qV^{3/2}(t, \hat{\mathbf{y}}). \quad (59)$$

Отсюда нетрудно получить оценку на $V(t, \hat{\mathbf{y}})$. Действительно, рассмотрим вспомогательную задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}v(t) = -\varepsilon v(t) + qv^{3/2}(t), \\ v(0) = V(0, \hat{\mathbf{y}}), \end{cases}$$

где $V(0, \hat{\mathbf{y}}) = V(0, \varphi - \mathbf{y}_0)$. Тогда справедлива оценка (см., например, [33, гл. III, § 4])

$$V(t, \hat{\mathbf{y}}) \leq v(t).$$

Учитывая явный вид функции $v(t)$, отсюда получаем неравенство

$$V(t, \hat{\mathbf{y}}) \leq \frac{V(0, \varphi - \mathbf{y}_0)}{\left(1 - \frac{q}{\varepsilon}\sqrt{V(0, \varphi - \mathbf{y}_0)}\right)^2} e^{-\varepsilon t}. \quad (60)$$

В частности, в силу условия (51) при $t \in [0, \tau]$ имеем

$$|\hat{x}(t)| \leq \frac{\sqrt{V(t, \hat{\mathbf{y}})}}{\sqrt{h_{\min}}} \leq \frac{1}{\sqrt{h_{\min}}} \frac{\sqrt{V(0, \varphi - \mathbf{y}_0)}}{\left(1 - \frac{q}{\varepsilon}\sqrt{V(0, \varphi - \mathbf{y}_0)}\right)} \leq \theta. \quad (61)$$

Теперь рассмотрим случай $t \in [\tau, 2\tau]$. Учитывая (61), из оценки (58) получим (59), откуда вытекает неравенство (60). Проводя аналогичные рассуждения для случая $t \in [n\tau, (n+1)\tau]$, $n \in \mathbb{N}$, установим неравенство (60) при всех $t > 0$.

В силу замены (31) из оценки (60) вытекает неравенство (53).

Теорема доказана.

Благодарности. Авторы выражают благодарность д. ф.-м. н. Г. В. Демиденко и к. ф.-м. н. И. И. Матвеевой за внимание к работе и рецензенту за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gopalsamy K. Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics. Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1992. (Math. Appl. (Dordrecht); V. 74).
2. Kuang Y. Delay differential equations: with applications in population dynamics. Boston, MA: Acad. Press, 1993. (Math. Sci. Eng.; V. 191).

3. *Smith H. L.* Monotone dynamical systems: an introduction to the theory of competitive and cooperative systems. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1995. (Math. Surv. Monogr.; V. 41).
4. *Erneux T.* Applied delay differential equations. New York: Springer-Verl., 2009. (Surv. Tutor. Appl. Math. Sci.; V. 3).
5. *Lotka A. J.* The elements of physical biology. Baltimore: Williams & Wilkins Co.; London: Bailliere, Tindall & Cox, 1925.
6. *Volterra V.* Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi // Mem. Reale Accad. Naz. Lincei. 1926. V. 2. P. 31–113.
7. *Liu Sh., Chen L., Agarwal R.* Recent progress on stage-structured population dynamics // Math. Comput. Modelling. 2002. V. 36, N 11–12. P. 1319–1360.
8. *Ruan S.* On nonlinear dynamics of predator-prey models with discrete delay // Math. Model. Nat. Phenom. 2009. V. 4, N 2. P. 140–188.
9. *Wang W., Chen L.* A predator-prey system with stage-structure for predator // Comput. Math. Appl. 1997. V. 33, N 8. P. 83–91.
10. *Xu R.* Global stability and Hopf bifurcation of a predator-prey model with stage structure and delayed predator response // Nonlinear Dynam. 2012. V. 67. P. 1683–1693.
11. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестн. НГУ. Серия: математика, механика, информатика. 2005. Т. 5, № 3. С. 20–28.
12. *Хусаинов Д. Я., Иванов А. Ф., Кожаметов А. Т.* Оценки сходимости решений линейных стационарных систем дифференциально-разностных уравнений с постоянным запаздыванием // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 8. С. 1137–1140.
13. *Mondié S., Kharitonov V. L.* Exponential estimates for retarded time-delay systems: LMI approach // IEEE Trans. Automatic Control. 2005. V. 50, N 2. P. 268–273.
14. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1025–1040.
15. *Demidenko G. V.* Stability of solutions to linear differential equations of neutral type // J. Anal. Appl. 2009. V. 7, N 3. P. 119–130.
16. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Об оценках решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 5. С. 1059–1077.
17. *Demidenko G. V., Matveeva I. I.* Estimates for solutions to a class of nonlinear time-delay systems of neutral type // Electron. J. Differ. Equ. 2015. V. 2015, N 34. P. 1–14.
18. *Demidenko G. V., Matveeva I. I.* Estimates for solutions to a class of time-delay systems of neutral type with periodic coefficients and several delays // Electron. J. Qualitative Theory of Differ. Equ. 2015. V. 2015, N 83. P. 1–22.
19. *Матвеева И. И.* Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 2. С. 344–352.
20. *Матвеева И. И.* Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа с несколькими запаздываниями // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53, № 6. С. 730–740.
21. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И., Скворцова М. А.* Оценки решений дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 5. С. 1063–1079.
22. *Матвеева И. И.* Оценки экспоненциального убывания решений одного класса нелинейных систем нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2020. Т. 60, № 4. С. 612–620.
23. *Matveeva I. I.* Exponential stability of solutions to nonlinear time-varying delay systems of neutral type equations with periodic coefficients // Electron. J. Differ. Equ. 2020. V. 2020, N 20. P. 1–12.
24. *Ыскак Т.* Оценки решений одного класса систем уравнений нейтрального типа с распределенным запаздыванием // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. Т. 17. С. 416–427.
25. *Перцев Н. В.* Применение M-матриц для построения экспоненциальных оценок решений задачи Коши для некоторых систем линейных разностных и дифференциальных уравнений // Мат. тр. 2013. Т. 16, № 2. С. 111–141.
26. *Перцев Н. В.* Экспоненциально убывающие оценки по части компонент решений нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием, возникающих в моделях живых систем // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 4. С. 901–912.

27. Скворцова М. А. Устойчивость решений в модели хищник-жертва с запаздыванием // Мат. заметки СВФУ. 2016. Т. 23, № 2. С. 108–120.
28. Скворцова М. А. Асимптотическая устойчивость положений равновесия и оценки решений в одной модели заболевания // Динамические системы. 2017. Т. 7, № 3. С. 257–274.
29. Скворцова М. А. Оценки решений в модели хищник-жертва с запаздыванием // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2018. Т. 25. С. 109–125.
30. Скворцова М. А. Об оценках решений в модели хищник-жертва с двумя запаздываниями // Сиб. электрон. мат. изв. 2018. Т. 15. С. 1697–1718.
31. Скворцова М. А. Асимптотические свойства решений в модели взаимодействия популяций с несколькими запаздываниями // Мат. заметки СВФУ. 2019. Т. 26, № 4. С. 63–72.
32. Скворцова М. А. Асимптотические свойства решений в модели хищник-жертва с двумя запаздываниями // Динамические системы. 2019. Т. 9, № 4. С. 367–389.
33. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

Поступила в редакцию 14 августа 2020 г.

После доработки 11 ноября 2020 г.

Принята к публикации 18 ноября 2020 г.

Скворцова Мария Александровна, Ыскак Тимур
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
sm-18-nsu@yandex.ru, istima92@mail.ru