V. M. Aleksandrov, T. M. Stupina, On integral equation arising in mechanics periodic problems with mixed boundary conditions,
Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh., 1996, Number 5, 49–55

Зоны непропускания частот определяем условием $|\Phi_2(\omega)|\leqslant 1$.

Область ($\mathrm{Re}\,\omega$, $\mathrm{Im}\,k$). Обозначим $k=ik_0$ и рассмотрим $k=\frac{\pi}{l}-iz$.

Для трех слоев в пакете имеем дисперсионное уравнение

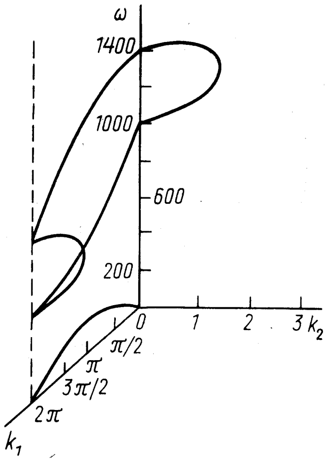
$$\pm\operatorname{ch}k_0l=\cos\omega_0-\left[\frac{(1-\bar\gamma_1)^2}{2\bar\gamma_1}\cos\omega_2\sin\omega_1+\frac{(1-\bar\gamma_2)^2}{2\bar\gamma_2}\times\right.$$

$$\left.\times\cos\omega_3\sin\omega_1\sin\omega_2+\frac{(1-\bar\gamma_3)^2}{2\bar\gamma_3}\cos\omega_1\sin\omega_2\sin\omega_3\right],$$

для двух слоев в пакете — дисперсионное уравнение

$$\pm\operatorname{ch}k_0l=\cos\omega_0-\frac{(1-\gamma)^2}{2\gamma}\sin\omega_1\sin\omega_2.$$

Это уравнение допускает решение в области $|\Phi(\omega)|\geqslant 1$. Построение дисперсионных кривых в этой области проводим тем же методом, что и в случае действительных значений.



Вычисления выполнены для случая двух слоев в пакете в действительной и комплексной области и представлены на рисунке.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 95—01—01551а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильюшина Е. А. Вариант моментной теории упругости для одномерной сплошной среды периодической структуры//Прикл. матем. и механ. 1972. **36.** 1086—1093.
2. Ильюшина Е. А., Короткина М. Р. О механическом и тепловом фильтрах// //Упругость и неупругость. М., 1987. 185—196.
3. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих средах. Киев, 1981.

Поступила в редакцию
09.02.96

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 5

УДК 539.3

В. М. Александров, Т. М. Ступина

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ, ВОЗНИКАЮЩЕМ В ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Двухпараметрическое с разностным периодическим ядром интегральное уравнение первого рода, к которому приводится широкий круг периодических задач механики сплошных сред со смешанными граничными условиями, преобразовано в двух случаях к сингулярному интегральному уравнению, для которого могут быть эффективно построены приближенные решения. В частном случае найдены замкнутые решения исходного уравнения. Рассмотрены антиплоские контактные задачи для упругого плоского и цилиндрического слоев.

1. В ряде периодических задач механики сплошных сред и некоторых задачах математической физики возникает следующее двухпараметрическое интегральное уравнение первого рода с разностным периодическим ядром [1—4]:

$$\int_{-1}^{1} \varphi(\xi) K[\alpha(\xi-x)]\, d\xi = \pi f(x) \quad (|x| \leqslant 1), \tag{1}$$

$$K(y) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{L(\beta u_k)}{u_k} e^{iu_k y} \quad (y = \alpha(\xi - x)). \tag{2}$$

Здесь α и β — безразмерные положительные параметры, причем $0<\alpha<\pi$ и $0<\beta<\infty$; функция $f(x)$ задана и такова, что ее первая производная при $|x|\leqslant 1$ удовлетворяет условию Гельдера; функция $L(v)$ — нечетная, непрерывная и не обращающаяся в нуль при $0<|v|<\infty$. Кроме того, для $L(v)$ имеют место соотношения

$$L(|v|) = 1 + O(v^{-2}) \quad (|v| \to \infty), \quad L(v) = Av + O(v^3) \quad (v \to 0), \tag{3}$$

где A — положительная постоянная. Что касается величин u_k, то встречаются два случая (далее 1 и 2)

1) $u_k = k - 1/2$, 2) $u_k = k$.

В силу (3) функцию $L(v)$ можно представить в форме

$$\begin{gathered} L(v) = \operatorname{th} Av + g(v), \\ g(|v|) = O(v^{-2}) \; (|v| \to \infty), \quad g(v) = O(v^3) \; (v \to 0), \\ |g(v)| \leqslant \delta \quad (0 < |v| < \infty), \end{gathered} \tag{4}$$

причем величина δ в реальных задачах, как правило, мала.

Рассмотрим ряд

$$M_i(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{th} \gamma u_k \sin u_k y \quad (\gamma = \beta A). \tag{5}$$

В случаях 1 ($i=1$) и 2 ($i=2$) ему соответственно можно придать вид [5, формулы 1.441(2), 1.442(2), 8.146(10, 12)]

$$\begin{gathered} M_1(y) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{cosec} \frac{y}{2} - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{2k-1}}{1+q^{2k-1}} \sin\left(k - \frac{1}{2}\right) y\right] = \frac{K(e)\operatorname{dn} u}{\pi \operatorname{sn} u}, \\ M_2(y) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{ctg} \frac{y}{2} - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{2k}}{1+q^{2k}} \sin ky\right] = \frac{K(e)\operatorname{cn} u}{\pi \operatorname{sn} u} \quad (q = e^{-\gamma}). \end{gathered} \tag{6}$$

Здесь $u = \pi^{-1} K(e) y$, а величина $e<1$ определяется из трансцендентного уравнения

$$\pi K(\sqrt{1-e^2})\,[K(e)]^{-1} = \gamma, \tag{7}$$

$K(e)$ — полный эллиптический интеграл первого рода; $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$ — эллиптические функции Якоби.

Продифференцируем интегральное уравнение (1), (2) один раз по x и с учетом (4)—(6) для случаев 1 и 2 соответственно запишем его в форме

$$\begin{gathered}
\mu\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)\,\frac{\operatorname{dn}[\mu(\xi-x)]}{\operatorname{sn}[\mu(\xi-x)]}\,d\xi=\pi f'(x)-\alpha\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)\,G_1[\alpha(\xi-x)]\,d\xi,\\
\mu\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)\,\frac{\operatorname{cn}[\mu(\xi-x)]}{\operatorname{sn}[\mu(\xi-x)]}\,d\xi=\pi f'(x)-\alpha\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)\,G_2[\alpha(\xi-x)]\,d\xi,
\end{gathered}\tag{8}$$

где $\mu=\pi^{-1}K(e)\alpha$, а функции $G_1(y)$ и $G_2(y)$ имеют вид

$$G_i(y)=\sum_{k=1}^{\infty}g(\beta u_k)\sin u_k y.$$

Можно показать, используя свойства $g(v)$, что функции $G_i(y)$ удовлетворяют при $|y|\leqslant 2\alpha$ условию Гельдера.

2. Далее рассмотрим отдельно четные ($\varphi(x)$ и $f(x)$ — четные функции) и нечетные ($\varphi(x)$ и $f(x)$ — нечетные функции) варианты уравнений (8). Заметим, что

$$\begin{gathered}
\frac{\operatorname{dn}[\mu(\xi-x)]}{\operatorname{sn}[\mu(\xi-x)]}-\frac{\operatorname{dn}[\mu(\xi+x)]}{\operatorname{sn}[\mu(\xi+x)]}=\frac{2\operatorname{sn}\mu x\operatorname{cn}\mu\xi\operatorname{dn}\mu x}{\operatorname{sn}^2\mu\xi-\operatorname{sn}^2\mu x},\\
\frac{\operatorname{dn}[\mu(\xi-x)]}{\operatorname{sn}[\mu(\xi-x)]}+\frac{\operatorname{dn}[\mu(\xi+x)]}{\operatorname{sn}[\mu(\xi+x)]}=\frac{2\operatorname{sn}\mu\xi\operatorname{cn}\mu x\operatorname{dn}\mu\xi}{\operatorname{sn}^2\mu\xi-\operatorname{sn}^2\mu x},\\
\frac{\operatorname{cn}[\mu(\xi-x)]}{\operatorname{sn}[\mu(\xi-x)]}-\frac{\operatorname{cn}[\mu(\xi+x)]}{\operatorname{sn}[\mu(\xi+x)]}=\frac{2\operatorname{sn}\mu x\operatorname{cn}\mu x\operatorname{dn}\mu\xi}{\operatorname{sn}^2\mu\xi-\operatorname{sn}^2\mu x},\\
\frac{\operatorname{cn}[\mu(\xi-x)]}{\operatorname{sn}[\mu(\xi-x)]}+\frac{\operatorname{cn}[\mu(\xi+x)]}{\operatorname{sn}[\mu(\xi+x)]}=\frac{2\operatorname{sn}\mu\xi\operatorname{cn}\mu\xi\operatorname{dn}\mu x}{\operatorname{sn}^2\mu\xi-\operatorname{sn}^2\mu x}.
\end{gathered}\tag{9}$$

Учитывая (9) и очевидное неравенство $\mu<K(e)$, а также тот факт, что функции $\operatorname{cn}Kx$ и $\operatorname{dn}Kx$ монотонно убывают от 1 до 0 при возрастании x от 0 до 1 [6], приведем уравнения (8) к виду

$$\begin{gathered}
\mu\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\xi)\operatorname{cn}\mu\xi}{\operatorname{sn}\mu\xi-\operatorname{sn}\mu x}\,d\xi=\frac{\pi f'(x)}{\operatorname{dn}\mu x}-\frac{\alpha}{\operatorname{dn}\mu x}\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)\,G_i[\alpha(\xi-x)]\,d\xi,\\
\mu\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\xi)\operatorname{dn}\mu\xi}{\operatorname{sn}\mu\xi-\operatorname{sn}\mu x}\,d\xi=\frac{\pi f'(x)}{\operatorname{cn}\mu x}-\frac{\alpha}{\operatorname{cn}\mu x}\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)\,G_i[\alpha(\xi-x)]\,d\xi,
\end{gathered}\tag{10}$$

где первое уравнение (10) имеет место для четного варианта первого уравнения (8) (случай 1) и нечетного варианта второго уравнения (8) (случай 2), второе уравнение (10) имеет место для нечетного варианта первого уравнения (8) (случай 1) и четного варианта второго уравнения (8) (случай 2).

Учитывая вновь, что $\mu<K(e)$, а функция $\operatorname{sn}Kx$ монотонно возрастает от 0 до 1 при возрастании x от 0 до 1 [6], введем новые переменные

$$\tau=\operatorname{sn}\mu\xi,\quad t=\operatorname{sn}\mu x,\quad c=\operatorname{sn}\mu.\tag{11}$$

Заметим также, что [5, формулы 8.154(4, 5), 8.158(1)]

$$d\tau=\mu\operatorname{cn}\mu\xi\operatorname{dn}\mu\xi\,d\xi,\quad \operatorname{cn}\mu x=\sqrt{1-t^2},\quad \operatorname{dn}\mu x=\sqrt{1-e^2t^2},\tag{12}$$

и введем обратную к $\operatorname{sn} u$ функцию

$$\xi = \mu^{-1} \operatorname{asn} \tau, \quad x = \mu^{-1} \operatorname{asn} t. \tag{13}$$

В силу определения [5, формула 8.144(1)] функции $\operatorname{sn} u$ имеем

$$\operatorname{asn} t = \int\limits_0^t \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-e^2x^2)}}.$$

Учитывая (11)—(13), приведем уравнения (10) к виду

$$\int\limits_{-c}^{c} \frac{\psi^{(j)}(\tau)}{\tau - t} d\tau = \pi h^{(j)}(t) - \int\limits_{-c}^{c} \psi^{(j)}(\tau) H_i^{(j)}(\tau, t) d\tau \quad (|t| \leqslant c), \tag{14}$$

где $j=1$ соответствует первому, а $j=2$ — второму уравнениям (10) и введены обозначения:

$$\frac{\varphi(\xi)}{\operatorname{dn} \mu\xi} = \psi^{(1)}(\tau), \quad \frac{f'(x)}{\operatorname{dn} \mu x} = h^{(1)}(t), \quad \frac{\varphi(\xi)}{\operatorname{cn} \mu\xi} = \psi^{(2)}(\tau), \quad \frac{f'(x)}{\operatorname{cn} \mu x} = h^{(2)}(t),$$

$$\left.\begin{aligned} H_i^{(1)}(\tau, t) &= \frac{\pi}{K(e)\sqrt{1-e^2t^2}\sqrt{1-\tau^2}} G_i \left[\frac{\pi}{K(e)} (\operatorname{asn} \tau - \operatorname{asn} t)\right], \\ H_i^{(2)}(\tau, t) &= \frac{\pi}{K(e)\sqrt{1-e^2\tau^2}\sqrt{1-t^2}} G_i \left[\frac{\pi}{K(e)} (\operatorname{asn} \tau - \operatorname{asn} t)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Важно отметить, что $c < 1 < 1/e$ и особенности в знаменателях выражений $H_i^{(j)}(\tau, t)$ лежат вне интервалов определения и интегрирования уравнения (14).

3. Для решения сингулярных интегральных уравнений первого рода (14) могут быть использованы любые известные приближенные методы, и в частности метод коллокации по чебышевским узлам, обладающий высокой эффективностью и известный как метод Мультоппа—Каландия [4, 7, 8].

Если функция $f(x)$ и, следовательно, функция $\varphi(x)$ в уравнении (1) имеют как четную, так и нечетную части, т. е.

$$f(x) = f_+(x) + f_-(x), \quad \varphi(x) = \varphi_+(x) + \varphi_-(x),$$

где значком + помечены четные части, а значком — нечетные части, то, решая уравнения (14), найдем для случая 1

$$\varphi(x) = \operatorname{dn} \mu x \psi_+^{(1)}(\operatorname{sn} \mu x) + \operatorname{cn} \mu x \psi_-^{(2)}(\operatorname{sn} \mu x) \tag{16}$$

и для случая 2

$$\varphi(x) = \operatorname{cn} \mu x \psi_+^{(2)}(\operatorname{sn} \mu x) + \operatorname{dn} \mu x \psi_-^{(1)}(\operatorname{sn} \mu x), \tag{17}$$

причем $\psi_+^{(j)}(t)$ и $\psi_-^{(j)}(t)$ определяются как решения, соответствующие $f'_+(x)$ и $f'_-(x)$.

Заметим, что функции $\psi_+^{(j)}(t)$ находятся из сингулярных интегральных уравнений (14) с точностью до слагаемых

$$C^{(j)}(c^2 - t^2)^{-1/2},$$

где $C^{(j)}$ — произвольные постоянные. Их нужно определить из требования: решения (16) и (17) уравнения (14) удовлетворяют также исходному (непродифференцированному по x) уравнению (1), например, в точке $x=0$. Заметим, что точка $x=0$ выбрана лишь для упрощения.

Можно взять любую другую точку на отрезке $|x|\leqslant 1$, ибо уравнения (8)$\to$(10)$\to$(14) отличаются от (1) лишь на одну операцию дифференцирования.

Положив в (1) $x=0$ и воспользовавшись формулами (2.4), (2.5) работы [9], которые в принятых здесь обозначениях имеют вид

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{th}\gamma(k-1/2)}{k-1/2}\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)y=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\operatorname{cn}u}{1-\operatorname{cn}u},\\ \frac{1}{2}\gamma+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{th}\gamma k}{k}\cos ky=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\operatorname{dn}u}{1-\operatorname{dn}u}\end{gathered}\tag{18}$$

(заметим, что формулы (18) можно найти, интегрируя (5), (6) с помощью [5, формулы 5.135(3, 6)]; в работе [9] они даны с опиской — вместо th напечатано tg), придем после ряда преобразований с учетом (15) и (18) к следующему соотношению для определения $C^{(i)}$:

$$\int_{-c}^{c}\psi_{+}^{(i)}(\tau)\left[P_i(\tau)+R_i(\tau)\right]d\tau=\pi\mu f(0),\tag{19}$$

где введены обозначения:

$$P_1(\tau)=\frac{1}{2\sqrt{1-\tau^2}}\ln\frac{1+\sqrt{1-\tau^2}}{1-\sqrt{1-\tau^2}},$$

$$P_2(\tau)=\frac{1}{2\sqrt{1-e^2\tau^2}}\ln\frac{1+\sqrt{1-e^2\tau^2}}{1-\sqrt{1-e^2\tau^2}},$$

$$R_1(\tau)=\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}Q_1\left[\frac{\pi}{K(e)}\operatorname{asn}\tau\right],\quad R_2(\tau)=\frac{1}{\sqrt{1-e^2\tau^2}}Q_2\left[\frac{\pi}{K(e)}\operatorname{asn}\tau\right],$$

$$Q_i(y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{g(\beta u_k)}{u_k}\cos u_k y\quad(Q_i'(y)=-G_i(y)).$$

4. В частном случае, когда в (4) функция $g(v)\equiv 0$, уравнение (14) вырождается в классическое сингулярное интегральное уравнение первого рода с ядром Коши, решаемое в замкнутом виде (см., например, [4]). Тогда для четного варианта случая 1 имеем

$$\varphi_{+}(x)=\frac{\operatorname{dn}\mu x}{\pi\sqrt{c^2-\operatorname{sn}^2\mu x}}\left[P-\mu\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{c^2-\operatorname{sn}^2\eta\xi}\,f_{+}'(\xi)\operatorname{cn}\mu\xi}{\operatorname{sn}\mu\xi-\operatorname{sn}\mu x}d\xi\right].\tag{20}$$

Добавочное соотношение (19) для определения P примет вид

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_{+}(\xi)\operatorname{cn}\mu\xi}{\sqrt{1-\operatorname{sn}^2\mu\xi}}\ln\frac{1+\sqrt{1-\operatorname{sn}^2\mu\xi}}{1-\sqrt{1-\operatorname{sn}^2\mu\xi}}d\xi=2\pi f_{+}(0).\tag{21}$$

Для нечетного варианта случая 2 следует в (20) положить $P=0$ и заменить $f'_{+}(\xi)$ на $f'_{-}(\xi)$.

Для четного варианта случая 2 имеем

$$\varphi_{+}(x)=\frac{\operatorname{cn}\mu x}{\pi\sqrt{c^2-\operatorname{sn}^2\mu x}}\left[P-\mu\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{c^2-\operatorname{sn}^2\mu\xi}\,f_{+}'(\xi)\operatorname{dn}\mu\xi}{\operatorname{sn}\mu\xi-\operatorname{sn}\mu x}d\xi\right],\tag{22}$$

причем добавочное соотношение (19) для определения P примет вид

$$\int_{-1}^{1} \frac{\varphi_+(\xi)\,\mathrm{dn}\,\mu\xi}{\sqrt{1-e^2\,\mathrm{sn}^2\,\mu\xi}} \ln\frac{1+\sqrt{1-e^2\,\mathrm{sn}^2\,\mu\xi}}{1-\sqrt{1-e^2\,\mathrm{sn}^2\,\mu\xi}}\,d\xi = \pi\mu f_+(0). \tag{23}$$

Для нечетного варианта случая 1 нужно в (22) положить $P=0$ и заменить $f'_+(\xi)$ на $f'_-(\xi)$.

Заметим, что когда $f_+(x)\equiv f_+=\mathrm{const}$, то в силу соотношений [5, формулы 3.152(7), 4.317(10)] из формул (20)—(23) для четных вариантов случаев 1 и 2 соответственно будем иметь [9]

$$\begin{aligned} &\varphi_+(x) = \frac{\mu f_+\,\mathrm{dn}\,\mu x}{K(\sqrt{1-c^2})\sqrt{c^2-\mathrm{sn}^2\,\mu x}}, \quad N_0 = \frac{2f_+K(c)}{K(\sqrt{1-c^2})},\\ &\varphi_+(x) = \frac{\mu f_+\,\mathrm{cn}\,\mu x}{K(\sqrt{1-e^2c^2})\sqrt{c^2-\mathrm{sn}^2\,\mu x}}, \quad N_0 = \frac{2f_+K(ec)}{K(\sqrt{1-e^2c^2})}, \end{aligned} \tag{24}$$

где N_0 — интегральная характеристика, определяемая по формуле

$$N_0 = \int_{-1}^{1} \varphi_+(\xi)\,d\xi.$$

5. Рассмотрим антиплоскую задачу о деформировании защемленного по основанию упругого слоя толщины h периодической системой одинаковых полосовых штампов. Пусть период равен $2b$, ширина одного штампа $2a$ $(a<b)$, между штампами и верхней поверхностью слоя осуществляется полное сцепление.

Если штампы сдвигаются вдоль образующих касательными усилиями T, направленными попеременно в разные стороны, то задачу можно привести к случаю 1 интегрального уравнения (1), (2), а если штампы сдвигаются в одну сторону, то — к случаю 2 интегрального уравнения (1), (2) [1, 4]. При этом

$$\varphi_+(x) = \tau(ax)/G,\ L(v) = \mathrm{th}\,v,\ \alpha = \pi a/b,\ \beta = \pi h/b,\ f(x)\equiv f_+ = \varepsilon/a,$$

где $\tau(\eta)$ — контактное касательное напряжение, G — модуль сдвига, ε — величина перемещения каждого штампа по образующей под действием приложенного к нему усилия T.

Очевидно, решение такой задачи для случаев 1 и 2 дается формулами (24), в которых величина e определяется из уравнения (7) при $\gamma=\beta$, а $N_0=T/(Ga)$.

Рассмотрим антиплоскую задачу о деформировании защемленной по внешней границе упругой трубы цилиндрическим полосовым штампом. Пусть внешний и внутренний радиусы трубы равны соответственно a и b, между штампом и внутренней поверхностью трубы осуществляется полное сцепление, угол контакта штампа с поверхностью трубы $2\alpha_0$. Штамп сдвигается вдоль своей образующей касательным усилием T.

Такая задача приводится к случаю 2 интегрального уравнения (1), (2) [10]. При этом

$$\varphi_+(x) = \tau(ax)/G,\ L(v) = \mathrm{th}\,v,\ \alpha = \alpha_0,\ \beta = \ln(b/a),\ f(x)\equiv f_+ = \varepsilon/(\alpha_0 a),$$

где величины $\tau(\eta)$, G и ε пояснены выше.

Решение задачи дается двумя последними формулами (24), в которых величина e определяется из уравнения (7) при $\gamma=\beta$, а $N_0=$

$=T/(G\alpha_0 a)$. В таблице даны значения коэффициента сопротивления $V=T/(G\varepsilon)$ для ряда значений параметров α и β.

α	V		
	$\beta=2$	$\beta=4$	$\beta=8$
$\pi/9$	0,369	0,267	0,174
$2\pi/9$	0,490	0,326	0,197
$\pi/3$	0,599	0,372	0,213
$4\pi/9$	0,701	0,410	0,225

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В. М., Коваленко Е. В. Периодические контактные задачи для упругой полосы//Изв. АН АрмССР. Механика. 1977. **30**, № 4. 18—33.
2. Александров В. М. Аналитические методы решения задач теории упругости для тел конечных размеров с собственно смешанными граничными условиями//Актуальные проблемы механики деформируемых сред. Днепропетровск, 1979. 21—27.
3. Александров В. М., Коваленко Е. В. Контактные задачи для полосовых, цилиндрических, клиновидных и конусообразных областей//Статические и динамические смешанные задачи теории упругости. Ростов-на-Дону. 1983. 5—19.
4. Александров В. М., Коваленко Е. В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М., 1986.
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1963.
6. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М., 1968.
7. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. М., 1973.
8. Александров В. М., Ромалис Б. Л. Контактные задачи в машиностроении. М., 1986.
9. Коваленко Е. В., Тарасов Д. Г., Чебаков М. И. Точное решение антиплоской контактной задачи для конечных канонических областей//Прикл. матем. и механ. 1990. **54**, вып. 5. 837—841.
10. Александров В. М., Чебаков М. И. О методе однородных решений в смешанных задачах теории упругости для усеченного клина и кольцевого сектора// //Прикл. матем. и механ. 1983. **47**, вып. 5. 790—798.

Поступила в редакцию
26.02.96

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 5

УДК 539.2:3

Г. Л. Бровко

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ И КОНТИНУУМ КОССЕРА

Наряду с различными известными подходами к построению классической модели сплошной среды [1—4] в последние десятилетия интенсивное развитие получили новые, неклассические подходы к описанию механических процессов, особенно в неоднородных телах сложной структуры, включающей разнотипные взаимодействующие фазы. В таких подходах используются другие (более широкие) наборы основных характеристик, предусматривающие достаточно подробное описание (фазовой) структуры частицы среды (представительного объема), свойственных ей форм движений (степеней свободы) и взаимодействий