В. А. Мушруб, Критерий полупростоты кольца косых многочленов, *Фундамент. и прикл. матем.*, 1995, том 1, выпуск 3, 701–709

Критерий полупростоты кольца косых многочленов*

В. А. МУШРУБ
Московский педагогический государственный университет

УДК 512.552.16

Ключевые слова: кольцо косых многочленов, эндоморфизм кольца, радикал Джекобсона, первичный радикал.

Аннотация

Пусть R — ассоциативное кольцо и f — инъективный эндоморфизм кольца R такие, что расширение Кона–Жордана $A(R, f)$ удовлетворяет условию максимальности для левых аннуляторов. В данной статье получены критерии полупростоты кольца косых многочленов $R[x, f]$ над кольцом R. В частности, доказано, что кольцо косых многочленов полупросто тогда и только тогда, когда оно полупервично. Более того, показано, что кольцо косых многочленов является полупростым тогда и только тогда, когда кольцо R полупервично.

Abstract

V. A. Mushrub, Criteria of semisimplicity of skew polynomial ring, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika **1**(1995), 701–709.

Let R be an associative ring and f be an injective endomorphism of R such that the Cohn–Jordan extension $A(R, f)$ satisfies the ascending chain condition on left annihilators. In this paper we obtain some semiprimitivity criteria for the skew polynomial ring $R[x, f]$ over the ring R. In particular, we prove that the skew polynomial ring is semisimple if and only if its prime radical is zero. Furthermore, it is so if and only if the ring R is semiprime.

Работа посвящена радикалу Джекобсона и первичному радикалу колец косых многочленов. В статье [4] Дж. Рамом был получен критерий полупростоты кольца косых многочленов $R[x, \sigma]$ над кольцом R с условием максимальности для левых аннуляторов, где σ — автоморфизм кольца R (см. теорему 10).

Основная цель работы — доказательство теоремы 11, которая описывает условия, необходимые и достаточные для полупростоты кольца косых многочленов $R[x, f]$ над кольцом R с некоторым условием конечности, где f — инъективный эндоморфизм кольца R. Эта теорема обобщает упомянутый критерий Рама. Ранее она была анонсирована автором в статье [6].

*Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 95-01-01185, и Международным научным фондом и Российским правительством, грант JBX100.

Фундаментальная и прикладная математика 1995, **1**, № 3, 701–709.

Всюду далее R — ассоциативное кольцо (возможно без единицы), f — инъективный эндоморфизм кольца R. Все рассматриваемые в работе кольца предполагаются ассоциативными. Через $J(T)$ и $P(T)$ будем обозначать радикал Джекобсона и первичный радикал кольца T.

В работе используется конструкция расширения $A(R,f)$ кольца R с помощью эндоморфизма f, которая была введена и исследована Д. А. Жорданом [1] (см. также [5, глава 7 теорема 3.4]).

1. Определение. Пусть A — кольцо и f_1 — автоморфизм кольца A. Пару (A,f_1) будем называть расширением Кона – Жордана пары (R,f), если выполняются следующие условия (а) и (б):

(а) кольцо R является подкольцом кольца A и автоморфизм f_1 является продолжением эндоморфизма f;

(б) $A=\bigcup_{n\geqslant 0} f^{-n}(R)$.

Всюду далее символами A и f_1 будут обозначены кольцо и автоморфизм, составляющие расширение Кона – Жордана пары (R,f). Кольцо A, следуя Жордану, будем обозначать также через $A(R,f)$ и называть расширением Кона – Жордана кольца R.

Кольцо $A(R,f)$ определено однозначно с точностью до изоморфизма над R. Все необходимые сведения о конструкции кольца $A(R,f)$ могут быть найдены в работах [1], [2], [6], [7].

2. Определение. Идеал (правый идеал) I кольца R называется f-идеалом (соотв. правым f-идеалом), если $f^{-1}(I)=I$.

3. Определение. Последовательность $(K_n\colon n\geqslant 1)$ правых идеалов K_n кольца R будем называть f-последовательностью, если $f^{-1}(K_{n+1})=K_n$ для всех целых положительных чисел n.

4. Лемма ([7, теорема 2.2]). *Если B — ненулевой f_1-идеал (ненулевой правый f_1-идеал) кольца A, то $B\cap R$ — ненулевой f-идеал (соотв. ненулевой правый f-идеал) кольца R. Если I — ненулевой f-идеал (ненулевой правый f-идеал) кольца R, то $J=\bigcup_{n\geqslant 0} f_1^{-n}(I)$ — ненулевой f_1-идеал (соотв. ненулевой правый f_1-идеал) кольца A.*

5. Предложение ([1, теорема 4.7]). *Пусть $(K_n\colon n\geqslant 1)$ — произвольная f-последовательность правых идеалов кольца R, некоторый член K_p которой отличен от нуля. Тогда $\bigcup_{n\geqslant 1} f^{-n}(K_n)$ — ненулевой правый идеал кольца A.*

Пусть $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел и $R^1=R+\mathbb{Z}$ — кольцо, полученное присоединением к кольцу R единицы. Тогда эндоморфизм f можно продолжить на кольцо R^1, положив $f(r+z)=f(r)+z$ для всех элементов $r\in R$ и $z\in\mathbb{Z}$.

Обозначим через S кольцо косых многочленов $R[x,f]$ (точнее говоря, левостороннюю версию конструкции кольца косых многочленов). Элементами этого кольца служат конечные суммы $\sum_{i\geqslant 0} r_i x^i$, где $r_i\in R$, а умножение определяется правилом

$$xb=f(b)x \quad (\forall b\in R).$$

Положим $S_1 = A[x, f_1]$. Везде далее через S^* будет обозначено кольцо косых многочленов Лорана $A\langle x, f_1\rangle$, элементами которого служат конечные суммы вида $\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i x^i$, а умножение производится по правилу

$$xb = f_1(b)x \quad (\forall b \in A).$$

Нам потребуется и кольцо S_r, являющееся правосторонней версией $R_{(r)}[x, f]$ кольца косых многочленов над кольцом R. Элементами кольца S_r служат конечные суммы $\sum_{i\geqslant 0} x^i r_i$, а умножением определяется правилом

$$bx = xf_1(b) \quad (\forall b \in R).$$

6. Лемма. *Пусть $T = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} T_i$ — кольцо, градуированное аддитивной группой целых чисел. Тогда радикал Джекобсона и первичный радикал кольца T однородны: $J(T) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} J(T)\cap T_i$, $P(T) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} P(T)\cap T_i$. В частности, радикал Джекобсона и первичный радикал кольца косых многочленов однородны.*

Доказательство. Эта лемма — прямое следствие теоремы 1.6 [3].

Следующее определение принадлежит Дж. Раму.

7. Определение. Элемент $r \in R$ называется f-нильпотентным справа (слева), если для каждого целого положительного числа m существует целое положительное число $n = n(m)$, зависящее от m, такое, что $r \cdot f^m(r) \cdot \ldots \cdot f^{nm}(r) = 0$ (соответственно $f^{nm}(r) \cdot \ldots \cdot f^m(r)r = 0$). Будем говорить, что подмножество I кольца R обладает правым (левым) f-нильсвойством, если каждый элемент множества I является f-нильпотентным справа (слева).

Если M — подмножество кольца A, то положим

$$l(M) = \{a \in A\colon aM = 0\}, \quad r(M) = \{a \in A\colon Ma = 0\}.$$

Напомним, что односторонние идеалы $l(M)$ и $r(M)$ называются соответственно левым и правым аннуляторами множества M в кольце A. Следует подчеркнуть, что все аннуляторы подмножеств и элементов кольца R, используемые далее, берутся в кольце $A = A(R, f)$.

8. Лемма. *Пусть $a \in R$, $b \in R^1$ и m — целое положительное число. Если элемент ab является f-нильпотентным справа и $abf^m(a) \neq 0$, то $l(a) \neq l(abf^m(a))$.*

Доказательство. Допустим, что

$$abf^m(ab) \cdot \ldots \cdot f^{mk}(ab) = 0$$

и

$$abf^m(ab) \cdot \ldots \cdot f^{m(k-1)}(ab) \neq 0.$$

Если

$$ab \cdot \ldots \cdot f^{m(k-1)}(ab) f^{mk}(a) \neq 0,$$

то утверждение леммы следует из равенства

$$ab \cdot \ldots \cdot f^{m(k-1)}(ab) f^{mk}(abf^m(a)) = 0.$$

Если же

$$ab \cdot \ldots \cdot f^{m(k-1)}(ab) f^{mk}(a) = 0,$$

то

$$f_1^{-m(k-1)}(ab) \cdot \ldots \cdot f_1^{-m}(ab) \in l(abf^n(a))$$

и

$$f_1^{-m(k-1)}(ab) \cdot \ldots \cdot f_1^{-m}(ab) \notin l(a),$$

и поэтому $l(a) \neq l(abf^m(a))$.

9. Определение. Пусть I — подмножество кольца R. Будем говорить, что множество I обладает правым f^∞-нильсвойством, если для каждого элемента $r \in I$ существует целое положительное число $n = n(r)$, зависящее от r, такое, что элемент r является f^n-нильпотентным справа.

Определение левого f^∞-нильсвойства аналогично и может быть получено заменой в предыдущем определении правой стороны на левую.

10. Теорема (Дж. Рам [4, теорема 2.1]). *Пусть Q — кольцо, удовлетворяющее условию максимальности для левых аннуляторов, и γ — автоморфизм кольца Q. Тогда эквивалентны следующие условия а)–ж):*

а) $J(Q[x,\gamma]) \neq 0$;

б) $J(Q\langle x,\gamma\rangle) \neq 0$;

в) Q содержит ненулевой γ-идеал, обладающий правым γ-нильсвойством;

г) Q содержит ненулевой правый нильидеал;

д) $P(Q) \neq 0$;

е) $P(Q\langle x,\gamma\rangle) \neq 0$;

ж) $P(Q[x,\gamma]) \neq 0$.

11. Теорема. *Пусть R — ассоциативное кольцо, f — инъективный эндоморфизм кольца R и (A, f_1) — расширение Кона–Жордана пары (R, f). Предположим, что кольцо A удовлетворяет условию максимальности для правых аннуляторов. Тогда эквивалентны следующие условия 1)–8*):*

1) пара (A, f_1) удовлетворяет одному из эквивалентных условий а)–ж);

1) пара (A, f_1^{-1}) удовлетворяет одному из эквивалентных условий а)–ж);*

2) $J(S) \neq 0$;

2) $J(S_r) \neq 0$;*

3) R содержит ненулевой правый идеал, обладающий правым f^∞-нильсвойством;

4) $P(R) \neq 0$;

5) для некоторого целого положительного числа p кольцо R содержит ненулевой правый $f^p(R)$-подмодуль, обладающий правым f^p-нильсвойством;

6) $P(S) \neq 0$;

6) $P(S_r) \neq 0$;*

7) кольцо R содержит ненулевой идеал, обладающий правым f-нильсвойством;

8) кольцо R содержит ненулевой f-идеал, обладающий правым f-нильсвойством;

8^*) кольцо R содержит ненулевой f-идеал, обладающий левым f-нильсвойством.

Доказательство. Так как кольцо A удовлетворяет условию максимальности для левых аннуляторов и $R \subset A$, то кольцо R тоже удовлетворяет условию максимальности для левых аннуляторов. Как известно, каждый односторонний идеал кольца R, удовлетворяющего условию максимальности для левых аннуляторов, содержится в $P(R)$. Поэтому условие 4) эквивалентно каждому из приведенных ниже условий $4'$) и $4''$):

$4'$) кольцо R содержит некоторый ненулевой правый нильидеал;

$4''$) кольцо R содержит некоторый ненулевой левый нильидеал.

Доказательство теоремы поведем по схеме:

$$\begin{tikzcd}
(8^*) \arrow[dd, Leftrightarrow] & & & & (7) \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
& & & (8) \arrow[ur, Rightarrow] & & (3) \arrow[dr, Rightarrow] & \\
(1^*) \arrow[rr, Leftrightarrow] & & (1) \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[dd, Rightarrow] & & & & (4) \arrow[llll, Rightarrow] \\
& & & (2) \arrow[dr, Rightarrow] & & (6) \arrow[ur, Rightarrow] & \\
(2^*) \arrow[uu, Rightarrow] & & (6^*) \arrow[ll, Rightarrow] & & (5) \arrow[ur, Rightarrow] & &
\end{tikzcd}$$

Для того чтобы доказать теорему, сначала покажем, что 8) $\Longrightarrow$ 7) $\Longrightarrow$ 3) $\Longrightarrow$ 4) $\Longrightarrow$ 1) $\Longrightarrow$ 8) и 1) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 5) $\Longrightarrow$ 6) $\Longrightarrow$ 4), затем покажем, что выполняются эквивалентности 1) $\Longleftrightarrow$ 1^*) и 8^*) $\Longleftrightarrow$ 1^*) и, наконец, установим справедливость импликаций 6^*) $\Longrightarrow$ 2^*) $\Longrightarrow$ 1^*) и 1) $\Longrightarrow$ 6^*).

“8) $\Longrightarrow$ 7) $\Longrightarrow$ 3)”. Очевидно.

“3) $\Longrightarrow$ 4)”. Метод доказательства этой импликации аналогичен методу, предложенному в [4, теорема 2.1].

Пусть I — ненулевой правый идеал кольца R, обладающий правым f^∞-нильсвойством. Достаточно доказать, что I содержит некоторый ненулевой правый нильидеал кольца R.

Предположим, что I не является правым нильидеалом, и выберем элемент $r \in I$, не являющийся нильпотентным и такой, что левый аннулятор $l(r)$ максимален в множестве $\{l(b)\colon b \in I,\ b$ не является нильпотентным$\}$. Пусть

$n = n(r)$ — такое целое положительное число, для которого элемент r является f^n-нильпотентным справа, и $g = f^n$.

Докажем, проводя рассуждения от противного, что $rg^m(r) \neq 0$ для некоторого положительного целого числа m. Предположим, что $rg^m(r) = 0$ для всех целых положительных чисел m. Положим $I_m = \{g^t(r) : t \geqslant m\}$, где $m \geqslant 1$. Так как $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ldots$, то получаем возрастающую цепочку левых аннуляторов: $l(I_1) \subseteq l(I_2) \subseteq l(I_3) \subseteq \ldots$. По условию максимальности $l(I_t) = l(I_{t+1})$ для некоторого целого положительного числа t. Поскольку $rg^m(r) = 0$ при $m \geqslant 1$, то $g^t(r) \in l(I_{t+1}) = l(I_t)$. Отсюда следует, что $g^t(r)g^t(r) = 0$. Значит, $r^2 = 0$, что противоречит выбору элемента r.

Пусть m — то положительное число, для которого $rg^m(r) \neq 0$, и t — наименьшее целое положительное число, для которого $rg^m(r) \cdot \ldots \cdot g^{tm}(r) = 0$ (такое число t должно существовать по определению g-нильпотентности справа). Положим $g_1 = f_1^m$, $s = rg^m(r) \cdot \ldots \cdot g^{(t-1)m}(r)$. Заметим, что $sR^1 \neq 0$. Предположим, что правый идеал sR^1 не является нильидеалом. Тогда для некоторого элемента $k \in R^1$ произведение sk не является нильпотентным. Так как $rg^m(r) \cdot \ldots \cdot g^{mt}(r) = 0$, то $g_1^{-m}(r) \in l(sk)$. С другой стороны, $g_1^{-m}(r) \notin l(r)$. Следовательно, $l(r) \neq l(sk)$, что противоречит максимальности левого аннулятора элемента r. Это противоречие показывает, что в том случае, когда правый идеал I не является нильидеалом, правый идеал sR^1 должен быть правым нильидеалом.

“4) $\Longrightarrow$ 1)”. Пусть $F = \{l(f^s(R^1)b) : b \in R,\ b \neq 0,\ bR^1b = 0,\ s \geqslant 0\}$. Так как $P(R) \neq 0$, то F не пусто. Пусть $l(f^k(R^1)r)$ — максимальный относительно включения элемент множества F.

Докажем, что для всех целых чисел z справедливо равенство

$$rA^1 f_1^z(r) = 0. \tag{1}$$

Для этого сначала покажем, что

$$f^n(rR^1)r = 0 \text{ при } n \geqslant k. \tag{2}$$

Предположим противное, тогда $f^n(ra)r \neq 0$ для некоторого элемента $a \in R^1$ и некоторого числа $n \geqslant k$. Положим $s = f^n(ra)r$. Легко видеть, что $sR^1s = 0$ и $s \in F$. Ввиду максимальности левого идеала $l(f^k(R^1)r)$ в множестве F получаем равенство

$$l(f^k(R^1)r) = l(f^n(R^1)r). \tag{3}$$

Равенство (3) и неравенство $f^n(r)f^n(R^1)r \neq 0$ показывают, что $f^n(r) \notin l(f^k(R^1)r)$. Так как $rR^1r = 0$, то $f^n(r)f^n(R^1)s = f^n(r)f^n(R^1)f^n(ra)r = 0$ и, следовательно, $f^n(r) \in l(f^n(R^1)s)$. Таким образом, $l(f^k(R^1)r) \neq l(f^n(R^1)s)$, что противоречит выбору элемента r и числа k. Равенство (2) доказано.

Пусть $L_m = r\left(\bigcup_{p=0}^m f_1^{-p}(rR^1)\right)$ для всех $m \geqslant 0$. Тогда $L_1 \supseteq L_2 \supseteq L_3 \supseteq \ldots$. Так как условие максимальности на левые аннуляторы равносильно условию минимальности на правые аннуляторы, должно существовать такое число m, что $L_m = L_i$ при $i \geqslant m$. Полагая $n = m + k$ в равенстве (2), получаем, что $f_1^{-(k+m)}(r) \in L_m = L_i$ при $i \geqslant m$ и, следовательно, $f_1^i(rR^1)f_1^{-(m+k)}(r) = 0$ для всех $i \geqslant m$. Применяя отображение f_1^{m+k}, убеждаемся, что

$$f_1^{-n}(rR^1)r = 0 \text{ при } n \leqslant k. \tag{4}$$

Теперь, используя равенства (2) и (4), несложно доказать, что $f^n(rR^1)f^z(r)=0$ для всех целых чисел n и z.

Пусть $M_n = \bigcup_{i=0}^n f^i(rR^1)$, где $n \geqslant 0$. Тогда $r(M_1) \supseteq r(M_2) \supseteq r(M_3) \supseteq \ldots$. Так как кольцо A удовлетворяет условию минимальности на правые аннуляторы, должно существовать такое число m, что $r(M_m) = r(M_{m+j})$ при $j \geqslant 0$. Используя очевидное равенство $r(M_m) = f^m(R^1)r(M_m)$, очевидные включения $r(M_m) \subseteq r(f^{m+j}(rR^1))$ при $j \geqslant 0$ и то, что $f_1^z(r) \in r(M_m)$ и $f^m(R^1)f_1^z(r) \subseteq f^m(R^1)r(M_m)$ для всех целых чисел z, несложно показать (см. [8, лемма 1]), что

$$f^{m+j}(rR^1)f^m(R^1)f_1^z(r) = 0$$

для всех целых чисел z и всех целых неотрицательных чисел j. Применяя к последнему равенству отображение $f_1^{-(m+j)}$, получаем, что $rf_1^{-j}(R^1)f_1^y(r) = rR^1f_1^{-j}(R^1)f_1^y(r) = 0$ для всех целых чисел y и всех целых неотрицательных чисел j. Отсюда следует равенство (1).

Теперь равенство (1) показывает, что $rx^zA\langle x, f_1\rangle rx^z = 0$ для всех целых чисел z. Таким образом, $P(S^*) \neq 0$.

“1) $\Longrightarrow$ 8)”. Пусть B — ненулевой f_1-идеал кольца A, обладающий правым f_1-нильсвойством. Тогда согласно лемме 4 $B \cap R$ — ненулевой правый f-идеал кольца R, который, как легко видеть, обладает правым f-нильсвойством.

“1) $\Longrightarrow$ 2)”. Рассмотрим инъективный эндоморфизм h кольца S, определяемый равенством

$$h(rx^n) = f(r)x^n \quad (\forall r \in R\ \forall n \geqslant 0),$$

и такой автоморфизм h_1 кольца S_1, что

$$h_1(ax^n) = f_1(a)x^n \quad (\forall a \in A\ \forall n \geqslant 0).$$

Отождествим естественным образом кольцо S с подкольцом кольца S_1 и заметим, что пара (S_1, h_1) является расширением Кона–Жордана пары (S, h). Пусть $B = P(S_1) \neq 0$. Тогда $h_1^{-1}(B) = B$. Используя лемму 4, видим, что $B \cap S$ — ненулевой идеал кольца S. Так как $S \subseteq S_1$, то $B \cap S \subseteq P(S)$. Отсюда $P(S) \neq 0$ и, следовательно, $J(S) \neq 0$.

“2) $\Longrightarrow$ 5)”. Предположим, что $J(S) \neq 0$. Так как радикал Джекобсона кольца косых многочленов однороден, то $J(S) = \bigoplus_{n \geqslant 0} J_n x^n$, где $J_n \subseteq R$, и получаем, что $J_p \neq 0$ для некоторого номера p. Можно считать, что $p > 0$, поскольку $J_p \subseteq J_{p+1}$ по лемме 3 [6]. Как показано в лемме 2.4 [9], $J_p x^p$ является нильподмножеством в S. Более того, согласно лемме 3 [6] $J_p \subseteq J_m$ при

$m \geqslant p$, поэтому $J_p x^m$ является нильмножеством для всех чисел $m \geqslant p$. Отсюда следует, что множество J_p обладает правым f^p-нильсвойством. Так как $J_p x^p R = J_p f^p(R) x^p \subseteq J_p x^p$, то J_p является правым $f^p(R)$-модулем.

"5) $\Longrightarrow$ 6)". Пусть B_p — ненулевой правый $f^p(R)$-подмодуль кольца R, обладающий правым f^p-нильсвойством. Выберем ненулевой элемент $t \in B_p$ так, чтобы левый аннулятор $l(t)$ был максимален в множестве $\{l(b) \colon b \in B_p,\ b \neq 0\}$. Так как $B_p f^p(R^1) \subseteq B_p$, то элемент $tyf^m(t)$ будет f^p-нильпотентным справа для всех $y \in f^p(R^1)$ и всех чисел $m \geqslant p$. В силу максимальности аннулятора $l(t)$ мы получаем, что $l(t) = l(tyf^m(t))$, если $tyf^m(t) \neq 0$. Но лемма 8 показывает, что $l(t) \neq l(tyf^m(t))$, если $tyf^m(t) \neq 0$. Поэтому $tyf^m(t) = 0$ для всех $y \in f^p(R^1)$ и всех чисел $m \geqslant p$. Отсюда $tx^p S t x^p = 0$ и, следовательно, $0 \neq tx^p \in P(S)$.

"6) $\Longrightarrow$ 4)". Если $P(R) = 0$, то $P(R)$ является f-инвариантным идеалом. Предложение 5 [6] показывает, что в этом случае кольцо $(R^1)[x, f]$ не содержит ненулевых нильпотентных идеалов и поэтому $P(S) = P((R^1)[x, f]) = 0$. Последнее равенство противоречит условию 6), следовательно, $P(R) \neq 0$.

"1) $\Longleftrightarrow$ 1*)". Для доказательства достаточно заметить, что пара (A, f_1) удовлетворяет условию д) тогда и только тогда, когда пара (A, f_1^{-1}) удовлетворяет условию д).

"8*) $\Longrightarrow$ 1*)". Пусть L — ненулевой f-идеал кольца R, обладающий левым f-нильсвойством. Тогда согласно лемме 4 $I = \bigcup_{n \geqslant 0} f^{-n}(L)$ — ненулевой f_1-идеал кольца A. Легко заметить, что идеал I обладает левым f_1-нильсвойством. Непосредственно проверяется, что идеал I обладает правым f_1^{-1}-нильсвойством. Таким образом, пара (A, f_1^{-1}) удовлетворяет условию в).

"1*) $\Longrightarrow$ 8*)". Пусть I — ненулевой f_1-идеал кольца A, обладающий правым f_1-нильсвойством. Используя лемму 4, можно показать, что $I \cap R$ — ненулевой f-идеал кольца R, обладающий левым f-нильсвойством.

Импликация "6*) $\Longrightarrow$ 2*)" очевидна.

"2*) $\Longrightarrow$ 1*)". Пусть $J(S_r) = \sum_{i \geqslant 0} x^i K_i \neq 0$, где $K_i \subseteq R$. Лемма 3 [6] показывает, что $K_n \subseteq K_m$ и $x^m K_n \subseteq J(S_r)$ при $m \geqslant n$. Поэтому $K_p \neq 0$ для некоторого номера $p > 0$. Пусть n — произвольное целое положительное число. Так как $x^m K_n \subseteq J(S_r)$ при $m \geqslant n$, то, как показано в лемме 2.4 [9], множества $x^m K_n$ являются нильподмножествами кольца S_r для всех чисел $m \geqslant n$. Отсюда следует, что для каждого целого положительного числа n правый идеал K_n кольца R обладает левым f^n-нильсвойством.

Как показывает следствие 3 [6], последовательность $(K_n \colon n \geqslant 1)$ является f-последовательностью правых идеалов кольца R, причем $K_p \neq 0$ для некоторого номера $p \geqslant 1$. По предложению 5 множество $I = \bigcup_{n \geqslant 1} f_1^{-n}(K_n)$ является ненулевым правым идеалом кольца A. Кроме того, правый идеал I обладает левым f_1^{∞}-нильсвойством, поскольку каждое из множеств $f_1^{-n}(K_n)$ обладает левым f_1^n-нильсвойством.

Пусть $\varphi = f_1^{-1}$. Непосредственно проверяется, что правый идеал I обладает правым φ^{∞}-нильсвойством. Так как φ — автоморфизм кольца A, то расширением Кона – Жордана пары (A, φ) является эта же пара (A, φ). Рассуждая так же, как и в доказательстве импликации "3) $\Longrightarrow$ 4)", получаем, что кольцо A обладает ненулевым правым нильидеалом и $P(A) \neq 0$. Таким образом, пара (A, f_1^{-1}) удовлетворяет условию д).

"1) $\Longrightarrow$ 6*)". Пусть $P(S_1) = \bigoplus_{i\geqslant 0} P_i x^i$, $P_i \subseteq A$, $t(x)$ — такой ненулевой элемент идеала $P(S_1)$, что $t(x)S_1t(x) = 0$, и $a \in P_n$ — старший коэффициент многочлена $t(x)$. Тогда $a \neq 0$ и $aS_1a = ax^nS_1ax^n \cdot x^{-2n} = 0$. Используя последнее равенство, несложно доказать, что $f_1^y(a)Af_1^z(a) = 0$ для любых целых чисел y и z. Так как $A = \bigcup_{n\geqslant 0} f_1^{-n}(R)$, существуют неотрицательное число n и ненулевой элемент $r \in R$, такие, что $a = f_1^{-n}(r)$. Очевидно, что $f_1^y(r)Af_1^z(r) = 0$ для любых целых чисел y и z. Отсюда следует, что $r \in P(S_r)$.

Теорема доказана.

Литература

[1] Jordan D. A. Biective extensions of injective ring endomorphisms // J. London Math. Soc., Ser. 2. — 1982. — V. 35. —№ 3. — P. 435–448.

[2] Wilkinson J. C. Quotient rings, chain conditions and injective ring endomorphisms // Glasgow Math. J. — 1989. — V. 31. — № 2. — P. 173–181.

[3] Puczylowski E. R. Behaviour of radical properties of rings under some algebraic constructions // Coll. Math. Soc. J'anos Bolyai. — V. 38 (Radical theory, Eger, Hungary, 1982). — P. 449–480 (MR 88f:16010).

[4] Ram J. On the semisimplicity of skew polynomial rings // Proc. Amer. Math. Soc. — 1984. — V. 90. — № 3. — P. 347–351.

[5] Кон П. Универсальная алгебра. — М.: Мир, 1968.

[6] Mushrub V. Endomorphisms and invariance of radicals of rings // Contemporary Mathematics. — 1992. —V. 131, Part II (Proc. of the Int. Conf. on Alg., Novosibirsk, 1989). — P. 363–380.

[7] Мушруб В. А. Расширения Кона – Жордана и кольца косых многочленов. В печати.

[8] Мушруб В. А. Инвариантность радикала ассоциативного кольца относительно мономорфизмов // Материалы 26 Всесоюзной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс". Математика. — Новосибирск, 1988. — С. 57–61.

[9] Bedi S. S., Ram J. Jacobson radical of skew polynomial rings and skew group rings // Isr. J. Math. — 1980. — V. 35. — № 4. — P. 327–337.

Статья поступила в редакцию в январе 1995 г.