



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. V. Favorskaya, I. B. Petrov, D. I. Petrov, N. I. Khokhlov, Numerical modeling of wave processes in layered media in the Arctic, *Mat. Model.*, 2015, Volume 27, Number 11, 63–75

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.172

March 27, 2025, 10:15:27



УДК 519.63

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ В УСЛОВИЯХ АРКТИКИ

© 2015 г. *А.В. Фаворская, И.Б. Петров, Д.И. Петров, Н.И. Хохлов*

Московский физико-технический институт

petrov@mipt.ru

Исследование выполнено в Московском физико-техническом институте (государственном университете) при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках Соглашения о предоставлении субсидии № 14.575.21.0084 от 20 октября 2014 года (уникальный идентификатор ПНИ: RFMEFI57514X0084).

Целью данной работы является численное моделирование волновых процессов в средах с линейно-упругими и акустическими слоями на примере задач сейсмической разведки в условиях Арктики и взрывного воздействия на айсберг. Решаются: полная система уравнений, описывающая состояние линейно-упругого тела, и система уравнений, описывающая акустическое поле. Используется сеточно-характеристический метод, позволяющий корректно описывать контактные и граничные условия, в том числе контактное условие между акустическими и линейно-упругими слоями.

Ключевые слова: сеточно-характеристический метод, численное моделирование, сейсморазведка в условиях Арктического шельфа, айсберги.

NUMERICAL MODELING OF WAVE PROCESSES IN LAYERED MEDIA IN THE ARCTIC

A.V. Favorskaya, I.B. Petrov, D.I. Petrov, N.I. Khokhlov

Moscow Institute of Physics and Technology

The aim of this work is numerical simulation of wave propagation in media with linear-elastic and acoustic layers. As an example the seismic exploration in the Arctic and the explosive impact of an iceberg had been simulated. The complete system of equations describing the state of a linearly elastic body and a system of equations describing the acoustic field are solving. The use of the grid-characteristic method provides correctly describing the contact and boundary conditions, including the contact condition of between acoustic and linear-elastic layers.

Key words: grid-characteristic method, numerical modeling, Arctic shelf seismic prospecting, icebergs.

1. Введение

Вопрос освоения Арктического шельфа Российской Федерации является актуальным в силу необходимости разработки и разведки месторождений углеводородов. На Арктическом шельфе России располагаются 8 месторождений, запасы в которых оцени-

ваются, приблизительно, в 2.7 трлн.м³. К объектам федерального значения относятся 5 месторождений: Ленинградское, Русановское в Карском море, Ледовое, Лудловское, Мурманское в Баренцевом море, Поморское, Северо-Гуляевское в Печорском. В целях нефтедобычи установлена ледостойкая платформа Приразломная в Печорском море, в целях добычи газа разрабатывается проект Штокмановского месторождения в Баренцевом море. Для данных месторождений необходимо уточнение выполненных ранее оценок запасов нефти и газа [1]. Фактором, который осложняет нефтедобычу в Северных морях, являются ледовые образования, в частности, айсберги [2-5].

Нефтеразведка в условиях Арктики обладает своей спецификой. Например, одним из слоев, через которые распространяются сигналы от источников, является море [6,7], другим – ледяной покров, вносящий свой вклад в измеряемые или вычисляемые отклики при сейсмической разведке. Помимо сейсмической, эффективной для разведки углеводородов представляется электромагнитная разведка; обзор работ по этой тематике приведен в [8].

2. Постановка задачи

В работе решаются полная система уравнений, описывающая состояние сплошной линейно-упругой среды и полная система уравнений, описывающая акустическое поле. Компоненты скорости движения \bar{v} и симметричного тензора напряжений Коши σ в линейно-упругой среде описываются следующей системой уравнений [9, 10]:

$$\rho \mathbf{v}_t = (\nabla \cdot \sigma)^T, \quad (1)$$

$$\sigma_t = \lambda (\nabla \cdot \bar{v}) \mathbf{I} + \mu (\nabla \otimes \mathbf{v} + (\nabla \otimes \mathbf{v})^T). \quad (2)$$

Для численного моделирования морской воды и нефтесодержащих включений использовалось приближение идеальной жидкости [11] и решалась полная система уравнений, описывающая акустическое поле давления p и компонент скорости \mathbf{v} :

$$\rho \mathbf{v}_t = -\nabla p, \quad (3)$$

$$p_t = -c^2 \rho (\nabla \cdot \mathbf{v}). \quad (4)$$

В (1), (2) λ , μ – параметры Ляме, определяющие свойства упругого материала, ρ – плотность, $\bar{a} \otimes \bar{b}$ – тензорное произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} , $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^{ij} = a^i b^j$, \mathbf{I} – единичный тензор второго ранга. В (4) за c обозначена скорость звука в идеальной жидкости. Скорость продольных волн в линейно-упругой среде можно найти по формуле

$$c_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}, \quad (5)$$

а скорость поперечных волн вычисляется в соответствии с

$$c_s = \sqrt{\mu/\rho}. \quad (6)$$

Реализованы граничные условия с заданной скоростью границы, с заданной внешней силой, смешанные граничные условия, контактные условия полного сцепления, свободного скольжения, контакт между жидкостью и твердым телом. Возникающие повреждения (трещины) учитываются путем использования критерия Мизеса [12].

3. Сеточно-характеристический метод

Для численного решения систем (1), (2) и (3), (4) используется сеточно-характеристический метод на криволинейных структурных сетках [13], позволяющий строить корректные численные алгоритмы для расчета граничных точек и точек, лежащих на поверхностях раздела двух сред с разными параметрами Ляме и (или) плотностями.

Систему (1), (2) в двумерном случае можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{A}_1 \mathbf{q}_{x_1} + \mathbf{A}_2 \mathbf{q}_{x_2} = 0. \quad (7)$$

В (7) под вектором \mathbf{q} понимается вектор, составленный из двух компонент скорости и трех компонент симметричного тензора напряжений

$$\mathbf{q} \in \{v_1, v_2, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\}^T.$$

Вначале применяется метод расщепления по пространственным координатам, в результате имеем две одномерные системы:

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{A}_j \mathbf{q}_{x_j} = 0. \quad (8)$$

Каждая из этих систем является гиперболической и обладает полным набором собственных векторов с действительными собственными значениями, поэтому каждую из систем можно переписать в виде

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{\Omega}_j^{-1} \mathbf{\Lambda}_j \mathbf{\Omega}_j \mathbf{q}_{x_j} = 0,$$

где матрица $\mathbf{\Omega}_j^{-1}$ – матрица, составленная из собственных векторов, $\mathbf{\Lambda}_j$ – диагональная матрица, элементами которой являются собственные значения. Для всех координат матрица $\mathbf{\Lambda}$ имеет вид (индекс j далее опускается, где это возможно):

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{c_p, -c_p, c_s, -c_s, 0\}.$$

После замены переменных $\mathbf{w} = \mathbf{\Omega} \mathbf{q}$ каждая из систем (8) распадается на пять независимых скалярных уравнений переноса:

$$\mathbf{w}_t + \mathbf{\Lambda} \mathbf{w}_x = 0.$$

Одномерные уравнения переноса решаются с помощью метода характеристик, либо обычными конечно-разностными схемами. После того как все компоненты перенесены, восстанавливается само решение:

$$\mathbf{q}^{n+1} = \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{w}^{n+1}.$$

В программе реализовано применение TVD-разностных схем 2-го порядка точности [14], 15 различных лимитеров [15], в расчетах в основном используются ограничитель *superbee* [16] и сеточно-характеристические схемы 2-4 порядка точности [13].

4. Контактное условие между жидкостью и твердым телом

Пусть в части области интегрирования a решается система уравнений (1), (2), а в части области интегрирования b решается система уравнений (3), (4). Рассмотрим контактное условие между ними. Система (1), (2) в трехмерном случае имеет три выходящих характеристики, а система (3), (4) в трехмерном случае имеет одну выходящую характеристику. Таким образом, для нахождения всех четырех выходящих характеристик необходимо выполнение следующих контактных условий:

$$p^{b,n+1} = -(\sigma^{a,n+1} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}, \quad (9)$$

$$\sigma^{a,n+1} \cdot \mathbf{n} - (\sigma^{a,n+1} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (10)$$

$$\mathbf{v}^{a,n+1} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}^{b,n+1} \cdot \mathbf{n}. \quad (11)$$

Условие (9) представляет собой равенство нормальной компоненты поверхностной плотности сил со стороны твердого тела давлению в идеальной жидкости, условие (10) обеспечивает равенство нулю тангенциальной компоненты поверхностной плотности сил со стороны твердого тела, а (11) задает равенство нормальных компонент скоростей в идеальной жидкости и твердом теле. В (9)-(11) за \mathbf{n} обозначена внешняя нормаль к твердому телу, являющаяся внутренней нормалью к жидкости.

Вычисляется вектор скорости \mathbf{V} , такой, чтобы условия (9)-(11) были выполнены. Далее для твердого тела используется граничное условие с заданной скоростью, а для жидкости используется граничное условие с заданной нормальной компонентой скорости.

5. Сейсморазведка в условиях Арктического шельфа

Были проведены численные эксперименты по решению задач сейсморазведки в условиях Арктического шельфа. Во всех расчетах шаг по пространству составлял 0.2 м, шаг по времени равнялся $3 \cdot 10^{-5}$ с, было выполнено 15 тысяч шагов по времени. Рассматривался слой льда толщиной 4 м и плотностью 917 кг/м^3 . Скорость продольных волн во льду полагалась равной 3940 м/с, а поперечных волн – 3650 м/с. Рассматривался слой воды толщиной 100 м, что соответствует Ленинградскому и Русановскому месторождениям Карского моря [1]. Скорость продольных волн в грунте составляла 6500 м/с, а поперечных 3700 м/с, плотность задавалась равной 2500 кг/м^3 . Плотность воды равнялась 1000 кг/м^3 , скорость звука составляла 1500 м/с. Ширина области интегрирования равнялась 1200 м. Рассчитывался слой дна глубиной 600 м. По бокам ставились неотражающие граничные условия [10].

Рассматривались источники, расположенные на льду, во льду, в воде подо льдом, на дне и в воде безо льда вблизи поверхности. Во всех случаях проводилось воздействие импульсом Риккера. По результатам численных экспериментов выяснилось, что вол-

новые картины при расположении источников на льду, во льду и в воде подо льдом, возникающие отклики и все виды сейсмограмм (с приемников на поверхности, с приемников на дне, с горизонтальной, вертикальной компонентами скорости и модулем скорости) схожи. Также при расположении источника на дне наличие льда существенно не влияет на получаемые как на дне, так и на поверхности льда или воды сейсмограммы.

Приемники располагались на дне либо на поверхности льда (при наличии льда) или воды. При расположении приемников на дне расположение источников не оказывает существенного влияния. Приемники на дне всегда дают больше информации: и вертикальную, и горизонтальную компоненты скорости. А при расположении приемников на поверхности как льда, так и воды теряется горизонтальная компонента скорости. При измерении на льду построение сейсмограмм по модулю скорости дает меньше информации, чем непосредственное построение сейсмограмм по вертикальной компоненте скорости из-за возрастания амплитуды за счет прибавления не несущей информации горизонтальной компоненты. Также отклики, регистрируемые на приемниках, расположенных на поверхности, значительно слабее, чем отклики, регистрируемые на приемниках, расположенных на дне, при одной и той же интенсивности воздействия.

Рассматривалось 4 типа резервуаров с глубиной залегания 50 м: короткий флюидонасыщенный, короткий осредненный, протяженный флюидонасыщенный и протяженный осредненный. Протяженный резервуар толщиной 20 м располагался по всей ширине области интегрирования и по его краям также ставились неотражающие граничные условия. Короткий резервуар имел размеры 20 м на 200 м. Во флюидонасыщенном резервуаре решалась система (3), (4) с плотностью, равной 900 кг/м^3 , и скоростью звука, равной 1470 м/с . В осредненном резервуаре решалась система (1), (2) со следующими упругими характеристиками: скоростью продольных волн, равной 4000 м/с , скоростью поперечных волн, равной 1250 м/с , и плотностью, равной 2000 кг/м^3 . Источник располагался на льду.

На рис.1 приведены волновые картины, соответствующие этим типам резервуаров, в момент времени 0.135 с . А на рис.2 приведены сейсмограммы в случае приемников на льду и измерения вертикальной компоненты скорости. На рис.1а, 2а рассчитывался протяженный флюидонасыщенный резервуар, на рис.1б, 2б – протяженный осредненный, на рис.1в, 2в – короткий флюидонасыщенный, а на рис.1г, 2г – короткий осредненный. На рис.2 и далее сейсмограммы построены с помощью программы, описанной в [17].

Во флюидонасыщенных резервуарах (рис.1а, в) можно видеть более активные отражения, чем в осредненных (рис.1б, г). Отклик от флюидонасыщенных резервуаров также более выраженный. На всех сейсмограммах, как в случае приемников на дне, так и в случае приемников на льду, от флюидонасыщенных резервуаров отклик более выраженный. В дальнейших приведенных в данной работе иллюстрациях рассматривается протяженный флюидонасыщенный резервуар.

Сравним волновые картины, возникающие при наличии источника в воде вблизи поверхности и на дне в случае безо льда. На рис.3 изображены волновые отклики для данных ситуаций, а на рис.4 – сейсмограммы, полученные с приемников, расположенных на поверхности воды при измерении вертикальной компоненты скорости. На рис.3а и 4а представлен случай с источником в воде вблизи поверхности, на рис.3б и 4б – он же без резервуара, на рис.3в и 4в – случай с источником на дне, а на рис.3г и 4г – он же без

резервуара. Волновые картины на рис.3а,б приведены в момент времени 0.135 с, а на рис.3в,г – в момент времени 0.09 с.

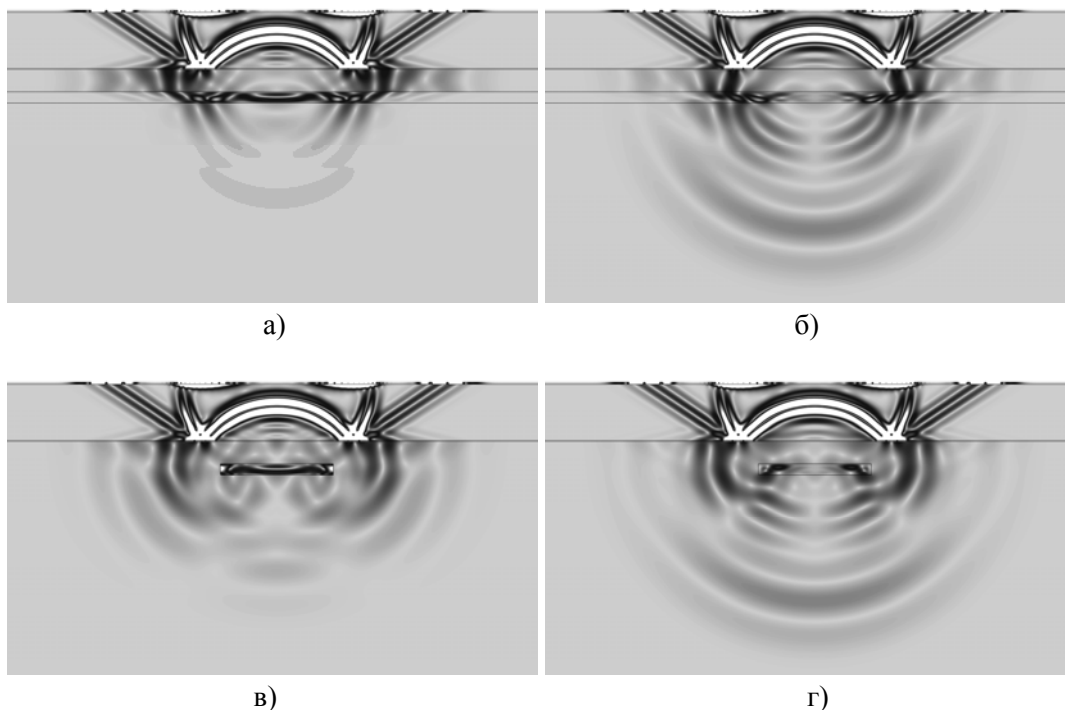


Рис.1. Волновые картины. Различные типы резервуаров.

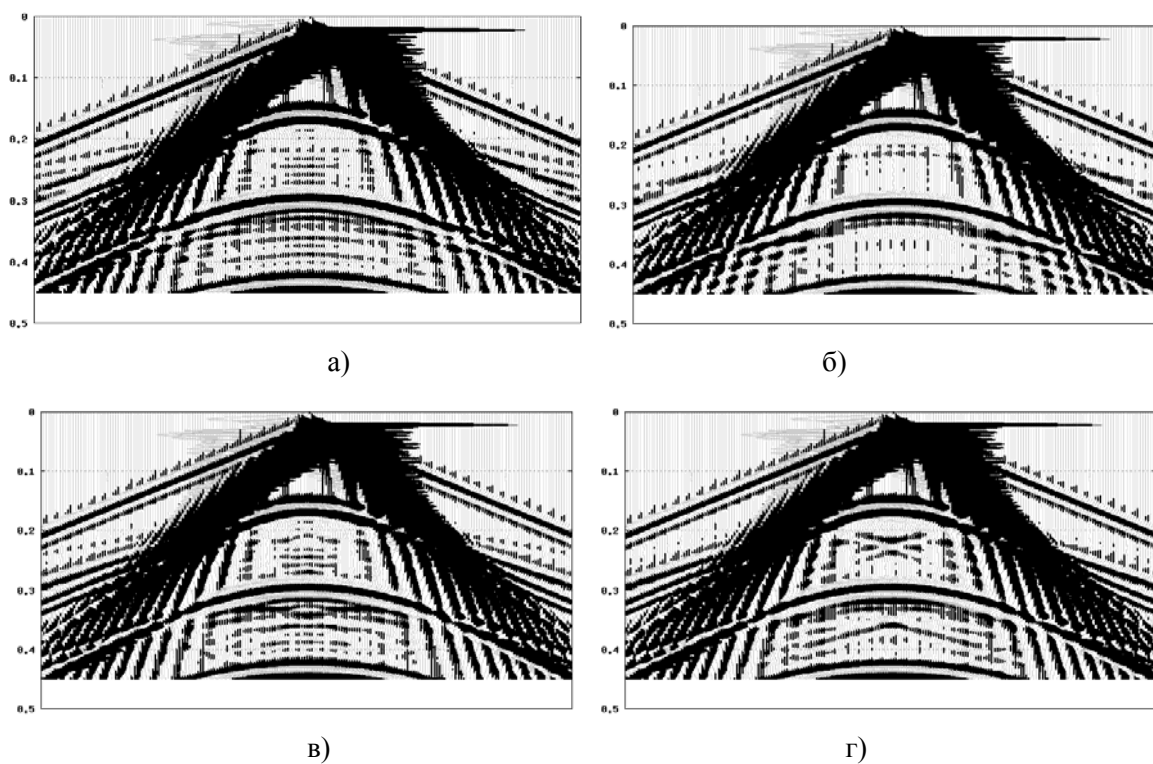


Рис.2. Сейсмограммы (вертикальная компонента скорости). Различные типы резервуаров.

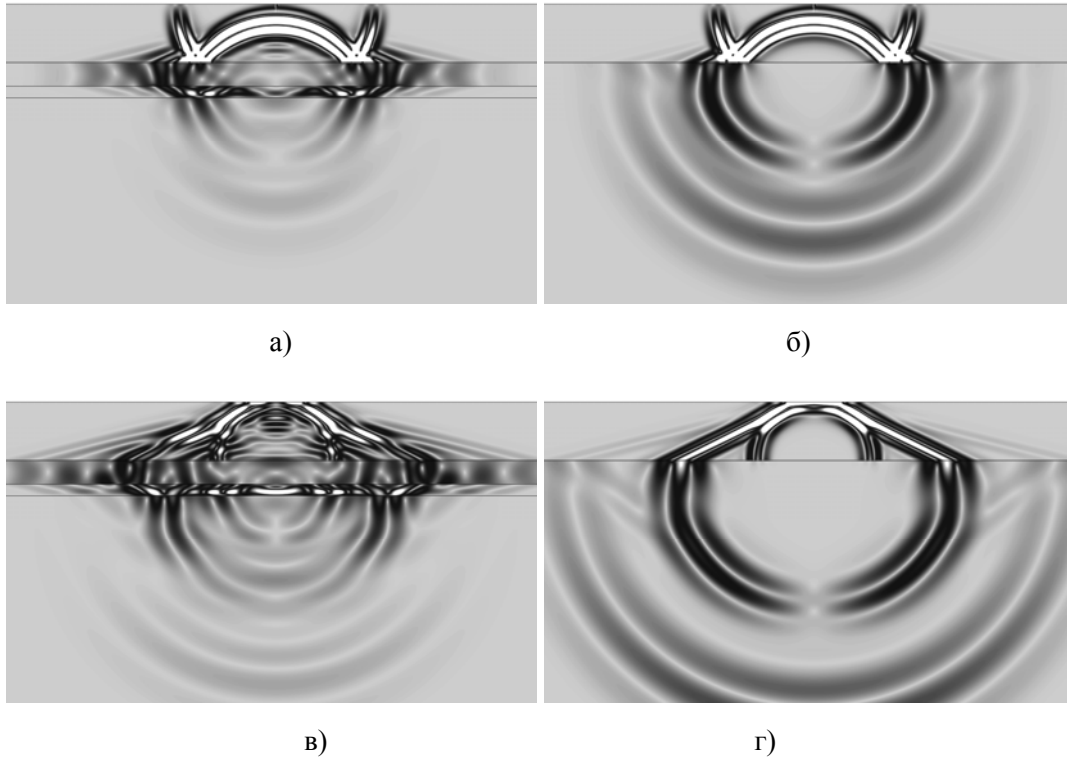


Рис.3. Волновые картины. Сравнение расположения источников в воде вблизи поверхности и на дне. Случай безо льда.

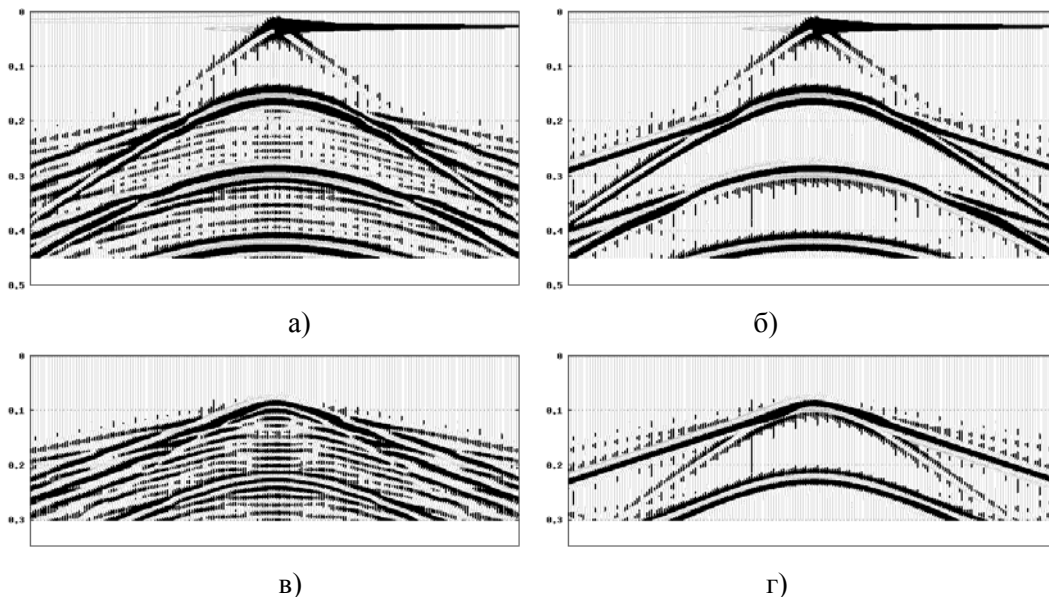


Рис.4. Сейсмограммы (вертикальная компонента скорости). Сравнение расположения источников в воде вблизи поверхности и на дне. Случай безо льда.

Сравним волновые картины, возникающие при наличии источника во льду и на дне при наличии льда. На рис.5 изображены волновые отклики для данных ситуаций, а на рис.6 – сейсмограммы, полученные с приемников, расположенных на поверхности льда при измерении вертикальной компоненты скорости. На рис.5а и 6а представлен случай с источником во льду, на рис.5б и 6б – он же без резервуара, на рис.5в и 6в – случай с ис-

точником на дне, а на рис.5г и 6г – он же без резервуара. Волновые картины на рис.5а, б приведены в момент времени 0.135 с, а на рис.5в, г – в момент времени 0.09 с.

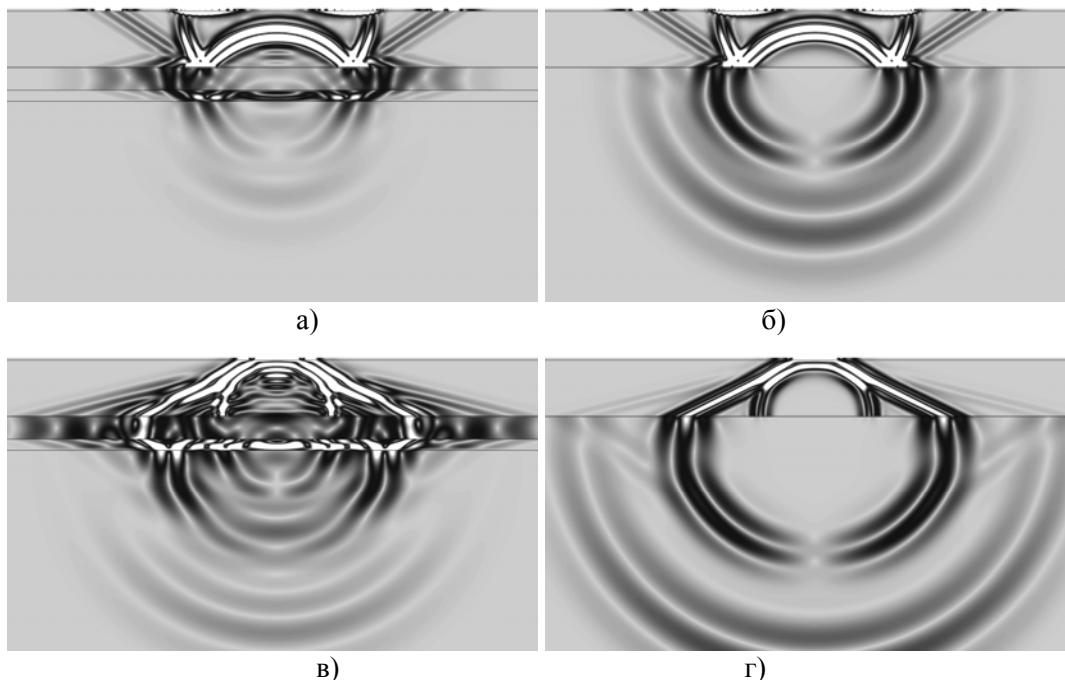


Рис.5. Волновые картины. Сравнение расположения источников во льду и на дне. Случай со льдом.

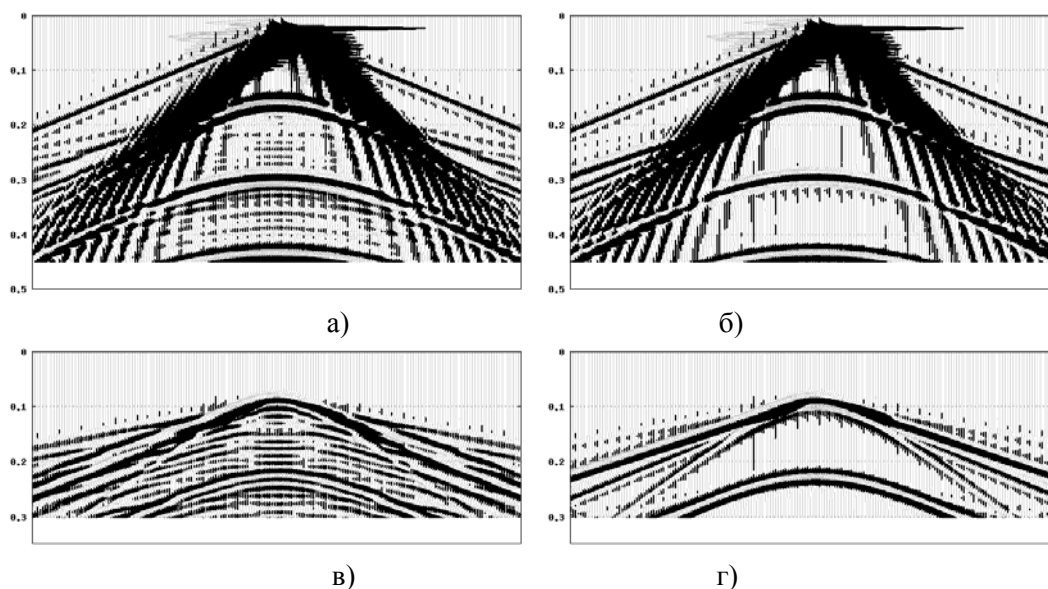


Рис.6. Сейсмограммы (вертикальная компонента скорости). Сравнение расположения источников во льду и на дне. Случай со льдом.

На рис.1, 3, 5 градацией серого изображен модуль скорости. Можно видеть, что расположение источника на дне даже в случае расположения приемников на поверхности является более информативным как в случае со льдом, так и в случае безо льда и наличие льда в данном случае не оказывает существенного влияния. В то время как в случае расположения источника и приемников вблизи поверхности в отсутствие льда получается более информативный отклик.

6. Ударное воздействие на айсберг

Рассматривался айсберг размером 100 м на 200 м плотностью 917 кг/м^3 , скоростью продольных волн, равной 3940 м/с , и скоростью поперечных волн, равной 3650 м/с . Максимальное значение тензора напряжений, фигурирующее в критерии Мизеса [12], во льду бралось равным 1.2 МПа . Вокруг льда рассматривался слой воды с плотностью, равной 900 кг/м^3 , и скоростью звука, равной 1470 м/с . На верхней границе воды и на границе льда, не контактирующей с водой, ставилось граничное условие свободной границы. По бокам области интегрирования ставились неотражающие граничные условия [10]. На верхнюю поверхность айсберга на площадке шириной 10 м действовала поверхностная плотность сил с амплитудой, равной 0.9 МПа . Шаг по времени брался равным $2.5 \cdot 10^{-5} \text{ с}$, а шаг по пространству – 0.1 м . На рис.7. приведена волновая картина, сформированная в айсберге и воде в момент времени, равный 0.055 с . Градацией серого показан модуль скорости, черным цветом показана зона локализации трещин в айсберге.

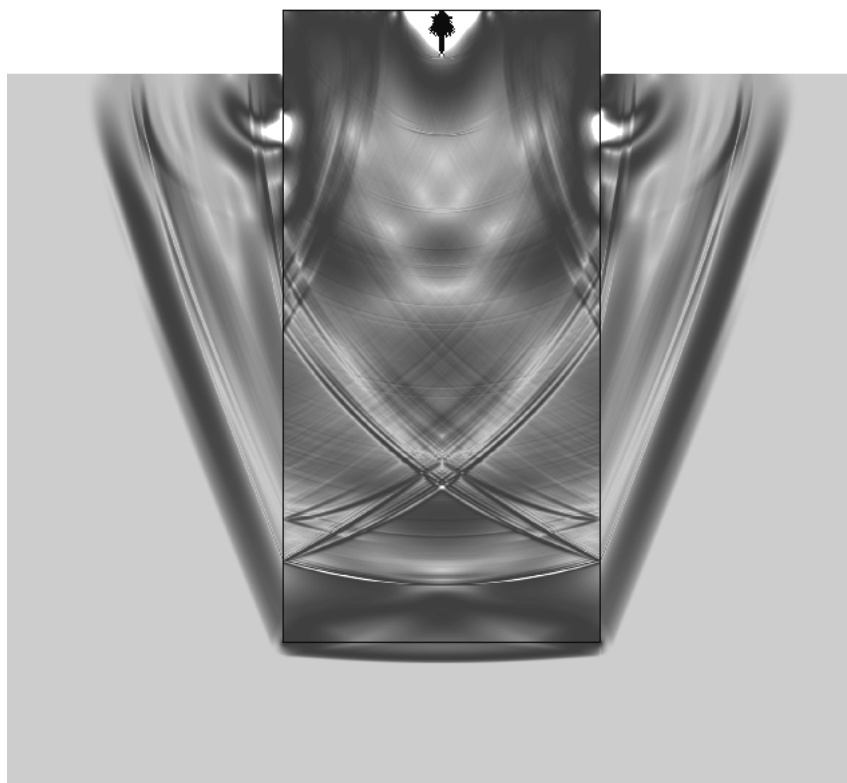


Рис.7. Волновая картина при ударном воздействии на айсберг и возникающая система трещин. Момент времени 0.055 с .

7. Трехмерное моделирование задач арктической сейсморазведки

Для моделирования сейсмических процессов в условиях северных морей в трёхмерном случае были проведены расчёты на прямоугольной сетке на $5.4 \cdot 10^7$ узлов. Исследовался отклик от одиночного источника импульса Рикера в многокомпонентной среде лёд-вода-грунт-включение на поверхности льда. Ширина области интегрирования составляла 120 м , глубина 60 м . По бокам области интегрирования задавались неотражающие граничные условия.

Было выполнено 15 000 итераций, на каждой проводился шаг по времени, равный $3 \cdot 10^{-5}$ с. Шаг по координате был постоянным и равнялся 0.4 м.

Были приняты следующие параметры среды: лёд толщиной 4 метра с плотностью 917 кг/м^3 , скорость распространения продольных волн была взята равной 3940 м/с , поперечных 2491 м/с . Слой воды имеет толщину 20 м с плотностью 1000 кг/м^3 и скоростью звука 1500 м/с . Для грунта плотности 2500 кг/м^3 скорости продольных и поперечных волн брались равными соответственно 6500 м/с и 3700 м/с . Плотность включения взята равной 2000 кг/м^3 . Скорость продольных и поперечных волн равнялись 4000 м/с и 1250 м/с соответственно.

На рис. 8 представлена волновая картина, возникающая в области интегрирования в момент времени $4.510 \cdot 10^{-4}$ с. На рис.9-12 изображены сечения, проходящие через центр области по двум вертикальным взаимноперпендикулярным плоскостям.

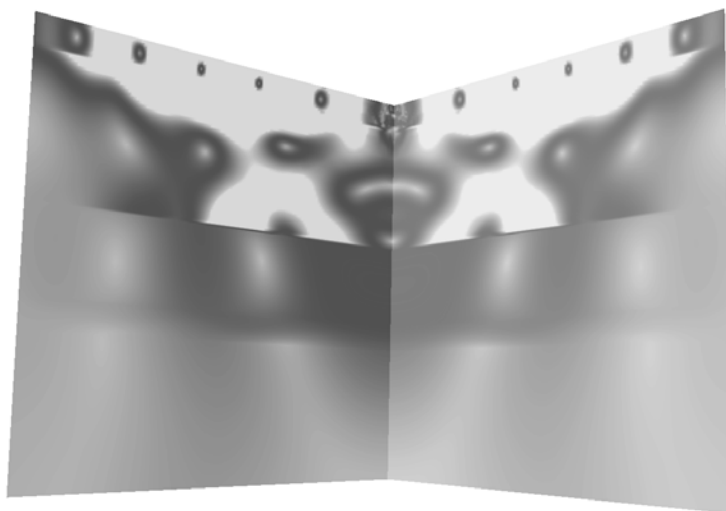


Рис.8. Волновая картина в среде лед-вода-грунт-включение.

На рис.9-12 также демонстрируются горизонтальные срезы в различных слоях. На рис.9 продемонстрировано распространение упругих волн в толще льда в момент времени $4.510 \cdot 10^{-4}$ с. Горизонтальный срез расположен на глубине 2 м от поверхности льда.

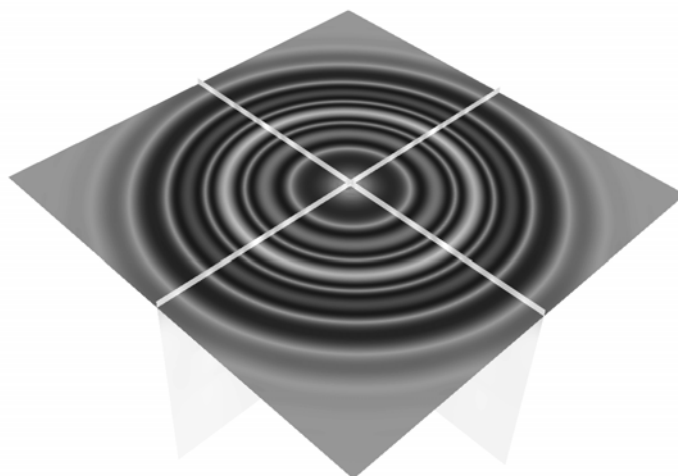


Рис.9. Распространение волн в толще льда.

На рис.10. наблюдается прохождение импульса сквозь воду. Интерференционная картина в центре обусловлена взаимодействием проходящей волны с откликом от нижележащих слоёв. Секущая плоскость помещена на глубине 14 м от поверхности льда.

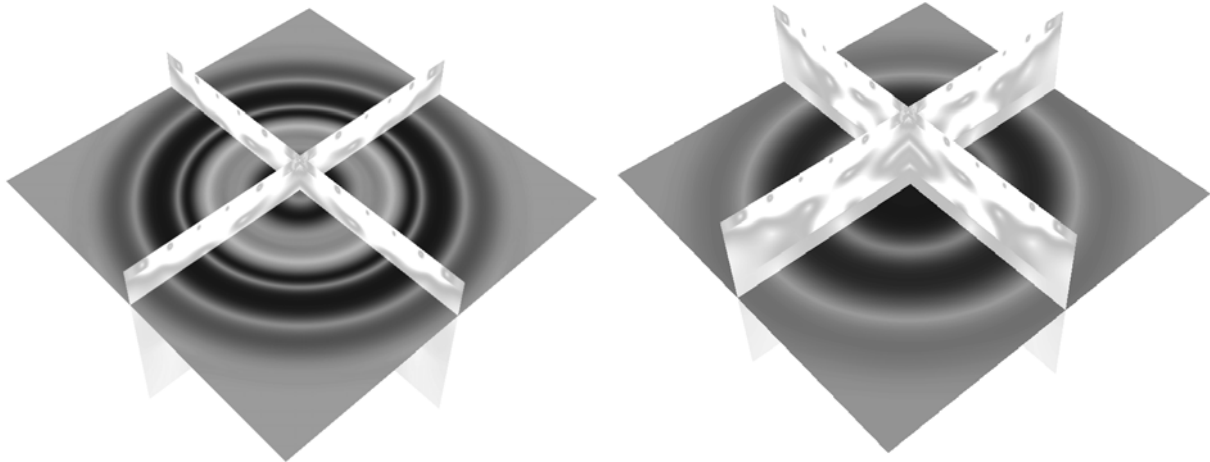


Рис.10. Интерференционная картина в слое воды. **Рис.11.** Формирование отклика от дна.

Формирование отклика от дна можно наблюдать на рис.11. Плоскость сечения располагается на расстоянии 30 м от поверхности льда. На рис.10, 11 волновая картина приведена также в момент времени $4.510 \cdot 10^{-4}$ с.

Прохождение волны сквозь нефтесодержащее включение представлено на рис.12. Горизонтальный срез проведён на глубине 38 м от поверхности льда.



Рис.12. Прохождение волны через нефтесодержащее включение.

8. Заключение

Проведено численное моделирование волновых процессов в средах с линейно-упругими и акустическими слоями. Решались задачи сейсмической разведки в условиях Арктического шельфа. На основе проведенных серий расчетов были построены синтетические сейсмограммы и проведен анализ влияния и взаимного влияния наличия льда, типов задаваемых нефтесодержащих резервуаров, положений приемников и источников. Также решалась задача об ударном воздействии на айсберг.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ю.Н. Новиков, С.В. Гажула. Особенности оценки месторождений углеводородного сырья Арктического шельфа России и их переоценки в соответствии с новой классификацией запасов // Нефтегазовая геология. Теория и практика, 2008, № 3, с.1-19;
Iu.N. Novikov, S.V. Gazhula. Osobennosti otsenki mestorozhdenij uglevodorodnogo syria arkticheskogo shelfa Rossii i ikh pereotsenki v sootvetstvii s novoj klassifikatsiej zapasov // Neftegazovaia geologiya. Teoriia i praktika, 2008, №3, s.1-19.
2. S.G. Lee, S.H. Lun, G.Y. Kong. Modeling and simulation system for marine accident cause investigation. Collision and Grounding of Ships and Offshore Structure. Amdahl, Ehlers and Leira (Eds). – London. Taylor and France Group, 2013, p.39-47.
3. A.T. Bekker, O.A. Sabobash, V.I. Seliverstov, G.I. Koff, E.N. Pipko. Estimation of Limit Ice Loads on Engineering Offshore Structures in the See of Okhotsk // Proceeding of the Nineteenth International Offshore and Polar Engineering Conference, 2009, p.574-579.
4. Р.В. Гольдштейн, Н.М. Осипенко. Трещиностойкость и разрушения ледяного покрова ледоколами // Труды ААНИИ, 1986, т.391, с.137-156;
R.V. Goldshtejn, N.M. Osipenko. Treshhinostojkost i razrusheniia ledianogo pokrova ledokolami // Trudy AANII, 1986, t.391, s.137-156.
5. Р.В. Гольдштейн, Н.М. Осипенко. Вопросы механики разрушения льда и ледяного покрова при анализе ледяных нагрузок // В сб. Вести газовой науки. Современные подходы и перспективные технологии в проектах освоения нефтегазовых месторождений российского шельфа. – М.: Газпром, ВНИИГАЗ, 2013, №3 (4), с.104-112;
R.V. Goldshtejn, N.M. Osipenko. Voprosy mehaniki razrusheniia lda i ledianogo pokrova pri analize ledianyh nagruzok. // V sb. Vesti gazovoj nauki. Sovremennye podkhody i perspektivnyye tehnologii v proektakh osvoeniia neftegazovykh mestorozhdenij rossijskogo shelfa. – M.: Gazprom, VNNIGAZ, 2013, №3 (4), s.104-112.
6. Д.Г. Левченко, А.В. Закиров, В.Д. Левченко. Динамическое моделирование распространения низкочастотных сейсмоакустических полей в океанической среде // Доклады академии наук, 2010, т.435, №4, с. 544-547;
D.G. Levchenko, A.V. Zakirov, V.D. Levchenko. Dynamic modeling of the propagation of low-frequency seismic acoustic fields in the oceanic medium // Doklady Earth Sciences, 2010, v.435, № 2, p.1623-1626.
7. В.А. Миряха, А.В. Санников, И.Б. Петров. Численное моделирование динамических процессов в твердых деформируемых телах разрывным методом Галёркина // Математическое моделирование, 2015, т.27, № 3, с.96-108;
V.A. Mirjakha, A.V. Sannikov, I.B. Petrov. Discontinuous Galerkin Method for Numerical Simulation of Dynamic Processes in Solids // Mathematical Models and Computer Simulations, 2015, v.7, №5, p.446-455.
8. М.С. Жданов. Теория обратных задач и регуляризация геофизики. – М.: Научный мир, 2007, 710с.;
M.S. Zhdanov. Geophysical Inverse Theory and Regularization Problems. – Elseiver, 2002, 609 p.
9. В. Новацкий. Теория упругости. – М.: Мир, 1975, 872 с.
V. Novatskij. Teoriia uprugosti. – M.: Mir, 1975, 872 s.
10. И.Б. Петров, А.В. Фаворская, А.В. Санников, И.Е. Квасов. Сеточно-характеристический метод с интерполяцией высоких порядков на тетраэдральных иерархических сетках с кратным шагом по времени // Математическое моделирование, 2013, т.25, №2, с.42-52;
I.B. Petrov, A.V. Favorskaya, A.V. Sannikov, I.E. Kvasov. Grid-characteristic method using high-order interpolation on tetrahedral hierarchical meshes with a multiple time step // Mathematical Models and Computer Simulations, 2013, v.5, № 5, p.409-415.

11. *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц.* Теоретическая физика, т.6. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1986, 376 с.;
L.D. Landau, E.M. Lifshitz. Fluid Mechanics (v.6 of A Course of Theoretical Physics). – Pergamon Press, 1959.
12. *В. Новацкий.* Волновые задачи теории пластичности. – М.: Мир, 1978, 307 с.;
V. Novatskij. Volnovye zadachi teorii plastichnosti. – М.: Mir, 1978, 307 s.
13. *В.И. Голубев, И.Б. Петров, Н.И. Хохлов.* Численное моделирование сейсмической активности сеточно-характеристическим методом // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2013, т.53, №10, с.1709-1720;
V.I. Golubev, I.B. Petrov, N.I. Khokhlov. Numerical simulation of seismic activity by the grid-characteristic method // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2013, v.53, №10, p.1523-1533.
14. *A. Harten.* High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // Journal of Computational Physics, 1997, v.135(2), p.260-278.
15. *И.Б. Петров, Н.И. Хохлов.* Сравнение TVD лимитеров для численного решения уравнений динамики деформируемого твердого тела сеточно-характеристическим методом // Математические модели и задачи управления: Сборник научных трудов, 2011, с.104-111;
I.B. Petrov, N.I. Khokhlov. Sravnenie TVD limiterov dlia chislennogo resheniia uravnenij dinamiki deformiruемого tverdogo tela setochno-harakteristicheskim metodom // Matematicheskie modeli i zadachi upravleniia: Sbornik nauchnyh trudov, 2011, s.104-111.
16. *P.L. Roe.* Characteristic-Based Schemes for the Euler Equations // Annual Review of Fluid Mechanics, 1986, № 18, p.337-365.
17. *В.И. Голубев.* Методика отображения и интерпретации результатов полноволновых сейсмических расчётов // Труды МФТИ, 2014, т.6, № 1, с. 54-161;
V.I. Golubev. Metodika otobrazheniia i interpretatsii rezultatov polnovolnovykh sejsmicheskikh raschetov // Trudy MFTI, 2014, t.6, №1, s.154-161.

Поступила в редакцию 17.03.2015.