Математические заметки

Том 81 выпуск 6 июнь 2007

УДК 517.95

О положительных решениях квазилинейных эллиптических неравенств на некомпактных римановых многообразиях

А. Г. Лосев, Ю. С. Федоренко

В работе рассматриваются обобщенные решения неравенства $-\operatorname{div}(A(x,u,\nabla u)\nabla u) \geqslant F(x,u,\nabla u)u^q$, $q>1$, на некомпактных римановых многообразиях. Найдены достаточные условия выполнения теоремы Лиувилля о тривиальности положительных решений рассматриваемого неравенства. Также получены точные условия для существования положительного решения неравенства $-\Delta u \geqslant u^q$, $q>1$, на сферически-симметричных некомпактных римановых многообразиях.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. Вопросы существования нетривиальных глобальных решений дифференциальных уравнений и неравенств вызывают повышенный интерес математиков в связи с их фундаментальной ролью как в теории, так и в приложениях. В течение последних десятилетий большое число работ было посвящено вопросам справедливости теорем типа Лиувилля на некомпактных римановых многообразиях. Классическая формулировка теоремы Лиувилля утверждает, что всякая ограниченная гармоническая в $\mathbb{R}^n$ функция является тождественной постоянной. Теоремам типа Лиувилля посвящены многочисленные работы ряда математиков (см., например, [1]–[7]). Достаточно подробно были исследованы решения уравнения

$$-\Delta u = u^q$$

в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. В частности, в работе [1] показано, что если $n \geqslant 3$ и $1<q<(n+2)/(n-2)$, то всякое неотрицательное в $\mathbb{R}^n$ решение данного уравнения является тождественным нулем. Если $q \geqslant (n+2)/(n-2)$, то уравнение имеет нетривиальные положительные решения (см., например, [7]).

В случае неравенства

$$-\Delta u \geqslant u^q \tag{1.1}$$

известно (см. [7]), что при $n \geqslant 3$ и $1<q\leqslant n/(n-2)$ всякое неотрицательное в $\mathbb{R}^n$ решение данного неравенства является тождественным нулем. Причем этот результат является точным. А именно, функция

$$u(x)=\frac{\kappa}{(1+|x|^2)^{1/(q-1)}}\,, \qquad x\in\mathbb{R}^n,$$

где κ – подходящая положительная константа, является положительным решением неравенства (1.1), если $q > n/(n-2)$. Вызывает интерес получение аналогичных результатов на некомпактных римановых многообразиях.

Пусть M – полное некомпактное риманово многообразие с краем (возможно, пустым).

Определение [5]. Локально-липшицеву функцию $h(x)\colon M \to [0;+\infty)$ будем называть *функцией исчерпания* на M, если

a) $B_h(t) = \{x \in M : h(x) < t\}$ – предкомпакт для любого $t \in (0;+\infty)$;

b) $\lim_{k\to\infty} h(x_k) = +\infty$ вдоль любой последовательности $x_k \in M$, не имеющей точек накопления на M;

c) $0 < \operatorname{ess\,inf}_M |\nabla h(x)| \leqslant \operatorname{ess\,sup}_M |\nabla h(x)| \leqslant 1$.

Примером функции исчерпания на полном римановом многообразии может служить функция геодезического расстояния.

В данной работе изучается поведение положительных решений неравенства

$$-\operatorname{div}(A(x,u,\nabla u)\nabla u) \geqslant F(x,u,\nabla u)u^q, \qquad q > 1, \tag{1.2}$$

на произвольных полных некомпактных римановых многообразиях. Здесь

$$A(x,\xi,\eta), F(x,\xi,\eta)\colon M \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$$

– непрерывные положительные функции. В частности, при различных выборах функции $A(x,\xi,\eta)$ в левой части неравенства (1.2) могут находиться такие операторы как p-лапласиан, оператор средней кривизны и т.д.

Будем называть липшицеву функцию $\varphi(x)$ *финитной в области* $\Omega \subset M$, если ее носитель – компакт в Ω.

Соглашение. Если многообразие M имеет непустой край, то всюду, не оговаривая это специально, будем рассматривать только такие решения неравенства (1.2), которые удовлетворяют условию

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial M} \geqslant 0,$$

где ν – внешняя нормаль к краю ∂M.

Определение. Локально липшицеву на M функцию $u(x)$ будем называть *обобщенным решением* неравенства (1.2), если для произвольной ограниченной области $\Omega \subset M$ с гладкой границей и любой положительной финитной в Ω функции $\varphi(x)$ выполнено

$$\int_\Omega \varphi(x)F(x,u,\nabla u)u^q(x)\,dx \leqslant \int_\Omega A(x,u,\nabla u)\nabla u\nabla\varphi\,dx. \tag{1.3}$$

Замечание. Если функция $A(x,u,\nabla u)$ дифференцируемая и $u(x) \in C^2(M)$ – решение неравенства (1.2), то оно также удовлетворяет неравенству (1.3).

Действительно, домножим обе части неравенства (1.2) на $\varphi(x)$ и проинтегрируем по Ω. Тогда, используя формулу Грина, получим

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi F(x,u(x),\nabla u(x))u^q(x)\,dx &\leqslant -\int_\Omega \varphi \operatorname{div}(A(x,u(x),\nabla u(x))\nabla u(x))\,dx \\ &= \int_\Omega A\nabla\varphi\nabla u\,dx - \int_{\partial\Omega\cap M} \varphi A\frac{\partial u}{\partial n}\,ds - \int_{\Omega\cap\partial M} \varphi A\frac{\partial u}{\partial n}\,ds \leqslant \int_\Omega A\nabla u\nabla\varphi\,dx.\end{aligned}$$

Фиксируем некоторую функцию исчерпания $h(x)$. Обозначим через $V_h(\mu R)$ множество $B_h(\mu R) \setminus \overline{B_h(R)}$, где $\mu > 1$ – некоторая константа, а через $|V_h(\mu R)|$ – объем этого множества. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть u – неотрицательное обобщенное решение неравенства (1.2) на M такое, что для некоторой функции исчерпания h выполнено*

$$\limsup_{R\to+\infty} \frac{|V_h(\mu R)|}{R^{2q/(q-1)}} \sup_{x\in V_h(\mu R)} \left(\frac{A(x,u(x),\nabla u(x))}{F(x,u(x),\nabla u(x))}\right)^{2q/(q-1)} \times \sup_{x\in V_h(\mu R)} F(x,u(x),\nabla u(x)) < +\infty.$$

Тогда $u \equiv 0$.

Пусть $A(x,\xi,\eta)$ и $F(x,\xi,\eta)$ таковы, что при любом фиксированном x определены функции

$$\widetilde{A}(x) = \sup\left(\frac{A(x,\xi,\eta)}{F(x,\xi,\eta)}\right)^{2q/(q-1)} \qquad \text{и} \qquad \widetilde{F}(x) = \sup F(x,\xi,\eta),$$

где точная верхняя грань берется по всем $\xi \in \mathbb{R}$ и $\eta \in \mathbb{R}^n$.

Следствие 1. *Если многообразие M таково, что для некоторого $\mu > 1$ и некоторой функции исчерпания h выполнено*

$$\limsup_{R\to+\infty} \frac{|V_h(\mu R)|}{R^{2q/(q-1)}} \sup_{V_h(\mu R)} \widetilde{A}(x) \sup_{V_h(\mu R)} \widetilde{F}(x) < +\infty,$$

то любое неотрицательное обобщенное решение неравенства (1.2) на M является тождественным нулем.

Следствие 2. *Пусть функции $A(x,\xi,\eta)$ и $F(x,\xi,\eta)$ ограничены и функция $F(x, \xi,\eta)$ отделена от нуля. Если многообразие M таково, что для некоторого $\mu > 1$ и некоторой функции исчерпания h выполнено*

$$\limsup_{R\to+\infty} \frac{|V_h(\mu R)|}{R^{2q/(q-1)}} < +\infty,$$

то любое неотрицательное обобщенное решение неравенства (1.2) на M является тождественным нулем.

Кроме того, в работе изучается поведение решений неравенства (1.1) на так называемых квазимодельных многообразиях, обобщающих сферически-симметричные. Показана точность полученных условий тривиальности решений неравенства (1.2).

2. Доказательство основной теоремы. Доказательство основано на небольшой модификации метода, предложенного в работе [6]. Сформулируем вначале некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть $\alpha \in (-1;0)$. Тогда для любого положительного обобщенного решения неравенства (1.2) и любой положительной финитной в Ω функции $\varphi(x)$ выполнены неравенства*

$$\int_\Omega F u^{q+\alpha}\varphi\,dx \leqslant \left(\frac{1}{2|\alpha|}\right)^p \int_\Omega \frac{A^p|\nabla\varphi|^{2p}}{F^{p-1}\varphi^{2p-1}}\,dx, \tag{2.1}$$

$$\int_\Omega A|\nabla u|^2 u^{\alpha-1}\varphi\,dx \leqslant \frac{1}{p2^{p-1}|\alpha|^{p+1}} \int_\Omega \frac{A^p|\nabla\varphi|^{2p}}{F^{p-1}\varphi^{2p-1}}\,dx, \tag{2.2}$$

где $p=(q+\alpha)/(q-1)$.

Доказательство. Подставим в обе части неравенства (1.3) функцию вида $\varphi = u^\alpha\varphi$, где $0\leqslant\varphi\leqslant 1$ – финитная в M функция такая, что $\operatorname{supp}\varphi\subset\Omega$. Тогда справедливо неравенство

$$\int_{\operatorname{supp}\varphi} F u^{q+\alpha}\varphi\,dx \leqslant \alpha\int_{\operatorname{supp}\varphi} A|\nabla u|^2 u^{\alpha-1}\varphi\,dx + \int_{\operatorname{supp}\varphi} A(\nabla u,\nabla\varphi)u^\alpha\,dx.$$

Учитывая отрицательность коэффициента α, последнее неравенство можно переписать в виде

$$\int_{\operatorname{supp}\varphi} F u^{q+\alpha}\varphi\,dx + \frac{|\alpha|}{2}\int_{\operatorname{supp}\varphi} A|\nabla u|^2 u^{\alpha-1}\varphi\,dx$$
$$\leqslant \frac{\alpha}{2}\int_{\operatorname{supp}\varphi} A|\nabla u|^2 u^{\alpha-1}\varphi\,dx + \int_{\operatorname{supp}\varphi} A|\nabla u||\nabla\varphi|u^\alpha\,dx. \tag{2.3}$$

Учитывая неравенство Коши

$$XY \leqslant \frac{|\alpha|}{2}X^2 + \frac{1}{2|\alpha|}Y^2,$$

последний интеграл можно оценить следующим образом:

$$\int_{\operatorname{supp}\varphi} A|\nabla u||\nabla\varphi|u^\alpha\,dx = \int_{\operatorname{supp}\varphi} A^{1/2}|\nabla u|u^{(\alpha-1)/2}\varphi^{1/2}\cdot\frac{A^{1/2}}{\varphi^{1/2}}|\nabla\varphi|u^{(\alpha+1)/2}\,dx$$
$$\leqslant \frac{|\alpha|}{2}\int_{\operatorname{supp}\varphi} A|\nabla u|^2u^{\alpha-1}\varphi\,dx + \frac{1}{2|\alpha|}\int_{\operatorname{supp}\varphi}\frac{Au^{\alpha+1}|\nabla\varphi|^2}{\varphi}\,dx.$$

Тогда неравенство (2.3) приводится к виду

$$\int_{\operatorname{supp}\varphi} F u^{q+\alpha}\varphi\,dx \leqslant \frac{\alpha}{2}\int_{\operatorname{supp}\varphi} A|\nabla u|^2 u^{\alpha-1}\varphi\,dx + \frac{1}{2|\alpha|}\int_{\operatorname{supp}\varphi} A\frac{u^{\alpha+1}|\nabla\varphi|^2}{\varphi}\,dx.$$

Применяя неравенство Юнга

$$PQ \leqslant \frac{1}{k}P^k + \frac{1}{k'}Q^{k'}, \quad \text{где } \frac{1}{k}+\frac{1}{k'}=1, \qquad k>1,$$

к последнему интегралу, получаем

$$\int_{\operatorname{supp}\varphi} F u^{q+\alpha}\varphi\,dx \leqslant \frac{\alpha}{2}\int_{\operatorname{supp}\varphi} A|\nabla u|^2 u^{\alpha-1}\varphi\,dx$$
$$+\frac{1}{k}\int_{\operatorname{supp}\varphi} F u^{(\alpha+1)k}\varphi\,dx + \frac{1}{(2|\alpha|)^{k'}k'}\int_{\operatorname{supp}\varphi}\frac{A^{k'}|\nabla\varphi|^{2k'}}{F^{k'-1}\varphi^{2k'-1}}\,dx.$$

Тогда, выбирая $k = (q+\alpha)/(\alpha+1)$, получаем, что

$$\frac{1}{k'}\int_{\operatorname{supp}\varphi} Fu^{q+\alpha}\varphi\,dx \leqslant \frac{\alpha}{2}\int_{\operatorname{supp}\varphi} A|\nabla u|^2 u^{\alpha-1}\varphi\,dx + \frac{1}{(2|\alpha|)^{k'}k'}\int_{\operatorname{supp}\varphi}\frac{A^{k'}|\nabla\varphi|^{2k'}}{F^{k'-1}\varphi^{2k'-1}}\,dx,$$

или

$$\frac{1}{k'}\int_{\operatorname{supp}\varphi} Fu^{q+\alpha}\varphi\,dx + \frac{|\alpha|}{2}\int_{\operatorname{supp}\varphi} A|\nabla u|^2 u^{\alpha-1}\varphi\,dx \leqslant c_0\int_{\operatorname{supp}\varphi}\frac{A^{k'}|\nabla\varphi|^{2k'}}{F^{k'-1}\varphi^{2k'-1}}\,dx,$$

где $c_0 = 1/((2|\alpha|)^{k'}k')$.

В силу неотрицательности каждого из слагаемых в последнем неравенстве, оно выполнено для каждого из интегралов в левой части в отдельности. Подставляя $k' = p$, получаем утверждение леммы.

Лемма 2. *Пусть u – положительное обобщенное решение неравенства* (1.2). *Тогда для любой константы $\mu > 1$ и $R > 0$ выполнено*

$$\int_{B_h(R)} F(x,u(x),\nabla u(x))u^q\,dx \leqslant K\frac{|V_h(\mu R)|}{R^{2q/(q-1)}}\biggl(\sup_{V_h(\mu R)}\frac{A(x,u(x),\nabla u(x))}{F(x,u(x),\nabla u(x))}\biggr)^{2q/(q-1)}\sup_{V_h(\mu R)} F(x,u(x),\nabla u(x)), \tag{2.4}$$

где константа K не зависит от R.

Доказательство. Рассмотрим финитную в M функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x\in B_h(R),\\ \biggl(\dfrac{\mu R - h(x)}{(\mu-1)R}\biggr)^{\lambda}, & \text{если } x\in B_h(\mu R)\setminus B_h(R),\\ 0, & \text{если } x\in M\setminus B_h(\mu R),\end{cases} \tag{2.5}$$

где константа $\lambda > 2$ будет указана ниже. Используя константу $\alpha\in(-1;0)$, получаем

$$\int_{B_h(\mu R)}\varphi F u^q\,dx \leqslant \int_{B_h(\mu R)} A|\nabla u||\nabla\varphi|\,dx \leqslant \biggl(\int_{B_h(\mu R)} A|\nabla u|^2u^{\alpha-1}\varphi\,dx\biggr)^{1/2}\biggl(\int_{B_h(\mu R)} A\frac{u^{1-\alpha}|\nabla\varphi|^2}{\varphi}\,dx\biggr)^{1/2}.$$

Применяя к последнему интегралу неравенство Гёльдера с коэффициентами

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = 1, \qquad a > 1,$$

получаем

$$\int_{B_h(\mu R)}\varphi F u^q\,dx \leqslant \biggl(\int_{B_h(\mu R)} A|\nabla u|^2u^{\alpha-1}\varphi\,dx\biggr)^{1/2}\biggl(\int_{B_h(\mu R)} Fu^{(1-\alpha)a}\varphi\,dx\biggr)^{1/(2a)} \times\biggl(\int_{B_h(\mu R)}\frac{A^{a'}|\nabla\varphi|^{2a'}}{F^{a'-1}\varphi^{2a'-1}}\,dx\biggr)^{1/(2a')}. \tag{2.6}$$

Выберем a таким образом, чтобы $(1-\alpha)a = q+\alpha$, и воспользуемся оценками (2.1) и (2.2) для интегралов в правой части неравенства (2.6). В результате получим

$$\int_{B_h(\mu R)} Fu^q\varphi\,dx \leqslant c_\alpha\biggl(\int_{B_h(\mu R)} \frac{A^p|\nabla\varphi|^{2p}}{F^{p-1}\varphi^{2p-1}}\,dx\biggr)^{1/(2a)+1/2} \times\biggl(\int_{B_h(\mu R)} \frac{A^{a'}|\nabla\varphi|^{2a'}}{F^{a'-1}\varphi^{2a'-1}}\,dx\biggr)^{1/(2a')}.$$

Используя вид функции $\varphi(x)$, заметим, что при выборе $\lambda = [\max\{2p, 2a'\}]+1$ на множестве $V_h(\mu R)$ выполнено неравенство

$$0 < \frac{|\nabla\varphi|^{2p}}{\varphi^{2p-1}} \leqslant \biggl(\frac{\lambda}{(\mu-1)R}\biggr)^{2p}.$$

Тогда, учитывая, что $\nabla\varphi = 0$ на множестве $B_h(R)$, получаем

$$\begin{aligned}\int_{B_h(\mu R)} Fu^q\varphi\,dx &\leqslant \frac{c_1}{R^{2q/(q-1)}}\biggl(\int_{V_h(\mu R)}\biggl(\frac{A}{F}\biggr)^{2p}F\,dx\biggr)^{1/(2a)+1/2} \\ &\qquad\times\biggl(\int_{V_h(\mu R)}\biggl(\frac{A}{F}\biggr)^{2a'}F\,dx\biggr)^{1/(2a')} \\ &\leqslant \frac{c_1}{R^{2q/(q-1)}}\biggl(\sup_{V_h(\mu R)}\frac{A(x,u(x),\nabla u(x))}{F(x,u(x),\nabla u(x))}\biggr)^{2q/(q-1)}\int_{V_h(\mu R)}F\,dx \\ &\leqslant \frac{c_1}{R^{2q/(q-1)}}\biggl(\sup_{V_h(\mu R)}\frac{A(x,u(x),\nabla u(x))}{F(x,u(x),\nabla u(x))}\biggr)^{2q/(q-1)} \\ &\qquad\times\sup_{V_h(\mu R)}F(x,u(x),\nabla u(x))\cdot|V_h(\mu R)|.\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\int_{B_h(R)} Fu^q\,dx \leqslant \int_{B_h(\mu R)} Fu^q\varphi\,dx,$$

получаем утверждение леммы.

Лемма 3. *Пусть u – положительное обобщенное решение неравенства (1.2). Тогда для любых констант $\mu>1$, $R>0$ и $1-q<\alpha<0$ выполнено неравенство*

$$\int_{B_h(R)} Fu^q\,dx \leqslant C_1\biggl(\frac{|V_h(\mu R)|}{R^{2q/(q-1)}}\biggl(\sup_{V_h(\mu R)}\frac{A}{F}\biggr)^{q/(q-1)}\sup_{V_h(\mu R)}F\biggr)^{(2q-1+\alpha)/(2q)} \times\biggl(\int_{V_h(\mu R)}Fu^q\,dx\biggr)^{(1-\alpha)/(2q)},$$

где C_1 не зависит от выбора R.

Доказательство. Используя неравенство (1.3) и функцию $\varphi(x)$, заданную формулой (2.5), находим

$$\int_{B_h(R)} Fu^q\,dx \leqslant \int_{\operatorname{supp}\varphi} Fu^q\varphi\,dx \leqslant \int_{\operatorname{supp}\varphi} A|\nabla u|\,|\nabla\varphi|\,dx = \int_{\operatorname{supp}\nabla\varphi} A|\nabla u||\nabla\varphi|\,dx.$$

Используя те же преобразования, что и при выводе (2.6), получаем неравенства

$$\begin{aligned}\int_{B_h(R)} Fu^q\,dx &\leqslant \biggl(\int_{\operatorname{supp}\nabla\varphi} A|\nabla u|^2u^{\alpha-1}\varphi\,dx\biggr)^{1/2}\biggl(\int_{\operatorname{supp}\nabla\varphi} A\frac{u^{1-\alpha}|\nabla\varphi|^2}{\varphi}\,dx\biggr)^{1/2}\\ &\leqslant \biggl(\int_{\operatorname{supp}\nabla\varphi} A|\nabla u|^2u^{\alpha-1}\varphi\,dx\biggr)^{1/2}\\ &\quad\times\biggl(\int_{\operatorname{supp}\nabla\varphi}\frac{A^{b'}|\nabla\varphi|^{2b'}}{F^{b'-1}\varphi^{2b'-1}}\,dx\biggr)^{1/(2b')}\biggl(\int_{\operatorname{supp}\nabla\varphi} Fu^{(1-\alpha)b}\varphi\,dx\biggr)^{1/(2b)},\end{aligned}$$

где $1/b+1/b'=1$, $b>1$. Теперь выберем b так, чтобы $(1-\alpha)b=q$. Тогда на основании (2.2) из последнего неравенства получаем

$$\begin{aligned}\int_{B_h(R)} Fu^q\,dx &\leqslant \biggl(\frac{2c_0}{|\alpha|}\int_{\operatorname{supp}\nabla\varphi}\frac{A^p|\nabla\varphi|^{2p}}{F^{p-1}\varphi^{2p-1}}\,dx\biggr)^{1/2}\\ &\quad\times\biggl(\int_{\operatorname{supp}\nabla\varphi}\frac{A^{b'}|\nabla\varphi|^{2b'}}{F^{b'-1}\varphi^{2b'-1}}\,dx\biggr)^{1/(2b')}\biggl(\int_{\operatorname{supp}\nabla\varphi} Fu^q\varphi\,dx\biggr)^{1/(2b)}.\end{aligned}$$

Подставляя в это неравенство указанную в (2.5) функцию φ с показателем $\lambda=[\max\{2p,2b'\}]+1$, получаем

$$\begin{aligned}\int_{B_h(R)} Fu^q\,dx &\leqslant C_1\biggl(\biggl(\sup_{V_h(\mu R)}\frac{A}{F}\biggr)^{q/(q-1)}\frac{|V_h(\mu R)|\sup_{V_h(\mu R)}F}{R^{2q/(q-1)}}\biggr)^{(2q+\alpha-1)/(2q)}\\ &\quad\times\biggl(\int_{V_h(\mu R)} Fu^q\,dx\biggr)^{(1-\alpha)/(2q)}.\end{aligned}$$

Здесь следует заметить, что показатель степени $(2q-1+\alpha)/(2q)>0$ в силу выбора α. Лемма доказана.

Замечание. Рассмотрим неравенство

$$\int_\Omega A\nabla u\nabla\varphi\,dx \geqslant 0. \tag{2.7}$$

Покажем, что для решений данного неравенства выполнен принцип минимума. А именно, *предположим, что найдется внутренняя точка* $x_0\in\Omega$ *такая, что* $u(x_0)=\inf_\Omega u(x)$. *Покажем, что функция* u *в таком случае является постоянной в* Ω.

Предположим противное, что $u(x)\neq\mathrm{const}$. Для любого $\varepsilon>0$ определим множество

$$\Omega_\varepsilon=\{x\in\Omega: u(x)\leqslant u(x_0)+\varepsilon\}.$$

Данное множество очевидно будет непустым, а из непрерывности функции $u(x)$ следует, что оно замкнуто в Ω. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = -(u(x) - u(x_0) - \varepsilon).$$

Данная функция финитна в Ω_ε. Тогда, подставляя в неравенство (2.7) функцию φ, получаем

$$-\int_{\Omega_\varepsilon} A|\nabla u|^2\,dx \geqslant 0.$$

Из последнего неравенства следует, что $\nabla u \equiv 0$ на множестве Ω_ε. Следовательно, функция $u(x)$ тождественно равна константе на множестве Ω_ε. В силу произвольности выбора ε функция $u(x)$ тождественно равна константе во всей области Ω.

Доказательство теоремы 1. Пусть u – обобщенное неотрицательное решение неравенства (1.2). Предположим, что найдется точка $x \in M$ такая, что $u(x) = 0$. Тогда в силу принципа минимума $u(x)$ – тождественный нуль.

В дальнейшем будем предполагать, что функция $u > 0$. Тогда в силу леммы 2 для нее выполнена оценка

$$\int_{B_h(R)} F(x,u(x),\nabla u(x))u^q\,dx \leqslant K\frac{|V_h(\mu R)|}{R^{2q/(q-1)}}\left(\sup_{x\in V_h(\mu R)}\frac{A(x,u(x),\nabla u(x))}{F(x,u(x),\nabla u(x))}\right)^{2q/(q-1)} \times \sup_{V_h(\mu R)} F(x,u(x),\nabla u(x)). \tag{2.8}$$

Переходя в (2.8) к пределу при $R \to +\infty$, получаем

$$\int_M F(x,u(x),\nabla u(x))u^q\,dx \leqslant K\limsup_{R\to+\infty}\frac{|V_h(\mu R)|}{R^{2q/(q-1)}}\left(\sup_{V_h(\mu R)}\frac{A(x,u(x),\nabla u(x))}{F(x,u(x),\nabla u(x))}\right)^{2q/(q-1)} \times \sup_{V_h(\mu R)} F(x,u(x),\nabla u(x)) < +\infty.$$

По условию теоремы 1 предел в правой части конечен. Из конечности данного интеграла следует, что

$$\int_{V_h(\mu R)} F(x,u(x),\nabla u(x))u^q\,dx \to 0 \qquad \text{при} \quad R \to +\infty.$$

Учитывая лемму 3, получаем

$$\int_{B_h(R)} F(x,u(x),\nabla u(x))u^q\,dx \to 0 \qquad \text{при} \quad R \to +\infty.$$

Таким образом, получаем противоречие с тем, что функция u строго положительна. Теорема доказана.

Доказательство следствия 1. Чтобы доказать следствие 1, достаточно заметить, что для любой функции $u(x)$ выполнены неравенства

$$\left(\frac{A(x,u(x),\nabla u(x))}{F(x,u(x),\nabla u(x))}\right)^{2q/(q-1)} \leqslant \widetilde{A}(x) \qquad \text{и} \qquad F(x,u(x),\nabla u(x)) \leqslant \widetilde{F}(x).$$

Таким образом, из предположения о конечности предела

$$\limsup_{R\to+\infty} \frac{|V_h(\mu R)|}{R^{2q/(q-1)}} \sup_{V_h(\mu R)} \widetilde{A}(x) \sup_{V_h(\mu R)} \widetilde{F}(x)$$

сразу следует выполнение условий теоремы 1 для всех положительных обобщенных решений неравенства (1.2), т.е. $u(x)\equiv 0$.

Доказательство следствия 2. Из условий на функции A и F следует, что для любой функции $u(x)$ выполнено

$$\lim_{R\to+\infty} \sup_{x\in V_h(\mu R)} \left(\frac{A(x,u(x),\nabla u(x))}{F(x,u(x),\nabla u(x))}\right)^{2q/(q-1)} \sup_{x\in V_h(\mu R)} F(x,u(x),\nabla u(x)) \leqslant \mathrm{const}.$$

Тогда из условия

$$\limsup_{R\to+\infty} \frac{|V_h(\mu R)|}{R^{2q/(q-1)}} < +\infty$$

сразу следует выполнение условий теоремы 1 для всех положительных обобщенных решений неравенства (1.2). Таким образом, всякое положительное решение неравенства является тривиальным.

Заметим, что требования на функции $A(x,\xi,\eta)$ и $F(x,\xi,\eta)$ вполне можно ослабить. А именно, вместо непрерывности достаточно требования локальной интегрируемости по первой переменной.

3. Квазимодельные многообразия. В данном пункте изучается поведение решений неравенства (1.1) на квазимодельных римановых многообразиях. Опишем их подробнее. Пусть M_g – полное риманово многообразие без края, изометричное прямому произведению $[0;+\infty)\times S_1\times\dots\times S_k$, где $\{S_i\}$ – компакты без края, с метрикой

$$ds^2 = dr^2 + \sum_{i=1}^{k} g_i^2(r)\,d\theta_i^2.$$

Здесь $g_i(r)$ – положительные гладкие на $\mathbb{R}_+$ функции, а $d\theta_i^2$ – метрика на компакте S_i.

Точные условия выполнения теорем типа Лиувилля, а также условия разрешимости задачи Дирихле для гармонических функций и решения стационарного уравнения Шрёдингера найдены в [3], [4].

В случае, если $k=1$, а S – сфера, мы получим модельное многообразие. Частными случаями подобных многообразий могут служить евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, пространство Лобачевского $\mathbb{H}^n$, поверхности вращения.

Введем следующие обозначения:

$$\dim S_i = n_i, \qquad S(r) = \prod_{i=1}^{k} g_i^{n_i}(r), \qquad V(r) = \int_0^r S(t)\,dt.$$

Теорема 2. *Если риманово многообразие M_g таково, что*

$$\limsup_{R\to+\infty} R^{-2q/(q-1)} \int_R^{\mu R} S(t)\,dt < +\infty,$$

где $\mu > 1$ – некоторая константа, то любое неотрицательное решение неравенства (1.2) является тождественным нулем.

Доказательство. По сути дела, теорема 2 является следствием теоремы 1, что легко увидеть, если в качестве функции исчерпания выбрать $h(r,\theta_1,\dots,\theta_k) = r$.

Рассмотрим на многообразии M_g задачу о нахождении нетривиального неотрицательного решения неравенства (1.1).

Известно [4], что на многообразии M_g оператор Лапласа–Бельтрами имеет вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \sum_{i=1}^k \frac{n_i g_i'(r)}{g_i(r)}\,\frac{\partial}{\partial r} + \sum_{i=1}^k \frac{1}{g_i^2(r)}\Delta_{\theta_i},$$

где Δ_{θ_i} – лапласиан на компакте S_i.

Введем в рассмотрение следующую функцию:

$$J(r) = \int_0^r \frac{V(t)}{S(t)}\,dt.$$

Теорема 3. *Предположим, что многообразие M_g таково, что для некоторой константы $0 < c < (q-1)/q$ выполнено соотношение*

$$\left(\frac{V(r)}{S(r)}\right)^2 \leqslant c\int_0^r \frac{V(t)}{S(t)}\,dt. \tag{3.1}$$

Тогда найдется достаточно малая константа $\varepsilon > 0$ такая, что функция

$$u(r) = \frac{\varepsilon}{(1+J(r))^{1/(q-1)}} \tag{3.2}$$

является нетривиальным положительным решением неравенства (1.1).

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ такое, чтобы $1-(q-1)\varepsilon^{q-1} > 0$ и выполнялось неравенство

$$c \leqslant \frac{q-1}{q}(1-(q-1)\varepsilon^{q-1}). \tag{3.3}$$

Заметим, что $J'(r) = V(r)/S(r)$. Из (3.1) имеем

$$c \geqslant \frac{(J'(r))^2}{J(r)} > \frac{(J'(r))^2}{J(r)+1}\,.$$

Учитывая (3.3), получаем

$$\frac{q-1}{q}(1-(q-1)\varepsilon^{q-1}) > \frac{J'^2(r)}{J(r)+1}\,,$$

и, следовательно,

$$1 - \frac{q}{q-1}\cdot\frac{J'^2(r)}{J(r)+1} - (q-1)\varepsilon^{q-1} > 0. \tag{3.4}$$

Далее, вычислим оператор Лапласа–Бельтрами функции (3.2):

$$-\Delta u = \frac{\varepsilon}{(q-1)(1+J(r))^{q/(q-1)}} - \frac{\varepsilon q}{(q-1)^2(1+J(r))^{(2q-1)/(q-1)}} \cdot (J'(r))^2. \qquad (3.5)$$

Проверим, что функция (3.2) удовлетворяет неравенству (1.1). Подставив в неравенство $-\Delta u \geqslant u^q$ соответствующие правые части выражений (3.2) и (3.5), получим соотношение

$$\frac{\varepsilon}{(q-1)(1+J(r))^{q/(q-1)}}\left(1-(q-1)\varepsilon^{q-1} - \frac{q}{q-1}\cdot\frac{J'^2(r)}{1+J(r)}\right) \geqslant 0.$$

Очевидно, что первый сомножитель положителен. Выражение в скобках также положительно в силу (3.4).

Таким образом, в условиях теоремы 3 функция

$$u(r) = \frac{\varepsilon}{(1+J(r))^{1/(q-1)}}$$

действительно является нетривиальным решением неравенства (1.1). Теорема 3 доказана.

Пример 1. Рассмотрим риманово многообразие M_g, изометричное произведению $[0;+\infty)\times S$, где $\dim S = n-1$. Возьмем в качестве функции $g(r) = r^{(q+1)/((q-1)(n-1))}$. Объем такого многообразия растет как $V(r) = kr^{2q/(q-1)}$, где k – некоторая константа больше нуля. Тогда легко заметить, что многообразие удовлетворяет условию теоремы 2. С другой стороны, проверяя условие (3.1) теоремы 3 для заданной метрики, получим тождество

$$\left(\frac{V(r)}{S(r)}\right)^2 = \frac{q-1}{q}\int_0^r \frac{V(t)}{S(t)}\,dt.$$

Таким образом, данный пример показывает, что в условиях теоремы 3 достигнута точность в оценке константы c.

Пример 2. Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ как частный случай многообразия M_g. В этом случае метрика многообразия задается в виде $ds^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2$.

Найдем следующий интеграл:

$$I = R^{-2q/(q-1)}\int_R^{\mu R} r^{n-1}\,dr\int_S d\theta = R^{-2q/(q-1)} w_n(\mu^n-1)R^n, \qquad (3.6)$$

где w_n – площадь поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}^n$. В том случае, если

$$n - \frac{2q}{q-1} \leqslant 0, \qquad (3.7)$$

предел в (3.6) при $R\to+\infty$ конечен. Тогда согласно теореме 2 решением неравенства (1.1) является тождественный нуль. Преобразовывая неравенство (3.7), получаем в точности оценку на показатель $q \leqslant n/(n-2)$, указанную выше.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] B. Gidas, J. Spruck, “Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **34**:4 (1981), 525–598.

[2] A. Grigor’yan, “Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **36**:2 (1999), 135–249.

[3] А. Г. Лосев, “О некоторых лиувилевых теоремах на некомпактных римановых многообразиях”, *Сиб. матем. журн.*, **39**:1 (1998), 87–93.

[4] А. Г. Лосев, Е. А. Мазепа, “Ограниченные решения уравнения Шрёдингера на римановых произведениях”, *Алгебра и анализ*, **13**:1 (2001), 84–110.

[5] V. M. Miklyukov, V. G. Tkachev, “Denjoy–Alfors’s theorem for harmonic functions on Riemannian manifolds and external structure of minimal surfaces”, *Comm. Anal. Geom.*, **4**:4 (1996), 547–587.

[6] Е. Митидиери, С. И. Похожаев, “Отсутствие глобальных положительных решений квазилинейных эллиптических неравенств”, *Докл. РАН*, **359**:4 (1998), 456–460.

[7] J. Serrin, H. Zou, “Cauchy–Liouville and universal boundedness theorems for quasilinear elliptic equations and inequalities”, *Acta. Math.*, **189**:1 (2002), 79–142.

А. Г. Лосев
Волгоградский государственный университет
E-mail: alexander.losev@volsu.ru

Поступило
22.12.2005

Ю. С. Федоренко
Волгоградский государственный университет
E-mail: yuri.fedorenko@volsu.ru